53
Т76

ТРОФИМОВА
З.Г. ПАВЛОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ФИЗИКИ

с решениями

ВЫСШАЯ ШКОЛА

Т.И. ТРОФИМОВА
З.Г. ПАВЛОВА

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ФИЗИКИ С РЕШЕНИЯМИ

Издание четвертое, стереотипное

Рекомендовано
Министерством образования
Российской Федерации
в качестве учебного пособия
для студентов вузов

Москва
"Высшая школа"
2003

УДК 53
ББК 22.3
Т 70

Рецензент: проф. кафедры физики им. В.А. Фабриканта
Московского энергетического института (технического университета)
В.А. Касьянов

Трофимова, Т.И.
Т 70 Сборник задач по курсу физики с решениями: Учеб. пособие для вузов/Т.И. Трофимова, З.Г. Павлова. — 4-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003.— 591 с.: ил.

ISBN 5-06-004164-6

Предлагаемый задачник с решениями составляет единый методический комплект с «Курсом физики» и «Сборником задач по курсу физики» Т.И. Трофимовой (М., Высш. шк.). Он состоит из семи разделов, полностью соответствующих программе курса физики для вузов.

Основное изиачение пособия — научить студентов решать задачи, показать им рациональную запись условия, решения, расчета, ответа. Решение задач дается без каких-либо пояснений, что потребует от студента, в случае необходимости, обратиться к теоретическому материалу, вникнуть в суть рассматриваемых явлений и процессов.

Для студентов и преподавателей вузов и техникумов. Может быть полезен абитуриентам, готовящимся к поступлению в технические институты.

УДК 53
ББК 22.3

ISBN 5-06-004164-6

© ФГУП «Издательство «Высшая школа», 2003

Оригинал-макет данного издания является собственностью издательства «Высшая школа», и его репродуцирование (воспроизведение) любым способом без согласия издательства запрещается.

Оглавление

Предисловие 5
Методические указания 5

1. Физические основы механики

1.1. Элементы кинематики 6
1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела 29
1.3. Работа и энергия 48
1.4. Механика твердого тела 72
1.5. Тяготение. Элементы теории поля 94
1.6. Элементы механики жидкостей 114
1.7. Элементы специальной (частной) теории относительности 131

2. Основы молекулярной физики и термодинамики

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов 145
2.2. Основы термодинамики 166
2.3. Реальные газы, жидкости и твердые тела 186

3. Электричество и магнетизм

3.1. Электростатика 199
3.2. Постоянный электрический ток 233
3.3. Электрический ток в металлах, в вакууме и газах 247
3.4. Магнитное поле 251
3.5. Электромагнитная индукция 279
3.6. Магнитные свойства вещества 297
3.7. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля 303

4. Колебания и волны

4.1. Механические и электромагнитные колебания 307
4.2. Упругие волны 360
4.3. Электромагнитные волны 377

5. Оптика. Квантовая природа излучения

5.1. Элементы геометрической и электронной оптики 385
5.2. Интерференция света 401
5.3. Дифракция света 413
5.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом 431
5.5. Поляризация света 441
5.6. Квантовая природа излучения 452

6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

6.1. Теория атома водорода по Бору 475
6.2. Элементы квантовой механики 491
6.3. Элементы современной физики атомов и молекул 526
6.4. Элементы квантовой статистики 539
6.5. Элементы физики твердого тела 542

7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

7.1. Элементы физики атомного ядра 547
7.2. Элементы физики элементарных частиц 572

Важнейшие формулы, используемые в задачнике 580
Периодическая система элементов Менделеева 590

Предисловие

При изучении курса физики во втузе большое значение имеет практическое применение теоретических знаний, главное из которых — умение решать задачи. Данное учебное пособие полностью соответствует “Курсу физики” Т. И. Трофимовой (издательство “Высшая школа”, 5-е изд., 1998) и “Сборнику задач по курсу физики” Т. И. Трофимовой (издательство “Высшая школа”, 1996), образуя, таким образом, с ними единый методический комплект.

Для формирования навыков работы над задачами все решения оформлены однотипно: запись условия, перевод данных в СИ, запись необходимых уравнений, их решение в общем виде, подстановка числовых значений в конечную формулу, запись ответа. Решение задач приводится без каких-либо пояснений, поскольку сначала следует тщательно изучить теоретический материал по данной теме, затем провести собственный анализ задачи, решить ее и только тогда для сравнения результатов обратиться к готовому решению, которое, кстати, не всегда является единственным.

Все задачи снабжены ответами, которые даны с точностью до трех значащих цифр. Таким же числом значащих цифр выражены величины в условиях задач и справочных таблицах, приведенных по мере представления материала. Значащие цифры — нули, стоящие в конце чисел, — для упрощения записи опускаются. В условиях задач и в ответах используются кратные и дольные единицы, образованные от единиц СИ. В конце сборника приведен перечень важнейших используемых формул.

Авторы

Методические указания

Решая задачи, целесообразно использовать следующие методические указания.

1. Вникнув в условие задачи, сделать краткую запись условия, выразить все данные в СИ и, где это только возможно, дать схематический чертеж, поясняющий содержание задачи.
2. Выяснив, какие физические законы лежат в основе данной задачи, решить ее в общем виде, т. е. выразить искомую физическую величину через заданные в задаче величины (в буквенных обозначениях, без подстановки числовых значений в промежуточные формулы).
3. Проверив правильность общего решения, подставить числа в окончательную формулу и указать единицу искомой физической величины, проверив правильность ее размерности.

1. Физические основы механики

1.1. Элементы кинематики

1.1 Скорость течения реки $v = 3$ км/ч, а скорость движения лодки относительно воды $v_1 = 6$ км/ч. Определите, под каким углом относительно берега должна двигаться лодка, чтобы проплыть поперек реки.

Дано

$v = 3$ км/ч $= 0{,}833$ м/с

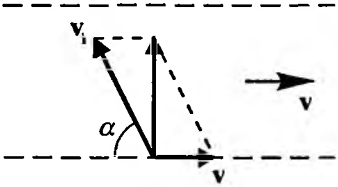
$v_1 = 6$ км/ч $= 1{,}67$ м/с

α — ?

Решение

$$\frac{v}{v_1} = \cos\alpha ,$$

$$\alpha = \arccos\frac{v}{v_1} .$$



Ответ $\alpha = 60°$.

1.2 Капля дождя при скорости ветра $v_1 = 11$ м/с падает под углом $\alpha = 30°$ к вертикали. Определите, при какой скорости ветра v_2 капля воды будет падать под углом $\beta = 45°$.

Дано

$v_1 = 11$ м/с

$\alpha = 30°$

$\beta = 45°$

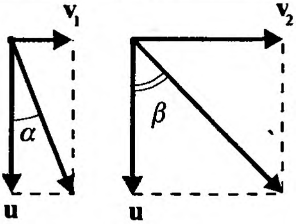
v_2 — ?

Решение

$$u_1 = u_2 = u ,$$

$$\frac{v_1}{u} = \operatorname{tg}\alpha ,$$

$$\frac{v_2}{u} = \operatorname{tg}\beta ,$$



$$\frac{v_1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{v_2}{\operatorname{tg}\beta} , \quad v_2 = v_1\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha} .$$

Ответ $v_2 = 19$ м/с.

3

Два автомобиля, выехав одновременно из одного пункта, движутся прямолинейно в одном направлении. Зависимость пройденного ими пути задается уравнениями $s_1 = At + Bt^2$ и $s_2 = Ct + Dt^2 + Ft^3$. Определите относительную скорость автомобилей.

Дано

$s_1 = At + Bt^2$

$s_2 = Ct + Dt^2 + Ft^3$

u — ?

Решение

$$u = v_1 - v_2, \qquad v_1 = \frac{ds_1}{dt} = A + 2Bt,$$

$$v_2 = \frac{ds_2}{dt} = C + 2Dt + 3Ft^2,$$

$$u = A + 2Bt - C - 2Dt - 3Ft^2 = A - C + 2(B - D)t - 3Ft^2.$$

Ответ $u = A - C + 2(B - D)t - 3Ft^2$.

1.4

Велосипедист проехал первую половину времени своего движения со скоростью $v_1 = 16$ км/ч, вторую половину времени — со скоростью $v_2 = 12$ км/ч. Определите среднюю скорость движения велосипедиста.

Дано

$t_1 = t_2 = \frac{t}{2}$

$v_1 = 16$ км/ч $= 4{,}44$ м/с

$v_2 = 12$ км/ч $= 3{,}33$ м/с

$\langle v \rangle$ — ?

Решение

$$\langle v \rangle = \frac{s}{t}, \qquad s = s_1 + s_2, \qquad s_1 = v_1 t_1,$$

$$s_2 = v_2 t_2, \qquad t_1 = t_2 = \frac{t}{2},$$

$$s = v_1 \frac{t}{2} + v_2 \frac{t}{2} = (v_1 + v_2)\frac{t}{2},$$

$$\langle v \rangle = \frac{(v_1 + v_2)t}{2t} = \frac{v_1 + v_2}{2}.$$

Ответ $\langle v \rangle = 14$ км/ч.

1.5 Велосипедист проехал первую половину пути со скоростью $v_1 = 16$ км/ч, вторую половину пути — со скоростью $v_2 = 12$ км/ч. Определите среднюю скорость движения велосипедиста.

Ответ $\langle v \rangle = 13{,}7$ м/с.

1.6 Студент проехал половину пути на велосипеде со скоростью $v_1 = 16$ км/ч. Далее половину оставшегося времени он ехал со скоростью $v_2 = 12$ км/ч, а затем до конца пути шел пешком со скоростью $v_3 = 5$ км/ч. Определите среднюю скорость движения студента на всем пути.

Дано

$s_1 = \dfrac{s}{2}$

$t_2 = t_3$

$v_1 = 16$ км/ч $= 4{,}44$ м/с

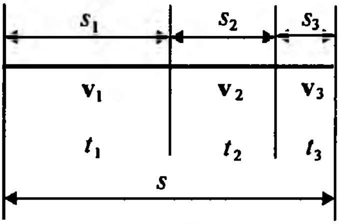
$v_2 = 12$ км/ч $= 3{,}33$ м/с

$v_3 = 5$ км/ч $= 1{,}39$ м/с

$s_1 = s_2 + s_3$

$\langle v \rangle$ — ?

Решение



$s_1 = v_1 t_1$, $\quad s_2 = v_2 t_2$,

$s_3 = v_3 t_3$, $\quad s_1 = s_2 + s_3$,

$t_2 = t_3$,

$$\langle v \rangle = \frac{s_1 + s_2 + s_3}{t_1 + t_2 + t_3},$$

$$\langle v \rangle = \frac{2s_1}{\dfrac{s_1}{v_1} + \dfrac{2s_1}{v_2 + v_3}} = \frac{2v_1(v_2 + v_3)}{2v_1 + v_2 + v_3}.$$

Ответ $\langle v \rangle = 11{,}1$ км/ч.

1.7 В течение времени τ скорость тела задается уравнением вида $\upsilon = A + Bt + Ct^2$ ($0 \leqslant t \leqslant \tau$). Определите среднюю скорость за промежуток времени τ.

Дано	*Решение*
$\upsilon = A + Bt + Ct^2$ $0 \leqslant t \leqslant \tau$	$\langle \upsilon \rangle = \frac{s}{\tau}$, $\quad s = \int_0^\tau \upsilon \, dt = \int_0^\tau (A + Bt + Ct^2)\, dt =$
$\langle \upsilon \rangle$ — ?	$= \int_0^\tau A\, dt + \int_0^\tau Bt\, dt + \int_0^\tau Ct^2\, dt = A\tau + \frac{B\tau^2}{2} + \frac{C\tau^3}{3}$,

$$\langle \upsilon \rangle = \frac{s}{\tau} = A + \frac{B\tau}{2} + \frac{C\tau^2}{3}.$$

Ответ $\langle \upsilon \rangle = A + \frac{B\tau}{2} + \frac{C\tau^2}{3}$.

1.8 При падении камня в колодец его удар о поверхность воды доносится через $t = 5$ с. Принимая скорость звука $\upsilon = 330$ м/с, определите глубину колодца.

Дано	*Решение*
$t = 5$ с $\upsilon = 330$ м/с	$h = \frac{gt^2}{2}$, $\quad h = \upsilon t_2$, $\quad t_2 = t - t_1$,
h — ?	$\frac{gt_1^2}{2} = \upsilon(t - t_1)$, $\quad gt_1^2 + 2\upsilon t_1 - 2\upsilon t = 0$,

$$t_1^2 + \frac{2\upsilon}{g} t_1 - \frac{2\upsilon}{g} t = 0, \qquad t_1 = -\frac{\upsilon}{g} + \sqrt{\left(\frac{\upsilon}{g}\right)^2 + \frac{2\upsilon t}{g}} = 4{,}67 \text{ с},$$

$$h = \frac{gt_1^2}{2} = 107 \text{ м}.$$

Ответ $h = 107$ м.

1.9 Тело падает с высоты $h = 1$ км с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какой путь пройдет тело: 1) за первую секунду падения; 2) за последнюю секунду падения.

Дано

$h = 1\ \text{км} = 10^3\ \text{м}$

$v_0 = 0$

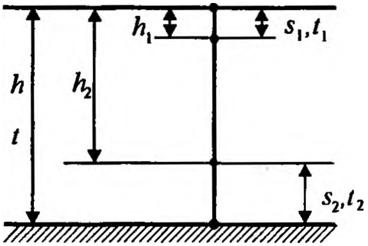
$t_1 = 1\ \text{с}$

$t_2 = 1\ \text{с}$

1) s_1 — ?

2) s_2 — ?

Решение



$$h = \frac{gt^2}{2}, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$h_1 = \frac{gt_1^2}{2}, \qquad s_1 = h_1, \qquad s_1 = \frac{gt_1^2}{2},$$

$$h_2 = \frac{g(t - t_2)^2}{2}, \qquad s_2 = h - h_2, \qquad s_2 = h - \frac{g\left(\sqrt{\frac{2h}{g}} - t_2\right)^2}{2}.$$

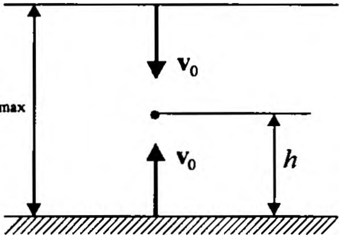
Ответ 1) $s_1 = 4{,}9$ м; 2) $s_2 = 132$ м.

1.10 Тело падает с высоты $h = 1$ км с нулевой начальной скоростью. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, какое время понадобится телу для прохождения: 1) первых 10 м пути; 2) последних 10 м пути.

Ответ 1) $t_1 = 1{,}43$ с; 2) $t_2 = 0{,}1$ с.

1.11 Первое тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $\upsilon_0 = 5$ м/с. В тот же момент времени вертикально вниз с той же начальной скоростью из точки, соответствующей максимальной верхней точке полета $h_{\max}$ первого тела, брошено второе тело. Определите: 1) в какой момент времени t тела встретятся; 2) на какой высоте h от поверхности Земли произойдет эта встреча; 3) скорость υ_1 первого тела в момент встречи; 4) скорость υ_2 второго тела в момент встречи.

Дано	*Решение*
$\upsilon_0 = 5$ м/с	$h_{\max} = \dfrac{\upsilon_0^2}{2g}$,
t — ? h — ? υ_1 — ? υ_2 — ?	$\upsilon_1 = \upsilon_0 - gt$, $\upsilon_2 = \upsilon_0 + gt$,



$$s_1 = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}, \qquad s_2 = \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2},$$

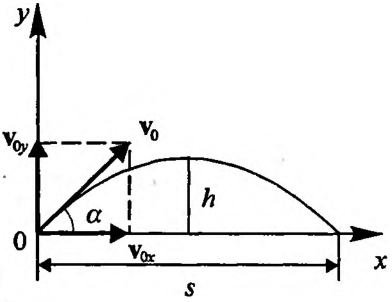
$$s_1 + s_2 = h_{\max}, \qquad \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} + \upsilon_0 t + \frac{gt^2}{2} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}, \qquad 2\upsilon_0 t = \frac{\upsilon_0^2}{2g},$$

$$t = \frac{\upsilon_0}{4g}, \qquad h = s_1 = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 \frac{\upsilon_0}{4g} - \frac{g\upsilon_0^2}{16g^2 \cdot 2} = \frac{7\upsilon_0^2}{32g},$$

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - gt = \upsilon_0 - g\frac{\upsilon_0}{4g} = \frac{3}{4}\upsilon_0, \qquad \upsilon_2 = \upsilon_0 + gt = \upsilon_0 + g\frac{\upsilon_0}{4g} = \frac{5}{4}\upsilon_0.$$

Ответ 1) $t = 127$ мс; 2) $h = 56$ см;
3) $\upsilon_1 = 3{,}75$ м/с; $\upsilon_2 = 6{,}25$ м/с.

1.12 Тело брошено под углом к горизонту. Оказалось, что максимальная высота подъема $h = s/4$ (s — дальность полета). Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите угол броска к горизонту.

Дано	*Решение*
$h = s/4$	
α — ?	

$v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$,

(t — время подъема, $2t$ — время полета),

$h = \dfrac{gt^2}{2}$, $h = v_{0y}t - \dfrac{gt^2}{2}$, $\dfrac{gt^2}{2} = v_0 t \sin\alpha - \dfrac{gt^2}{2}$,

$gt^2 = v_0 t \sin\alpha$, $t = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $h = \dfrac{gt^2}{2} = \dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$,

$h = \dfrac{s}{4}$ (по условию), $s = v_{0x} \cdot 2t = 2v_0 t \cos\alpha = \dfrac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g}$,

$\dfrac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g} = \dfrac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{4g}$, $\sin\alpha = \cos\alpha$,

$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 1$, $\alpha = \mathrm{arctg}\,1$,

$\alpha = 45°$.

Ответ $\alpha = 45°$.

1.13 Тело брошено со скоростью $v_0 = 15$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) высоту h подъема тела; 2) дальность полета (по горизонтали) s тела; 3) время его движения.

Ответ 1) $h = 2{,}87$ м; 2) $s = 19{,}9$ м; 3) $t = 1{,}53$ с.

1.14 Тело брошено со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите для момента времени $t = 1{,}5$ с после начала движения: 1) нормальное ускорение; 2) тангенциальное ускорение.

Дано

$v_0 = 20$ м/с

$\alpha = 30°$

$t = 1{,}5$ с

1) a_n — ?

2) a_τ — ?

Решение

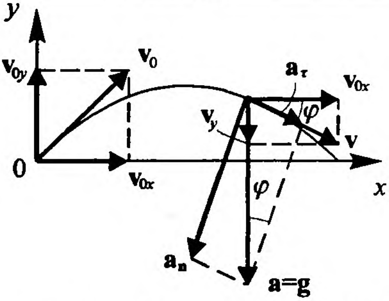
$v_y = v_{0y} - gt_1,$

$v_{0y} = v_0 \sin\alpha.$

При $h_{\max}$:

$v_y = 0,$

$v_0 \sin\alpha = gt_1,$



$$t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = 1{,}02 \text{ с}. \quad t = 1{,}5 \text{ с} > t_1 \text{ (спуск)}, \quad t' = t - t_1 = 1{,}5 \text{ с} - 1{,}02 \text{ с} = 0{,}48 \text{ с},$$

$$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha, \qquad v_y = gt', \qquad \frac{v_y}{v_x} = \operatorname{tg}\varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\frac{gt'}{v_0 \cos\alpha}, \qquad a = g, \qquad a_\tau = g \sin\varphi, \qquad a_n = g\cos\varphi,$$

$$a_n = g\cos\left(\operatorname{arctg}\frac{gt'}{v_0\cos\alpha}\right), \qquad a_\tau = g\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{gt'}{v_0\cos\alpha}\right).$$

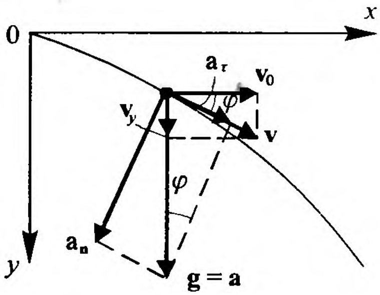
Ответ 1) $a_n = 9{,}47$ м/с^2; 2) $a_\tau = 2{,}58$ м/с^2.

1.15 С башни высотой $H = 40$ м брошено тело со скоростью $v_0 = 20$ м/с под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) время t движения тела; 2) на каком расстоянии s от основания башни тело упадет на Землю; 3) скорость v падения тела на Землю; 4) угол φ, который составит траектория тела с горизонтом в точке его падения.

Ответ 1) $t = 4{,}64$ с; 2) $s = 65{,}7$ м;
3) $v = 34{,}4$ м/с; 4) $\varphi = 65{,}7°$.

1.16 Тело брошено горизонтально со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите радиус кривизны траектории тела через $t = 2$ с после начала движения.

Дано	Решение
$v_0 = 15$ м/с $t = 2$ с	
R — ?	



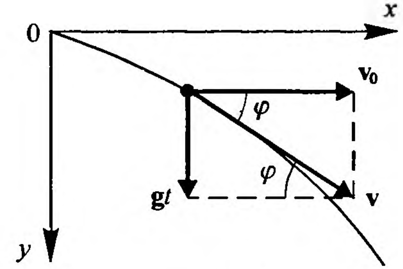
$$v_x = v_0, \qquad v_y = gt, \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2},$$

$$a = g, \qquad a_n = g\cos\varphi, \qquad \cos\varphi = \frac{v_0}{v}, \qquad a_n = \frac{v^2}{R},$$

$$R = \frac{v^2}{a_n} = \frac{v^2}{g\cos\varphi} = \frac{v^3}{gv_0}, \qquad R = \frac{(v_0^2 + g^2t^2)^{3/2}}{gv_0}.$$

Ответ $R = 102$ м.

1.17 С башни высотой $h = 30$ м в горизонтальном направлении брошено тело с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с. Определите: 1) уравнение траектории тела $y(x)$; 2) скорость v тела в момент падения на Землю; 3) угол φ, который образует эта скорость с горизонтом в точке его падения.

Дано	***Решение***
$h = 30$ м $v_0 = 10$ м/с 1) $y(x)$ — ? 2) v — ? 3) φ — ?	

$$x = v_0 t, \qquad t = \frac{x}{v_0}, \qquad y = \frac{gt^2}{2}, \qquad y = \frac{g}{2}\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 = \frac{g}{2v_0^2}x^2,$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2}, \qquad h = \frac{gt^2}{2}, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{gt}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}.$$

Ответ 1) $y = \dfrac{g}{2v_0^2}x^2$; 2) $v = 26{,}2$ м/с; 3) $\varphi = 67{,}6°$.

● ●

Некоторые физические постоянные

Скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с

Нормальное ускорение свободного падения $g = 9{,}81$ м/с^2

Гравитационная постоянная $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)

1.18 Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($A = 6$ м; $B = 3$ м/с; $C = 2$ м/с^2; $D = 1$ м/с^3). Определите для тела в интервале времени от $t_1 = 1$ с до $t_2 = 4$ с: 1) среднюю скорость; 2) среднее ускорение.

Дано

$s = A - Bt + Ct^2 + Dt^3$

$A = 6$ м

$B = 3$ м/с

$C = 2$ м/с^2

$D = 1$ м/с^3

$t_1 = 1$ с

$t_2 = 4$ с

1) $\langle v \rangle$ — ?

2) $\langle a \rangle$ — ?

Решение

$$\langle v \rangle = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1},$$

$$s_2 = s\big|_{t=t_2}, \qquad s_1 = s\big|_{t=t_1},$$

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = -B + 2Ct + 3Dt^2,$$

$$\langle a \rangle = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1},$$

$$v_2 = v\big|_{t=t_2}, \qquad v_1 = v\big|_{t=t_1}.$$

Ответ 1) $\langle v \rangle = 28$ м/с; 2) $\langle a \rangle = 19$ м/с^2.

1.19 Зависимость пройденного телом пути от времени задается уравнением $s = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($C = 0{,}1$ м/с^2, $D = 0{,}03$ м/с^3). Определите: 1) через сколько времени после начала движения ускорение a тела будет равно 2 м/с^2; 2) среднее ускорение $\langle a \rangle$ тела за этот промежуток времени.

Ответ 1) $t = 10$ с; 2) $\langle a \rangle = 1{,}1$ м/с^2.

1.20 Объясните, может ли изменяться направление вектора скорости, в то время как его ускорение по модулю остается постоянным.

1.21 Тело движется равноускоренно с начальной скоростью v_0. Определите ускорение тела, если за время $t = 2$ с оно прошло путь $s = 16$ м и его скорость $v = 3v_0$.

Дано

$t = 2$ с

$s = 16$ м

$v = 3v_0$

a — ?

Решение

$$a = \text{const}, \qquad v = v_0 + at, \qquad s = v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

$$v = 3v_0, \qquad 3v_0 = v_0 + at, \qquad a = \frac{2v_0}{t},$$

$$s = v_0 t + \frac{2v_0 t^2}{t \cdot 2} = 2v_0 t, \qquad v_0 = \frac{s}{2t},$$

$$a = \frac{2s}{2t \cdot t} = \frac{s}{t^2}.$$

Ответ $a = 4$ м/с^2.

1.22 Материальная точка движется вдоль прямой так, что ее ускорение линейно растет и за первые 10 с достигает значения 5 м/с^2. Определите в конце десятой секунды: 1) скорость точки; 2) пройденный точкой путь.

Дано

$a = kt$

$t_1 = 10$ с

$a_1 = 5$ м/с^2

1) v_1 — ?

2) s_1 — ?

Решение

$$a = kt, \qquad k = \frac{a}{t} = \frac{a_1}{t_1},$$

$$v = \int_0^t a(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^t kt\,\mathrm{d}t = \frac{kt^2}{2}, \qquad v_1 = \frac{kt_1^2}{2} = \frac{a_1 t_1}{2},$$

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \int_0^t \frac{kt^2}{2}\,\mathrm{d}t = \frac{kt^3}{6}, \qquad s_1 = \frac{kt_1^3}{6} = \frac{a_1 t_1^2}{6}.$$

Ответ 1) $v_1 = 25$ м/с; 2) $s_1 = 83{,}3$ м.

1.23 Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1 = A_1t + B_1t^2 + C_1t^3$ и $x_2 = A_2t + B_2t^2 + C_2t^3$, где $B_1 = 4$ м/с², $C_1 = -3$ м/с³, $B_2 = -2$ м/с², $C_2 = 1$ м/с³. Определите момент времени, для которого ускорения этих точек будут равны.

Ответ $t = 0{,}5$ с.

1.24 Кинематические уравнения движения двух материальных точек имеют вид $x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$ и $x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$, где $B_1 = B_2$, $C_1 = -2$ м/с², $C_2 = 1$ м/с². Определите: 1) момент времени, для которого скорости этих точек будут равны; 2) ускорения a_1 и a_2 для этого момента.

Дано

$x_1 = A_1 + B_1t + C_1t^2$

$x_2 = A_2 + B_2t + C_2t^2$

$B_1 = B_2$

$C_1 = -2$ м/с²

$C_2 = 1$ м/с²

1) $t|_{v_1=v_2}$ — ?

2) a_1 — ?

3) a_2 — ?

Решение

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = B_1 + 2C_1t\,,$$

$$v_2 = \frac{dx_2}{dt} = B_2 + 2C_2t\,,$$

$$v_1 = v_2\,, \qquad B_1 = B_2\,,$$

$$B_1 + 2C_1t = B_2 + 2C_2t\,,$$

$$t = \frac{B_1 - B_2}{2(C_2 - C_1)} = 0\,,$$

$$a_1 = \frac{dv_1}{dt} = 2C_1\,, \qquad a_2 = \frac{dv_2}{dt} = 2C_2\,.$$

Ответ 1) $t = 0$; 2) $a_1 = -4$ м/с², 3) $a_2 = 2$ м/с².

1.25 Нормальное ускорение точки, движущейся по окружности радиусом $r = 4$ м, задается уравнением $a_n = A + Bt + Ct^2$ ($A = 1$ м/с^2, $B = 6$ м/с^3, $C = 9$ м/с^4). Определите: 1) тангенциальное ускорение точки; 2) путь, пройденный точкой за время $t_1 = 5$ с после начала движения; 3) полное ускорение для момента времени $t_2 = 1$ с.

Дано

$r = 4$ м

$a_n = A + Bt + Ct^2$

$A = 1$ м/с^2

$B = 6$ м/с^3

$C = 9$ м/с^4

$t_1 = 5$ с

$t_2 = 1$ с

1) a_τ — ?

2) s_1 — ?

3) a_2 — ?

Решение

$$a_n = A + Bt + Ct^2, \qquad a_n = \frac{v^2}{r},$$

$$v = \sqrt{r(A + Bt + Ct^2)} = \sqrt{4(1 + 6t + 9t^2)} =$$

$$= 2(1 + 3t) = 2 + 6t, \qquad a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(2 + 6t),$$

$$s_1 = \int_0^{t_1} v\, dt = \int_0^{t_1} (2 + 6t)\, dt = 2t_1 + 3t_1^2,$$

$$a_{\tau 2} = a_\tau, \qquad a_{n2} = \frac{v_2^2}{r} = \frac{(2 + 6t_2)^2}{r},$$

$$a_2 = \sqrt{a_{\tau 2}^2 + a_{n2}^2} = \sqrt{a_{\tau 2}^2 + \frac{(2 + 6t_2)^4}{r^2}}.$$

Ответ 1) $a_\tau = 6$ м/с^2; 2) $s_1 = 85$ м; 3) $a_2 = 17{,}1$ м/с^2.

1.26 Зависимость пройденного телом пути s от времени t выражается уравнением $s = At - Bt^2 + Ct^3$ ($A = 2$ м/с, $B = 3$ м/с^2, $C = 4$ м/с^3). Запишите выражения для скорости и ускорения. Определите для момента времени $t = 2$ с после начала движения: 1) пройденный путь; 2) скорость; 3) ускорение.

Ответ 1) $s = 24$ м; 2) $v = 38$ м/с; 3) $a = 42$ м/с^2.

1.27 Зависимость пройденного телом пути по окружности радиусом $r = 3$ м задается уравнением $s = At^2 + Bt$ ($A = 0{,}4$ м/с², $B = 0{,}1$ м/с). Определите для момента времени $t = 1$ с после начала движения ускорение: 1) нормальное; 2) тангенциальное; 3) полное.

Ответ 1) $a_n = 0{,}27$ м/с²; 2) $a_\tau = 0{,}8$ м/с²;
3) $a = 0{,}84$ м/с².

1.28 Точка движется в плоскости xy из положения с координатами $x_1 = y_1 = 0$ со скоростью $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$ (a, b — постоянные, $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ — орты осей x и y). Определите: 1) уравнение траектории точки $y(x)$; 2) форму траектории.

Дано	*Решение*
$x_1 = y_1 = 0$ $\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$	$\mathbf{v} = a\mathbf{i} + bx\mathbf{j}$,
$y(x)$ — ?	

$$v_x = a, \qquad v_y = bx,$$

$$\mathrm{d}x = v_x\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = v_y\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}x = a\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = bx\,\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}y = \frac{bx}{a}\,\mathrm{d}x,$$

$$y = \int_0^x \frac{bx}{a}\,\mathrm{d}x = \frac{b}{a}\int_0^x x\,\mathrm{d}x = \frac{b}{2a}x^2.$$

Ответ 1) $y = \frac{b}{2a}x^2$; 2) парабола.

1.29 Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$, где **i, j** — орты осей x и y. Определите для момента времени $t = 1$ с: 1) модуль скорости; 2) модуль ускорения.

Дано

$\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$

$t = 1$ с

1) v — ?

2) a — ?

Решение

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}) = 3t^2\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 6t\mathbf{i} + 6\mathbf{j}, \qquad v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$v_x = 3t^2, \qquad v_y = 6t,$$

$$v = \sqrt{(3t^2)^2 + (6t)^2}, \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2},$$

$$a_x = 6t, \qquad a_y = 6, \qquad a = \sqrt{(6t)^2 + 6^2}.$$

Ответ 1) $v = 6{,}7$ м/с; 2) $a = 8{,}48$ м/с².

1.30 Радиус-вектор материальной точки изменяется со временем по закону $\mathbf{r} = 4t^2\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Определите: 1) скорость $\mathbf{v}$; 2) ускорение **a**; 3) модуль скорости в момент времени $t = 2$ с.

Дано

$\mathbf{r} = 4t^2\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$t = 2$ с

1) **v** — ?

2) **a** — ?

3) v_1 — ?

Решение

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = 8t\mathbf{i} + 3\mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = 8\mathbf{i},$$

$$v_1 = \sqrt{(8t)^2 + 3^2}.$$

Ответ 1) $\mathbf{v} = 8t\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$; 2) $\mathbf{a} = 8\mathbf{i}$; 3) $v_1 = 16{,}3$ м/с.

1.3[illegible] Движение материальной точки в плоскости *xy* описывается законом $x = At$, $y = At(1 + Bt)$, где A и B — положительные постоянные. Определите: 1) уравнение траектории материальной точки $y(x)$; 2) радиус вектор **r** точки в зависимости от времени; 3) скорость v точки в зависимост от времени; 4) ускорение a точки в зависимости от времени.

Дано	*Решение*
$x = At$ $y = At(1 + Bt)$ 1) $y(x)$ — ? 2) $\mathbf{r}(t)$ — ? 3) $v(t)$ — ? 4) $a(t)$ — ?	$x = At, \qquad t = \frac{x}{A},$ $y = At(1+Bt) = A\frac{x}{A}\left(1 + B\frac{x}{A}\right) = x + \frac{B}{A}x^2,$ $y = x + \frac{Bx^2}{A},$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = At\,\mathbf{i} + At(1+Bt)\,\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = A\mathbf{i} + (A + 2ABt)\mathbf{j}, \qquad v = \sqrt{A^2 + (A+2ABt)^2} = A\sqrt{1 + (1+2Bt)^2},$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = 2AB\mathbf{j}, \qquad a = 2AB = \mathrm{const}.$$

Ответ 1) $y = x + \frac{Bx^2}{A}$; 2) $\mathbf{r} = At\,\mathbf{i} + At(1+Bt)\,\mathbf{j}$;

3) $v = A\sqrt{1 + (1+2Bt)^2}$; 4) $a = 2AB = \mathrm{const}$.

Некоторые математические формулы

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

Материальная точка начинает двигаться по окружности радиусом $r = 12{,}5$ см с постоянным тангенциальным ускорением $a_\tau = 0{,}5$ см/с². Определите: 1) момент времени, при котором вектор ускорения **a** образует с вектором скорости **v** угол $\alpha = 45°$; 2) путь, пройденный за это время движущейся точкой.

Дано

$r = 12{,}5$ см $= 0{,}125$ м

$a_\tau = 0{,}5$ см/с$^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м/с^2

$\alpha = 45°$

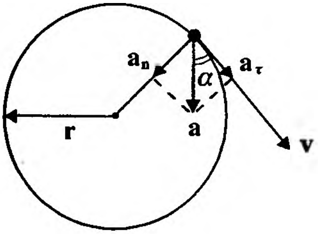
1) t — ?
2) s — ?

Решение

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_n}{a_\tau}, \qquad a_n = \frac{v^2}{r},$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \text{const},$$

$$v = \int_0^t a_\tau\, dt = a_\tau t,$$



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v^2}{r a_\tau} = \frac{a_\tau^2 t^2}{r a_\tau} = \frac{a_\tau t^2}{r}, \qquad t = \sqrt{\frac{r \operatorname{tg}\alpha}{a_\tau}},$$

$$s = \int_0^t v\, dt = \int_0^t a_\tau t\, dt = \frac{a_\tau t^2}{2}.$$

Ответ 1) $t = 5$ с; 2) $s = 6{,}25$ см.

Линейная скорость v_1 точки, находящейся на ободе вращающегося диска, в три раза больше, чем линейная скорость v_2 точки, находящейся на 6 см ближе к его оси. Определите радиус диска.

Ответ $R = 9$ см.

Колесо вращается с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 3$ рад/с². Определите радиус колеса, если через $t = 1$ с после начала движения полное ускорение колеса $a = 7{,}5$ м/с².

Дано

$\varepsilon = 3$ рад/с²
$t = 1$ с
$a = 7{,}5$ м/с²

R — ?

Решение

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \qquad a_\tau = \varepsilon R,$$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \varepsilon^2 t^2 R,$$

$$a^2 = \varepsilon^2 R^2 + \varepsilon^4 t^4 R^2 = \varepsilon^2 R^2 (1 + \varepsilon^2 t^4),$$

$$R = \frac{a}{\varepsilon\sqrt{1 + \varepsilon^2 t^4}}.$$

Ответ $R = 79$ см.

Якорь электродвигателя, имеющий частоту вращения $n = 50$ с⁻¹, после выключения тока, сделав $N = 628$ оборотов, остановился. Определите угловое ускорение ε якоря.

Дано

$n = 50$ с^{-1}
$N = 628$

ε — ?

Решение

$$\varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad \varphi = 2\pi N,$$

$$\omega_0 = 2\pi n, \qquad 2\pi N = 2\pi n t - \frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega = \omega_0 - \varepsilon t, \qquad 0 = 2\pi n - \varepsilon t,$$

$$t = \frac{2\pi n}{\varepsilon}, \qquad 2\pi N = 2\pi n \cdot \frac{2\pi n}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon \cdot 4\pi^2 n^2}{2\varepsilon^2} = \frac{2\pi^2 n^2}{\varepsilon}, \qquad \varepsilon = \frac{\pi n^2}{N}.$$

Ответ $\varepsilon = 12{,}5$ рад/с².

1.36 Колесо автомашины вращается равнозамедленно. За время $t=2$ мин оно изменило частоту вращения от 240 до 60 мин^{-1}. Определите: 1) угловое ускорение колеса; 2) число полных оборотов, сделанных колесом за это время.

Дано

$t=2\ \text{мин}=120\ \text{с}$

$n_1=240\ \text{мин}^{-1}=4\ \text{с}^{-1}$

$n_2=60\ \text{мин}^{-1}=1\ \text{с}^{-1}$

1) ε — ?

2) N — ?

Решение

$\omega_2=\omega_1-\varepsilon t$, $\quad\omega_2=2\pi n_2$, $\quad\omega_1=2\pi n_1$,

$2\pi n_2=2\pi n_1-\varepsilon t$, $\quad\varepsilon=\dfrac{2\pi(n_1-n_2)}{t}$,

$2\pi N=2\pi n_1 t-\dfrac{\varepsilon t^2}{2}$, $\quad 2\pi N=2\pi n_1 t-\pi(n_1-n_2)t$,

$$N=n_1 t-\frac{(n_1-n_2)t}{2}.$$

Ответ 1) $\varepsilon=0{,}157\ \text{рад/с}^2$; 2) $N=300$.

1.37 Точка движется по окружности радиусом $R=15$ см с постоянным тангенциальным ускорением a_τ. К концу четвертого оборота после начала движения линейная скорость точки $v_1=15$ см/с. Определите нормальное ускорение a_{n2} точки через $t_2=16$ с после начала движения.

Дано

$R=15\ \text{см}=0{,}15\ \text{м}$

$a_\tau=\text{const}$

$N_1=4$

$v_1=15\ \text{см/с}=0{,}15\ \text{м/с}$

$t_2=16\ \text{с}$

a_{n2} — ?

Решение

$a_n=\omega^2R=(\varepsilon t)^2R$, $\quad a_\tau=\dfrac{v_1}{t_1}=\varepsilon R=\text{const}$, $\quad t_1=\dfrac{v_1}{\varepsilon R}$,

$2\pi N_1=\dfrac{\varepsilon t_1^2}{2}$, $\quad\varepsilon=\dfrac{v_1^2}{4\pi N_1R^2}$, $\quad a_n=\left(\dfrac{v_1^2}{4\pi N_1R^2}t\right)^2R$,

$$a_{n2}=\left(\frac{v_1^2}{4\pi N_1R^2}t_2\right)^2R=\frac{v_1^4t_2^2}{16\pi^2N_1^2R^3}.$$

Ответ $a_{n2}=1{,}5\ \text{см/с}^2$.

1.38 Диск радиусом $R = 10$ см вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3$ ($B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с², $D = 1$ рад/с³). Определите для точек на ободе диска к концу второй секунды после начала движения: 1) тангенциальное ускорение a_τ; 2) нормальное ускорение a_n; 3) полное ускорение a.

Ответ 1) $a_\tau = 1{,}4$ м/с²; 2) $a_n = 28{,}9$ м/с²; 3) $a = 28{,}9$ м/с².

1.39 Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ ($A = 0{,}5$ рад/с²). Определите к концу второй секунды после начала движения: 1) угловую скорость диска; 2) угловое ускорение диска; 3) для точки, находящейся на расстоянии 80 см от оси вращения, тангенциальное a_τ, нормальное a_n и полное a ускорения.

Дано

$\varphi = At^2$

$A = 0{,}5$ рад/с²

$t = 2$ с

$r = 80$ см $= 0{,}8$ м

1) ω — ?

2) ε — ?

3) a_τ — ?

a_n — ?

a — ?

Решение

$$\varphi = At^2, \qquad \omega = \frac{d\varphi}{dt} = 2At,$$

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = 2A = \text{const},$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \qquad v = \omega r,$$

$$a_\tau = 2Ar, \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = 4A^2rt^2,$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Ответ 1) $\omega = 2$ рад/с; 2) $\varepsilon = 1$ рад/с²;
3) $a_\tau = 0{,}8$ м/с²; $a_n = 3{,}2$ м/с²; $a = 3{,}3$ м/с².

1.40 Диск вращается вокруг неподвижной оси так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = At^2$ ($A = 0{,}1$ рад/с²). Определите полное ускорение a точки на ободе диска к концу второй секунды после начала движения, если линейная скорость этой точки в этот момент равна 0,4 м/с.

Дано	Решение
$\varphi = At^2$ $A = 0{,}1$ рад/с² $t_1 = 2$ с $v_1 = 0{,}4$ м/с ——— a_1 — ?	$\varphi = At^2$, $\omega = 2At$, $\varepsilon = 2A$, $v_1 = \omega R = 2At_1R$, $R = \dfrac{v_1}{2At}$, $a_{n1} = \dfrac{v_1^2}{R} = \dfrac{v_1^2 \cdot 2At_1}{v_1} = 2Av_1t_1$, $a_{\tau 1} = \varepsilon R = 2AR = \dfrac{v_1}{t_1}$, $a_1 = \sqrt{(2Av_1t_1)^2 + \left(\dfrac{v_1}{t_1}\right)^2}$.

Ответ $a_1 = 0{,}256$ м/с².

1.41 Диск радиусом $R = 10$ см вращается так, что зависимость линейной скорости точек, лежащих на ободе диска, от времени задается уравнением $v = At + Bt^2$ ($A = 0{,}3$ м/с², $B = 0{,}1$ м/с³). Определите угол α, который образует вектор полного ускорения **a** с радиусом колеса через 2 с от начала движения.

Дано	Решение
$R = 10$ см $= 0{,}1$ м $v = At + Bt^2$ $A = 0{,}3$ м/с² $B = 0{,}1$ м/с³ $t = 2$ с ——— α — ?	$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{a_\tau}{a_n}$, $a_\tau = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A + 2Bt$, $a_n = \dfrac{v^2}{R} = \dfrac{(At + Bt^2)^2}{R}$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{(A+2Bt)R}{(At + Bt^2)^2}$.

Ответ $\alpha = 4°$.

1.42 Диск радиусом $R = 10$ см вращается так, что зависимость угла поворота радиуса диска от времени задается уравнением $\varphi = A + Bt^3$ ($A = 2$ рад, $B = 4$ рад/с^3). Определите для точек на ободе колеса: 1) нормальное ускорение a_n в момент времени $t = 2$ с; 2) тангенциальное ускорение для этого же момента; 3) угол поворота φ, при котором полное ускорение составляет с радиусом колеса угол $\alpha = 45°$.

Дано

$R = 10$ см $= 0{,}1$ м

$\varphi = A + Bt^3$

$A = 2$ рад

$B = 4$ рад/с^3

$t = 2$ с

$\alpha = 45°$

1) a_n — ?

2) a_τ — ?

3) φ — ?

Решение

$$\varphi = A + Bt^3, \qquad \omega = 3Bt^2,$$

$$\varepsilon = 6Bt, \qquad a_n = \omega^2 R = (3Bt^2)^2 R,$$

$$a_\tau = \varepsilon R = 6BtR, \qquad \operatorname{tg}\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a_\tau}{a_n}, \qquad a_\tau = a_n,$$

$$(3Bt^2)^2 R = 6BtR, \qquad 9B^2t^4R = 6BtR,$$

$$t^3 = \frac{2}{3B}, \qquad \varphi = A + B \cdot \frac{2}{3B} = A + \frac{2}{3}.$$

Ответ 1) $a_n = 230$ м/с^2; 2) $a_\tau = 4{,}8$ м/с^2; 3) $\varphi = 2{,}67$ рад.

● ●

Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})
Г — гига (10^9)
М — мега (10^6)
к — кило (10^3)

д — деци (10^{-1})
с — санти (10^{-2})
м — милли (10^{-3})
мк — микро (10^{-6})

н — нано (10^{-9})
п — пико (10^{-12})
ф — фемто (10^{-15})
а — атто (10^{-18})

1.2. Динамика материальной точки и поступательного движения твердого тела

1.43 Тело массой $m = 2$ кг движется прямолинейно по закону $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ ($C = 2$ м/с^2, $D = 0{,}4$ м/с^3). Определите силу, действующую на тело в конце первой секунды движения.

Дано	*Решение*
$m = 2$ кг $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ $C = 2$ м/с^2 $D = 0{,}4$ м/с^3 $t = 1$ с F — ?	$F = ma = m\dfrac{dv}{dt}$, $v = \dfrac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$, $a = \dfrac{dv}{dt} = 2C - 6Dt$, $F = m(2C - 6Dt)$.

Ответ $F = 3{,}2$ Н.

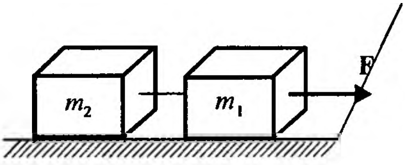
1.44 Тело массой m движется так, что зависимость пройденного пути от времени описывается уравнением $s = A\cos\omega t$, где A и ω — постоянные. Запишите закон изменения силы от времени.

Ответ $F = -mA\omega^2 \cos\omega t$.

1.45 К нити подвешен груз массой $m = 500$ г. Определите силу натяжения нити, если нить с грузом: 1) поднимать с ускорением 2 м/с^2; 2) опускать с ускорением 2 м/с^2.

Ответ 1) $T = 5{,}9$ Н; 2) $T = 3{,}9$ Н.

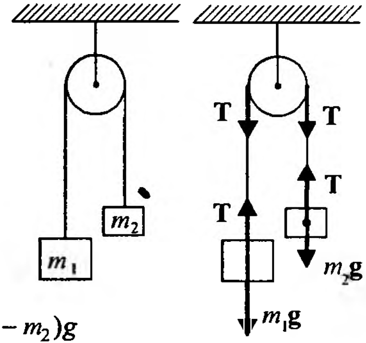
1.46 Два груза ($m_1 = 500$ г и $m_2 = 700$ г) связаны невесомой нитью и лежат на гладкой горизонтальной поверхности. К грузу m_1 приложена горизонтально направленная сила $F = 6$ Н. Пренебрегая трением, определите: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити.



Ответ 1) $a = 5$ м/с^2; 2) $T = 3{,}5$ Н.

1.47 Простейшая машина Атвуда, применяемая для изучения законов равноускоренного движения, представляет собой два груза с не равными массами m_1 и m_2 (например $m_1 > m_2$), которые подвешены на легкой нити, перекинутой через неподвижный блок. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определите: 1) ускорение грузов; 2) силу натяжения нити T; 3) силу F, действующую на ось блока.

Дано	***Решение***
m_1	$T_1 = T_2 = T$,
m_2	
$m_1 > m_2$	$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T, \\ m_2 a = T - m_2 g \end{cases}$.
1) a — ?	
2) T — ?	
3) F — ?	$T = m_1 g - m_1 a$,



$$m_1 a + m_2 a = m_1 g - m_1 a - m_2 g, \qquad a = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2},$$

$$T = m_1 g - m_1 \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = \frac{2 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}, \qquad F = 2T.$$

Ответ 1) $a = \dfrac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2}$; 2) $T = \dfrac{2 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$; 3) $F = \dfrac{4 m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$.

1.48 На рисунке изображена система блоков. к которым подвешены грузы массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 500$ г. Считая, что груз m_1 поднимается, а подвижный блок с m_2 опускается, нить и блоки невесомы, силы трения отсутствуют, определите: 1) силу натяжения нити T; 2) ускорения, с которыми движутся грузы.

Дано

$m_1 = 200$ г $= 0{,}2$ кг

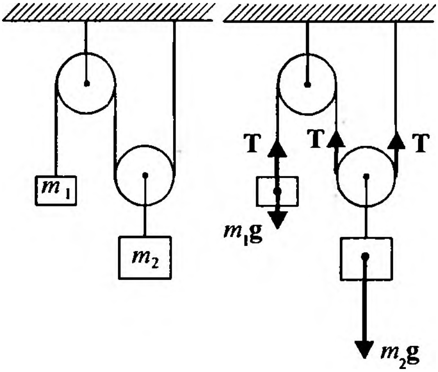
$m_2 = 500$ г $= 0{,}5$ кг

1) T — ?

2) a_1 — ?

a_2 — ?

Решение



$h_1 = 2h_2$, $\qquad a \sim h$,

$$\begin{cases} a_1 = 2a_2\ , \\ m_1a_1 = T - m_1g\ , \\ m_2a_2 = m_2g - 2T\ ; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2m_1a_2 = T - m_1g\ , \\ m_2a_2 = m_2g - 2T\ ; \end{cases} \qquad \frac{m_2}{2m_1} = \frac{m_2g - 2T}{T - m_1g},$$

$$m_2T - m_1m_2g = 2m_1m_2g - 4m_1T\ ,$$

$$m_2T + 4m_1T = 2m_1m_2g + m_1m_2g\ ,$$

$$T(m_2 + 4m_1) = 3m_1m_2g\ ,$$

$$T = \frac{3m_1m_2g}{m_2 + 4m_1},$$

$$a_1 = \frac{T - m_1g}{m_1} = \frac{2(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1}, \qquad a_2 = \frac{m_2g - 2T}{m_2} = \frac{(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1}.$$

Ответ 1) $T = 2{,}26$ Н; 2) $a_1 = 1{,}5$ м/с²; $a_2 = 0{,}75$ м/с².

1.49

В установке (см. рис.) угол α наклонной плоскости с горизонтом равен 20°, массы тел $m_1 = 200$ г и $m_2 = 150$ г. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите ускорение, с которым будут двигаться тела, если тело m_2 опускается.

Дано

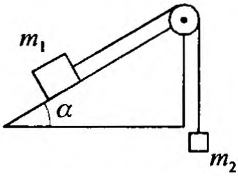
$\alpha = 20°$

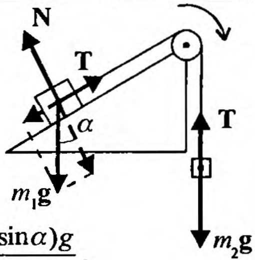
$m_1 = 200$ г $= 0{,}2$ кг

$m_2 = 150$ г $= 0{,}15$ кг

a — ?

Решение





$$\begin{cases} m_1 a = T - m_1 g \sin\alpha, \\ m_2 a = m_2 g - T \end{cases} \qquad a = \frac{m_2 g - m_1 g \sin\alpha}{m_1 + m_2} = \frac{(m_2 - m_1 \sin\alpha) g}{m_1 + m_2}.$$

Ответ $a = 2{,}29$ м/с².

1.50

Тело A массой $M = 2$ кг находится на горизонтальном столе и соединено нитями посредством блоков с телами B ($m_1 = 0{,}5$ кг) и C ($m_2 = 0{,}3$ кг). Считая нити и блоки невесомыми и пренебрегая силами трения, определить: 1) ускорение, с которым будут двигаться эти тела; 2) разность сил натяжения нитей.

Дано

$M = 2$ кг

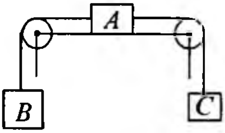
$m_1 = 0{,}5$ кг

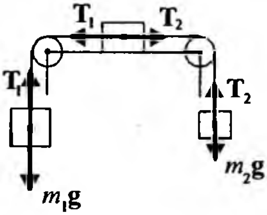
$m_2 = 0{,}3$ кг

1) a — ?

2) $(T_1 - T_2)$ — ?

Решение



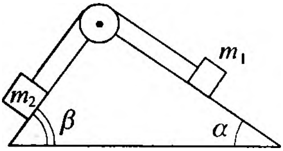


$a = \dfrac{(m_1 - m_2) g}{M + m_1 + m_2}$, $\quad m_1 a = m_1 g - T_1$, $\quad T_1 = m_1(g - a)$,

$m_2 a = T_2 - m_2 g$, $\quad T_2 = m_2(a + g)$, $\quad T_1 - T_2 = m_1(g - a) - m_2(g + a)$.

Ответ 1) $a = 0{,}7$ м/с²; 2) $T_1 - T_2 = 1{,}4$ Н.

1.51 В установке углы α и β наклонных плоскостей с горизонтом соответственно равны 30 и 45°, массы тел $m_1 = 0{,}45$ кг и $m_2 = 0{,}5$ кг. Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая силами трения, определите: 1) ускорение, с которым движутся тела; 2) силу натяжения нити.



Ответ 1) $a = 1{,}33$ м/с^2; 2) $T = 2{,}8$ Н.

1.52 Тело массой m движется в плоскости xy по закону $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, где A, B и ω — некоторые постоянные. Определите модуль силы, действующей на это тело.

Дано

m

$x = A\cos\omega t$

$y = B\sin\omega t$

$A = \text{const}$

$B = \text{const}$

$\omega = \text{const}$

F — ?

Решение

$$F = ma, \qquad \mathbf{r} = A\cos\omega t\cdot\mathbf{i} + B\sin\omega t\cdot\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\omega t\cdot\mathbf{i} + B\omega\cos\omega t\cdot\mathbf{j},$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos\omega t\cdot\mathbf{i} - B\omega^2\sin\omega t\cdot\mathbf{j},$$

$$a = \sqrt{(-A\omega^2\cos\omega t)^2 + (-B\omega^2\sin\omega t)^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2},$$

$$F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Ответ $F = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$.

• •

Некоторые математические формулы

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

1.53 Частица массой m движется под действием силы $\mathbf{F}=\mathbf{F}_0\cos\omega t$, где $\mathbf{F}_0$ и ω — некоторые постоянные. Определите положение частицы, т. е. выразите ее радиус-вектор $\mathbf{r}$ как функцию времени, если в начальный момент времени $t=0$, $\mathbf{r}(0)=0$ и $\mathbf{v}(0)=0$.

Дано

m

$\mathbf{F}=\mathbf{F}_0\cos\omega t$

$t=0$

$\mathbf{r}(0)=0$

$\mathbf{v}(0)=0$

$\mathbf{r}(t)$ — ?

Решение

$$\mathbf{F}=\mathbf{F}_0\cos\omega t, \qquad \mathbf{F}=m\mathbf{a}=m\frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}_0\cos\omega t, \qquad d\mathbf{v}=\frac{\mathbf{F}_0}{m}\cos\omega t\,dt,$$

$$\mathbf{v}(t)-\mathbf{v}(0)=\frac{\mathbf{F}_0}{m}\int_0^t\cos\omega t\,dt=\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega}\sin\omega t\Big|_0^t=\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega}\sin\omega t,$$

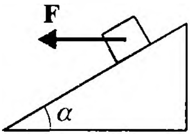
$$\mathbf{v}(0)=0, \qquad \mathbf{v}(t)=\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega}\sin\omega t, \qquad d\mathbf{r}=\mathbf{v}(t)\,dt,$$

$$\mathbf{r}(t)-\mathbf{r}(0)=\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega}\int_0^t\sin\omega t\,dt=-\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega^2}\cos\omega t\Big|_0^t=-\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega^2}(\cos\omega t-1)=$$

$$=\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t), \qquad \mathbf{r}(0)=0, \qquad \mathbf{r}(t)=\frac{\mathbf{F}_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t).$$

Ответ $\mathbf{r}(t)=\dfrac{\mathbf{F}_0}{m\omega^2}(1-\cos\omega t)$.

1.54 На тело массой $m=10$ кг, лежащее на наклонной плоскости (угол α равен 20°), действует горизонтально направленная сила $F=8$ Н. Пренебрегая трением, определите: 1) ускорение тела; 2) силу, с которой тело давит на плоскость.



Ответ 1) $a=4{,}11$ м/с^2; 2) $N=89{,}4$ Н.

1.55 Тело массой $m = 2$ кг падает вертикально с ускорением $a = 5$ м/с^2. Определите силу сопротивления при движении этого тела.

Ответ $F_{\text{сопр}} = 9{,}62$ Н.

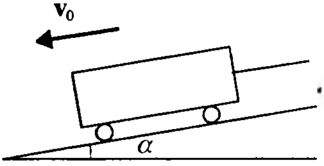
1.56 С вершины клина, длина которого $l = 2$ м и высота $h = 1$ м, начинает скользить небольшое тело. Коэффициент трения между телом и клином $f = 0{,}15$. Определите: 1) ускорение, с которым движется тело; 2) время прохождения тела вдоль клина; 3) скорость тела у основания клина.

Ответ 1) $a = 3{,}63$ м/с^2; 2) $t = 1{,}05$ с;
3) $v = 3{,}81$ м/с.

1.57 По наклонной плоскости с углом α наклона к горизонту, равным 30°, скользит тело. Определите скорость тела в конце второй секунды от начала скольжения, если коэффициент трения $f = 0{,}15$.

Ответ $v = 7{,}26$ м/с.

1.58 Вагон массой $m = 1$ т спускается по канатной железной дороге с уклоном $\alpha = 15°$ к горизонту. Принимая коэффициент трения $f = 0{,}05$, определите силу натяжения каната при торможении вагона в конце спуска, если скорость вагона перед торможением $v_0 = 2{,}5$ м/с, а время торможения $t = 6$ с.



Ответ $T = 2{,}48$ кН.

1.59 Грузы одинаковой массы ($m_1 = m_2 = 0{,}5$ кг) соединены нитью и перекинуты через невесомый блок, укрепленный на конце стола. Коэффициент трения груза m_2 о стол $f = 0{,}15$. Пренебрегая трением в блоке, определите: 1) ускорение, с которым движутся грузы; 2) силу натяжения нити.

Дано

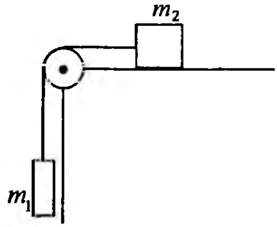
$m_1 = m_2 = 0{,}5$ кг

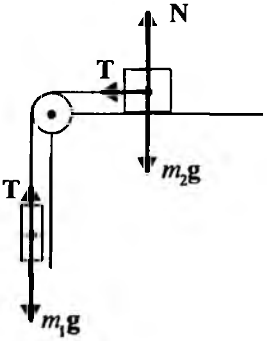
$f = 0{,}15$

1) a — ?

2) T — ?

Решение





$$\begin{cases} m_1 a = m_1 g - T, \\ m_2 a = T - f m_2 g; \end{cases} \qquad m_1 a + m_2 a = m_1 g - f m_2 g,$$

$$a = \frac{(m_1 - f m_2)g}{m_1 + m_2},$$

$$T = m_1(g - a) = m_1\left(g - \frac{(m_1 - f m_2)g}{m_1 + m_2}\right) = \frac{m_1 m_2 (1 + f)g}{m_1 + m_2}.$$

Ответ 1) $a = 4{,}17$ м/с^2; 2) $T = 2{,}82$ Н.

Некоторые математические формулы

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

1.60

Система грузов массами $m_1 = 0{,}5$ кг и $m_2 = 0{,}6$ кг находится в лифте, движущемся вверх с ускорением $a = 4{,}9$ м/с^2. Определите силу натяжения нити, если коэффициент трения между грузом массы m_1 и опорой $f = 0{,}1$.

Дано

$m_1 = 0{,}5$ кг

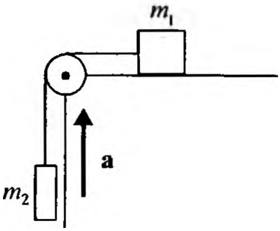
$m_2 = 0{,}6$ кг

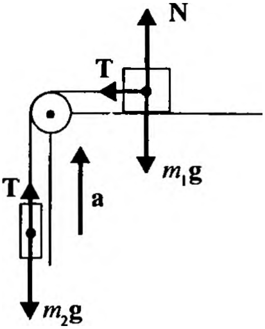
$a = 4{,}9$ м/с^2

$f = 0{,}1$

T — ?

Решение





$$\begin{cases} m_1 a = N - m_1 g, \\ m_2(a' - a) = m_2 g - T, \\ m_1 a' = T - fN \end{cases}$$

(a' — ускорение грузов относительно стола),

$N = m_1 a + m_1 g$,

$m_1 a' = T - f(m_1 a + m_1 g)$, $\qquad a' = \dfrac{T}{m_1} - f(a + g)$,

$$m_2\left(\frac{T}{m_1} - f(a + g) - a\right) = m_2 g - T ,$$

$m_2 T - m_1 m_2 f a - m_1 m_2 f g - m_1 m_2 a = m_1 m_2 g - m_1 T$,

$T(m_1 + m_2) = m_1 m_2 (fa + fg + a + g)$,

$$T = \frac{m_1 m_2 (1 + f)(a + g)}{m_1 + m_2} .$$

Ответ $T = 4{,}41$ Н.

1.61 На гладкой горизонтальной поверхности находится доска массой m_2, на которой лежит брусок массой m_1. Коэффициент трения бруска о поверхность доски равен f. К доске приложена горизонтальная сила F, зависящая от времени по закону $F = At$, где A — некоторая постоянная. Определите: 1) момент времени t_0, когда доска начнет выскальзывать из-под бруска; 2) ускорения бруска a_1 и доски a_2 в процессе движения.

Дано

m_1

m_2

f

$F = At$

$A = \text{const}$

1) t_0 — ?

2) a_1 — ?

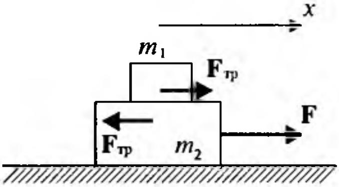
a_2 — ?

Решение

$m_1 a_1 = F_{\text{тр}}$,

$m_2 a_2 = F - F_{\text{тр}}$,

$F_{\text{тр.max}} = f m_1 g$,



$\boxed{a_2 \geqslant a_1}$ $\quad a_2 = \dfrac{At - F_{\text{тр.max}}}{m_2}$,

$a_1 = fg$, $\quad \dfrac{At - f m_1 g}{m_2} \geqslant fg$.

$\boxed{t = t_0}$ $\quad \dfrac{At_0 - f m_1 g}{m_2} = fg$, $\quad t_0 = \dfrac{(m_1 + m_2) fg}{A}$;

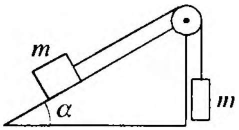
$\boxed{t \leqslant t_0}$ $\quad a_1 = a_2 = \dfrac{At}{m_1 + m_2}$;

$\boxed{t \geqslant t_0}$ $\quad a_1 = fg = \text{const}$, $\quad a_2 = \dfrac{At - f m_1 g}{m_2}$.

Ответ 1) $t_0 = \dfrac{(m_1 + m_2) fg}{A}$;

2) при $t \geqslant t_0$ $a_1 = fg = \text{const}$; $a_2 = \dfrac{At - f m_1 g}{m_2}$.

1.62 В установке угол α наклона плоскости с горизонтом равен 30° массы тел одинаковы ($m = 1$ кг). Считая нить и блок невесомыми и пренебрегая трением в оси блока, определите силу давления на ось, если коэффициент трения между наклонной плоскостью и лежащим на ней телом $f = 0,1$.



Ответ $F = mg(1 + f\cos\alpha + \sin\alpha)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 13,5$ Н.

1.63 На наклонную плоскость с углом наклона к горизонту $\alpha = 35°$ положена доска массой $m_2 = 2$ кг, а на доску — брусок массой $m_1 = 1$ кг. Коэффициент трения между бруском и доской $f_1 = 0,1$, а между доской и плоскостью $f_2 = 0,2$. Определите: 1) ускорение бруска; 2) ускорение доски; 3) коэффициент трения f_2', при котором доска не будет двигаться.

Ответ 1) $a_1 = g(\sin\alpha - f_1\cos\alpha) = 4,82$ м/с²;

2) $$a_2 = g\left(\sin\alpha + f_1\frac{m_1}{m_2}\cos\alpha - f_2\frac{(m_1 + m_2)}{m_2}\cos\alpha\right) = 3,62 \text{ м/с}^2;$$

3) $$f_2' \geqslant \frac{m_2\sin\alpha + f_1 m_1\cos\alpha}{(m_1 + m_2)\cos\alpha} \geqslant 0,5.$$

● ●

Некоторые внесистемные единицы

1 сут = 86400 с

1 год = 365,25 сут = $3,16 \cdot 10^7$ с

1° = $1,75 \cdot 10^{-2}$ рад

1′ = $2,91 \cdot 10^{-4}$ рад

1″ = $4,85 \cdot 10^{-6}$ рад

1 рад = 57,3°

1 мм рт. ст. = 133,3 Па

1 эВ = $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж

1.64 Снаряд массой $m = 5$ кг, вылетевший из орудия, в верхней точке траектории имеет скорость $v = 300$ м/с. В этой точке он разорвался на два осколка, причем больший осколок массой $m_1 = 3$ кг полетел в обратном направлении со скоростью $v_1 = 100$ м/с. Определите скорость v_2 второго, меньшего, осколка.

Дано	*Решение*
$m = 5$ кг	$m\mathbf{v} = m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2$,
$v = 300$ м/с	$mv = -m_1v_1 + m_2v_2$,
$m_1 = 3$ кг	$m_2 = m - m_1$,
$v_1 = 100$ м/с	
v_2 — ?	$v_2 = \dfrac{mv + m_1v_1}{m_2}$.

Ответ $v_2 = 900$ м/с.

1.65 Лодка массой $M = 150$ кг и длиной $l = 2{,}8$ м стоит неподвижно в стоячей воде. Рыбак массой $m = 90$ кг в лодке переходит с носа на корму. Пренебрегая сопротивлением воды, определите, на какое расстояние s при этом сдвинется лодка.

Ответ $s = 1{,}05$ м.

1.66 Снаряд, вылетевший из орудия со скоростью v_0, разрывается на два одинаковых осколка в верхней точке траектории на расстоянии l (по горизонтали). Один из осколков полетел в обратном направлении со скоростью движения снаряда до разрыва. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на каком расстоянии (по горизонтали) от орудия упадет второй осколок.

Ответ $s = 4l$.

1.67 Платформа с песком общей массой $M = 2$ т стоит на рельсах на горизонтальном участке пути. В песок попадает снаряд массой $m = 8$ кг и застревает в нем. Пренебрегая трением, определите, с какой скоростью будет двигаться платформа, если в момент попадания скорость снаряда $v = 450$ м/с, а ее направление — сверху вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту.

Ответ $v = 1{,}55$ м/с.

1.68 На железнодорожной платформе, движущейся по инерции со скоростью $v_0 = 3$ км/ч, укреплено орудие. Масса платформы с орудием $M = 10$ т. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы. Снаряд массой $m = 10$ кг вылетает из ствола под углом $\alpha = 60°$ к горизонту. Определите скорость v снаряда (относительно Земли), если после выстрела скорость платформы уменьшилась в $n = 2$ раза.

Дано

$v_0 = 3$ км/ч $= 0{,}833$ м/с

$M = 10$ т $= 10^4$ кг

$m = 10$ кг

$\alpha = 60°$

$v_1 = \dfrac{v_0}{n}$

$n = 2$

v — ?

Решение

$$(m + M)v_0 = mv\cos\alpha + \frac{Mv_0}{n}, \qquad n = 2,$$

$$mv\cos\alpha = mv_0 + Mv_0 - \frac{Mv_0}{2},$$

$$mv\cos\alpha = mv_0 + \frac{Mv_0}{2},$$

$$v = \frac{\left(m + \frac{1}{2}M\right)v_0}{m\cos\alpha}.$$

Ответ $v = 835$ м/с.

1.69 Две легкие тележки (массы соответственно m_1 и $m_2 = 2m_1$) соединены между собой сжатой, связанной нитью пружиной. Пережигая нить, пружина распрямляется и тележки разъезжаются в разные стороны. Считая коэффициент трения для обеих тележек одинаковым, определите: 1) v_1/v_2 — отношение скоростей движения тележек; 2) t_1/t_2 — отношение времени, в течение которого тележки движутся; 3) s_1/s_2 — отношение путей, пройденных тележками.

Дано

m_1

$m_2 = 2m_1$

f

1) v_1/v_2 — ?

2) t_1/t_2 — ?

3) s_1/s_2 — ?

Решение

$$m_1 v_1 = m_2 v_2,$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1},$$

$$F_{\text{тр}1} t_1 = m_1 v_1, \qquad F_{\text{тр}1} = f m_1 g,$$

$$F_{\text{тр}2} t_2 = m_2 v_2, \qquad F_{\text{тр}2} = f m_2 g,$$

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{m_1 v_1}{F_{\text{тр}1}} \frac{F_{\text{тр}2}}{m_2 v_2} = \frac{m_1 v_1 m_2}{m_1 m_2 v_2} = \frac{v_1}{v_2},$$

$$s_1 = \langle v_1 \rangle t_1 = \frac{v_1 t_1}{2}, \qquad s_2 = \langle v_2 \rangle t_2 = \frac{v_2 t_2}{2}, \qquad \frac{s_1}{s_2} = \frac{v_1 t_1}{v_2 t_2}.$$

Ответ 1) $v_1/v_2 = 2$; 2) $t_1/t_2 = 2$; 3) $s_1/s_2 = 4$.

1.70 Две одинаковые тележки массой M каждая движутся по инерции (без трения) друг за другом с одинаковой скоростью $\mathbf{v}_0$. В какой-то момент времени человек массой m, находящийся на задней тележке, прыгнул на переднюю тележку со скоростью $\mathbf{u}$ относительно своей тележки. Определите скорость $\mathbf{v}_1$ передней тележки.

Ответ

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_0 + \frac{mM}{(m+M)^2}\mathbf{u}.$$

1.71 Определите положение центра масс системы, состоящей из четырех шаров, массы которых равны соответственно m, $2m$, $3m$ и $4m$, в следующих случаях: а) шары расположены на одной прямой; б) шары расположены по вершинам квадрата; в) шары расположены по четырем смежным вершинам куба. Во всех случаях расстояние между соседними шарами равно 15 см. Направление координатных осей показано на рисунке.

Дано

m

$2m$

$3m$

$4m$

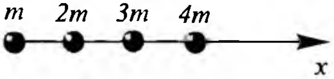
$a = 15$ см $= 0{,}15$ м

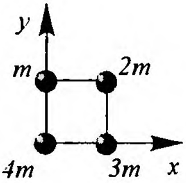
x_C — ?

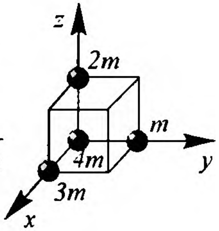
y_C — ?

z_C — ?

Решение







$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \qquad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}, \qquad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

Ответ

а) $x_C = 30$ см;

б) $x_C = 7{,}5$ см, $y_C = 4{,}5$ см;

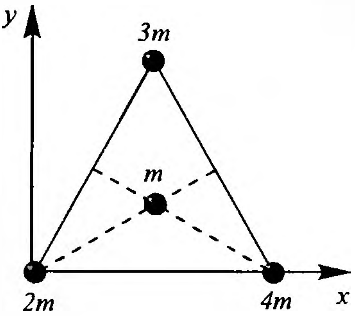
в) $x_C = 1{,}5$ см, $y_C = 4{,}5$ см, $z_C = 3$ см.

1.72 Определите положение центра масс половины круглого диска радиусом R, считая его однородным.

Ответ

$x_C = \dfrac{4R}{3\pi}$ от центра.

1.73 Определите координаты центра масс системы, состоящей из четырех шаров массами $2m$, $3m$, $4m$ и m, которые расположены в вершинах и в центре равностороннего треугольника со стороной $a = 20$ см. Направление координатных осей показано на рисунке.



Ответ $x_C = 12$ см; $y_C = 5{,}77$ см.

1.74 Нагруженная песком железнодорожная платформа с начальной массой m_0 начинает движение из состояния покоя под воздействием постоянной силы тяги $\mathbf{F}$. Через отверстие в дне платформы высыпается песок с постоянной скоростью μ (кг/с). Определите $\mathbf{v}(t)$, т. е. зависимость скорости платформы от времени.

Дано	Решение
m_0 $\mathbf{F}$ μ	$m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\text{р}$, $m = m_0 - \mu t$, $\mathbf{F}_\text{р} = 0$,
$\mathbf{v}(t)$ — ?	$\mathbf{a} = \dfrac{\mathbf{F}}{m_0 - \mu t}$, $\mathbf{a} = \dfrac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}$,

$$\mathbf{v}(0) = 0,$$

$$\mathbf{v}(t) = \int \mathbf{a}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathbf{F}}{m_0 - \mu t}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathbf{F}}{\mu} \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t}.$$

Ответ $\mathbf{v}(t) = \dfrac{\mathbf{F}}{\mu} \ln \dfrac{m_0}{m_0 - \mu t}$.

1.75 На катере массой $m = 4{,}5$ т находится водомет, выбрасывающий со скоростью $u = 6$ м/с относительно катера назад $\mu = 25$ кг/с воды. Пренебрегая сопротивлением движению катера, определите: 1) скорость катера через $t = 3$ мин после начала движения; 2) предельно возможную скорость катера.

Ответ 1) $v = 3{,}8$ м/с; 2) $v_{\max} = 6$ м/с.

1.76 Ракета, масса которой в начальный момент времени $M = 2$ кг, запущена вертикально вверх. Относительная скорость выхода продуктов сгорания $u = 150$ м/с, расход горючего $\mu = 0{,}2$ кг/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите ускорение a ракеты через $t = 3$ с после начала ее движения. Поле силы тяжести считать однородным.

Дано	Решение
$M = 2$ кг	$ma = F_р - mg$,
$u = 150$ м/с	$F_р = \mu u$,
$\mu = 0{,}2$ кг/с	$m = M - \mu t$,
$t = 3$ с $g = 9{,}81$ м/с^2	$a = \dfrac{F_р}{m} - g = \dfrac{\mu u}{M - \mu t} - g$.
a — ?	

Ответ $a = 11{,}6$ м/с^2.

● ●

Некоторые математические формулы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

1.77 Ракета, масса M которой в начальный момент времени равна 300 г, начинает выбрасывать продукты сгорания с относительной скоростью $u = 200$ м/с. Расход горючего $\mu = 100$ г/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определите: 1) за какой промежуток времени скорость ракеты станет равной $v_1 = 50$ м/с; 2) скорость v_2, которой достигнет ракета, если масса заряда $m_0 = 0{,}2$ кг.

Дано	*Решение*
$M = 300$ г $= 0{,}3$ кг $u = 200$ м/с $\mu = 100$ г/с $= 0{,}1$ кг/с $v_1 = 50$ м/с $m_0 = 0{,}2$ кг	$ma = F_р$, $\quad m = M - \mu t$, $F_р = \mu u$, $\quad a = \dfrac{dv}{dt}$, $(M - \mu t)\dfrac{dv}{dt} = \mu u$, $v(t) = \mu u \displaystyle\int_0^t \frac{dt}{M - \mu t} = u \ln \frac{M}{M - \mu t}$,
1) t_1 — ? 2) v_2 — ?	

$$v_1 = u \ln \frac{M}{M - \mu t_1}, \qquad \ln \frac{M}{M - \mu t_1} = \frac{v_1}{u}, \qquad \frac{M}{M - \mu t_1} = e^{v_1/u},$$

$$t_1 = \frac{M}{\mu}\left(1 - e^{-v_1/u}\right), \qquad v_2 = u \ln \frac{M}{M - m_0}.$$

Ответ 1) $t_1 = 0{,}66$ м/с; 2) $v_2 = 220$ м/с.

1.78 Ракета с начальной массой m_0, начиная движение из состояния покоя, к некоторому моменту времени t израсходовав топливо массой m, развивает скорость v. Пренебрегая сопротивлением воздуха и внешним силовым полем, определите зависимость v от m, если скорость истечения топлива относительно ракеты равна u.

Ответ $v = u \ln\left(m_0/(m_0 - m)\right)$.

1.79 Ракета поднимается с нулевой начальной скоростью вертикально вверх. Начальная масса ракеты m_0, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u. Пренебрегая сопротивлением воздуха, выразите скорость ракеты v в зависимости от m и t (m — масса ракеты; t — время ее подъема). Поле силы тяжести считайте однородным.

Ответ $v = u\ln(m_0/m) - gt$.

1.80 Ракета с начальной массой $m_0 = 1{,}5$ кг, начиная движение из состояния покоя вертикально вверх, выбрасывает непрерывную струю газов с постоянной относительно нее скоростью $u = 600$ м/с. Расход газа $\mu = 0{,}3$ кг/с. Определите, какую скорость приобретет ракета через 1 с после начала движения, если она движется: 1) при отсутствии внешних сил; 2) в однородном поле силы тяжести. Оцените относительную погрешность, сделанную для данных условий задачи при пренебрежении внешним силовым полем.

Дано

$m_0 = 1{,}5$ кг

$u = 600$ м/с

$\mu = 0{,}3$ кг/с

$t_1 = 1$ с

1) v_1 — ?

2) v_2 — ?

3) ε — ?

Решение

1) $m\mathbf{a} = \mathbf{F}_р + \mathbf{F}$, $m = m_0 - \mu t$, $\mathbf{a} = \dfrac{d\mathbf{v}}{dt}$, $F_р = \mu u$,

$$F = 0, \quad (m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu u, \quad dv = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}dt,$$

$$v(t) = \int \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}dt = u\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t};$$

2) $v_1 = u\ln\dfrac{m_0}{m_0 - \mu t_1}$. $F_р = \mu u$, $F = mg$,

$$(m_0 - \mu t)\frac{dv}{dt} = \mu u - (m_0 - \mu t)g, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{\mu u}{m_0 - \mu t}dt - g, \; v(t) = u\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt,$$

$$v_2 = u\ln\frac{m_0}{m_0 - \mu t_1} - gt_1; \qquad 3)\ \varepsilon = \frac{v_1 - v_2}{v_1} = \frac{gt_1}{u\ln\dfrac{m_0}{m_0 - \mu t_1}}.$$

Ответ 1) $v_1 = 134$ м/с; 2) $v_2 = 124$ м/с; 3) $\varepsilon = 7{,}3$ %.

1.3. Работа и энергия

1.81 Тело массой $m = 5$ кг поднимают с ускорением $a = 2$ м/с^2. Определите работу силы в течение первых пяти секунд.

Дано

$m = 5$ кг
$a = 2$ м/с^2
$t = 5$ с

A — ?

Решение

$$ma = F - mg\,, \qquad F = ma + mg = m(a+g)\,,$$

$$A = Fh\,, \qquad h = \frac{at^2}{2}\,, \qquad A = m(a+g)\frac{at^2}{2}\,.$$

Ответ $A = 1{,}48$ кДж.

1.82 Автомашина массой $m = 1{,}8$ т движется в гору, уклон которой составляет 3 м на каждые 100 м пути. Определите: 1) работу, совершаемую двигателем автомашины на пути 5 км, если коэффициент трения равен 0,1; 2) развиваемую двигателем мощность, если известно, что этот путь был преодолен за 5 мин.

Дано

$m = 1{,}8$ т $= 1{,}8 \cdot 10^3$ кг
$h = 3$ м
$l = 100$ м
$s = 5$ км $= 5 \cdot 10^3$ м
$f = 0{,}1$
$t = 5$ мин $= 300$ с

1) A — ?
2) P — ?

Решение

$$A = F_1 s + F_{\text{тр}} s\,, \qquad F_1 = mg\sin\alpha\,,$$

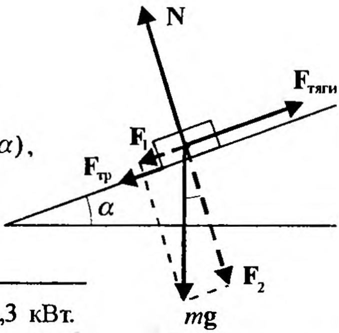
$$F_{\text{тр}} = fN = fmg\cos\alpha\,,$$

$$\sin\alpha = \frac{h}{l}\,,$$

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}\,,$$

$$A = mgs(\sin\alpha + f\cos\alpha)\,,$$

$$P = \frac{A}{t}\,.$$

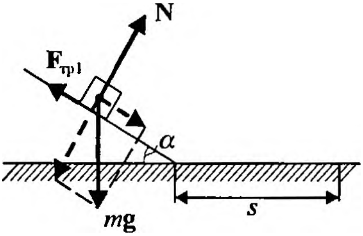


Ответ 1) $A = 11{,}5$ МДж; 2) $P = 38{,}3$ кВт.

1.83 Определите работу, совершаемую при подъеме груза массой $m = 50$ кг по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ к горизонту на расстояние $s = 4$ м, если время подъема $t = 2$ с, а коэффициент трения $f = 0{,}06$.

Ответ $A = 1{,}48$ кДж.

1.84 Тело скользит с наклонной плоскости высотой h и углом наклона α к горизонту и движется далее по горизонтальному участку. Принимая коэффициент трения на всем пути постоянным и равным f, определите расстояние s, пройденное телом на горизонтальном участке, до полной остановки.

Дано	Решение
h α f s — ?	

$$mgh = F_{тр1}l + F_{тр2}s,$$

$$F_{тр1} = fmg\cos\alpha, \qquad F_{тр2} = fmg,$$

$$l = \frac{h}{\sin\alpha},$$

$$mgh = f\,mg\cos\alpha\frac{h}{\sin\alpha} + f\,mgs,$$

$$s = \frac{h}{f}(1 - f\ \mathrm{ctg}\alpha).$$

Ответ $s = \dfrac{h}{f}(1 - f\ \mathrm{ctg}\alpha)$.

1.85

Насос мощностью N используют для откачки нефти с глубины h. Определите массу жидкости, поднятой за время t, если КПД насоса равен η.

Дано

N
h
t
η

m — ?

Решение

$$\eta = \frac{A_{\text{полезн}}}{A_{\text{затр}}} = \frac{mgh}{Nt},$$

$$m = \frac{\eta N t}{gh}.$$

Ответ $m = \dfrac{\eta N t}{gh}$.

1.86

Поезд массой $m = 600$ т движется под гору с уклоном $\alpha = 0{,}3^\circ$ и за время $t = 1$ мин развивает скорость $v = 18$ км/ч. Коэффициент трения $f = 0{,}01$. Определите среднюю мощность $\langle N \rangle$ локомотива.

Дано

$m = 600\ \text{т} = 6 \cdot 10^5$ кг
$\alpha = 0{,}3^\circ$
$t = 1$ мин $= 60$ с
$v = 18$ км/ч $= 5$ м/с
$f = 0{,}01$

$\langle N \rangle$ — ?

Решение

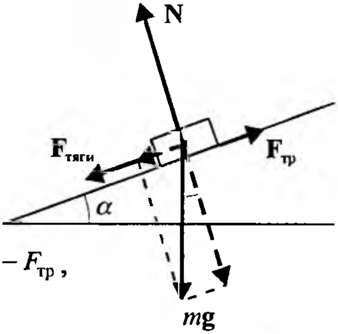
$$\langle N \rangle = F_{\text{тяги}} \langle v \rangle,$$

$$\langle v \rangle = \frac{v}{2},$$

$$a = \frac{v}{t},$$

$$ma = F_{\text{тяги}} + mg\sin\alpha - F_{\text{тр}},$$

$$F_{\text{тр}} = f\,mg\cos\alpha,$$



$$F_{\text{тяги}} = m\frac{v}{t} + f\,mg\cos\alpha - mg\sin\alpha, \qquad \langle N \rangle = \frac{mv}{2}\left(\frac{v}{t} + fg\cos\alpha - g\sin\alpha\right).$$

Ответ $\langle N \rangle = 195$ кВт.

1.87 Автомобиль массой $m = 1{,}8$ т спускается при выключенном двигателе с постоянной скоростью $v = 54$ км/ч по уклону дороги (угол к горизонту $\alpha = 3°$). Определите, какой должна быть мощность двигателя автомобиля, чтобы он смог подниматься на такой же подъем с той же скоростью.

Ответ $N = 27{,}7$ кВт.

1.88 Материальная точка массой $m = 1$ кг двигалась под действием некоторой силы согласно уравнению $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ ($B = 3$ м/с, $C = 5$ м/с^2, $D = 1$ м/с^3). Определите мощность N, затрачиваемую на движение точки за время, равное 1 с.

Дано	Решение
$m = 1$ кг $s = A - Bt + Ct^2 - Dt^3$ $B = 3$ м/с $C = 5$ м/с^2 $D = 1$ м/с^3 $t_1 = 1$ с N — ?	$N = \dfrac{dA}{dt}$, $\quad dA = dT$, $T = \dfrac{mv^2}{2}$, $\quad N = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{mv^2}{2}\right) = mv\dfrac{dv}{dt}$, $v = \dfrac{ds}{dt} = -B + 2Ct - 3Dt^2$, $\dfrac{dv}{dt} = 2C - 6Dt$, $N = m(-B + 2Ct - 3Dt^2)(2C - 6Dt)$.

Ответ $N = 16$ Вт.

• •

Некоторые математические формулы

$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha \cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

1.89 Ветер действует на парус площадью S с силой $F = AS\rho(v_0 - v)^2/2$, где A — некоторая постоянная; ρ — плотность воздуха; v_0 — скорость ветра; v — скорость лодки. Определите скорость лодки при максимальной мгновенной мощности ветра.

Дано

$F = AS\rho(v_0 - v)^2/2$

$N = N_{\max}$

v — ?

Решение

$N = Fv$, $\qquad F = AS\rho(v_0 - v)^2/2$,

$$N = \frac{AS\rho}{2}(v_0^2 v - 2v_0 v^2 + v^3),$$

$$\boxed{N = N_{\max}} \quad \frac{dN}{dv} = 0,$$

$$\frac{dN}{dv} = \frac{AS\rho}{2}(v_0^2 - 4v_0 v + 3v^2) = 0,$$

$$v_0^2 - 4v_0 v + 3v^2 = 0, \qquad 3v^2 - 4v_0 v + v_0^2 = 0,$$

$$v_{1,2} = \frac{4v_0 \pm \sqrt{16v_0^2 - 12v_0^2}}{6} = \frac{4v_0 \pm 2v_0}{6},$$

$v_1 = v_0$ (не удовл.), $\qquad v_2 = \dfrac{v_0}{3}$, $\qquad v = v_2 = \dfrac{v_0}{3}$.

Ответ $v = \dfrac{v_0}{3}$.

1.90 Тело массой m поднимается без начальной скорости с поверхности Земли под действием силы $\mathbf{F}$, изменяющейся с высотой подъема y по закону $\mathbf{F} = -2m\mathbf{g}(1 - Ay)$ (где A — некоторая положительная постоянная), и силы тяжести $m\mathbf{g}$. Определите: 1) весь путь подъема; 2) работу силы $\mathbf{F}$ на первой трети пути подъема. Поле силы тяжести считать однородным.

Ответ 1) $h = \dfrac{1}{A}$; $\qquad$ 2) $A_F = 5mg/(9A)$.

1.91

Тело массой m начинает двигаться под действием силы $\mathbf{F} = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}$, где $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — соответственно единичные векторы координатных осей x и y. Определите мощность $N(t)$, развиваемую силой в момент времени t.

Дано

m

$\mathbf{F} = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}$

$N(t)$ — ?

Решение

$N = \mathbf{F}\mathbf{v}$, $\qquad \mathbf{F} = 2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j} = m\mathbf{a}$,

$$\mathbf{a} = \frac{1}{m}(2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j}) = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

$$\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\,dt = \frac{1}{m}\int_0^t (2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j})\,dt = \frac{1}{m}(t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}),$$

$$N(t) = (2t\,\mathbf{i} + 3t^2\,\mathbf{j})\cdot\frac{1}{m}(t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j}) = \frac{1}{m}(2t^3 + 3t^5).$$

Ответ $N(t) = \dfrac{1}{m}(2t^3 + 3t^5)$.

1.92

Тело массой $m = 5$ кг падает с высоты $h = 20$ м. Определите сумму потенциальной и кинетической энергий тела в точке, находящейся от поверхности Земли на высоте $h_1 = 5$ м. Трением тела о воздух пренебречь. Сравните эту энергию с первоначальной энергией тела.

Дано

$m = 5$ кг

$h = 20$ м

$h_1 = 5$ м

E_1 — ?

Решение

$E = \Pi = mgh$, $\qquad E_1 = \Pi_1 + T_1$, $\qquad \Pi_1 = mgh_1$,

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2}, \qquad v_1 = \sqrt{2g(h - h_1)},$$

$$E_1 = mgh_1 + \frac{m\cdot 2g(h - h_1)}{2} = mgh,$$

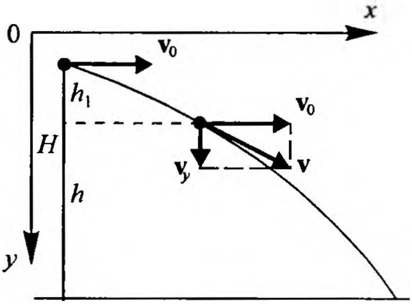
$$E_1 = E = mgh.$$

Ответ $E_1 = 981$ Дж.

1.93 Тело, падая с некоторой высоты, в момент соприкосновения с Землей обладает импульсом $p = 100$ кг·м/с и кинетической энергией $T = 500$ Дж. Определите: 1) с какой начальной высоты тело падало; 2) массу тела.

Ответ 1) $h = 5{,}1$ м; 2) $m = 10$ кг.

1.94 С башни высотой $H = 20$ м горизонтально со скоростью $v_0 = 10$ м/с брошен камень массой $m = 400$ г. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите для момента времени $t = 1$ с после начала движения: 1) кинетическую энергию; 2) потенциальную энергию.

Дано	***Решение***
$H = 20$ м $v_0 = 10$ м/с $m = 400$ г $= 0{,}4$ кг $t = 1$ с 1) T — ? 2) Π — ?	

$T = \dfrac{mv^2}{2}$, $\Pi = mgh$, $v_0 = \text{const}$,

$v_y = gt$, $v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$, $T = \dfrac{m}{2}(v_0^2 + g^2t^2)$,

$h = H - h_1$, $h_1 = \dfrac{gt^2}{2}$,

$$\Pi = mg\left(H - \frac{gt^2}{2}\right).$$

Ответ 1) $T = 39{,}2$ Дж; 2) $\Pi = 59{,}2$ Дж.

1.95 Автомашина массой $m = 2000$ кг останавливается за $t = 6$ с, пройдя расстояние $s = 30$ м. Определите: 1) начальную скорость автомашины; 2) силу торможения.

Дано

$m = 2000$ кг
$t = 6$ с
$s = 30$ м

1) v_0 — ?
2) F — ?

Решение

$$a = \frac{2s}{t^2}, \qquad v_0 = at,$$

$$v_0 = \frac{2s}{t}, \qquad \frac{mv_0^2}{2} = Fs,$$

$$F = \frac{mv_0^2}{2s} = \frac{m \cdot 4s^2}{t^2 \cdot 2s} = \frac{2ms}{t^2}.$$

Ответ 1) $v_0 = 10$ м/с; 2) $F = 3{,}33$ кН.

1.96 Материальная точка массой $m = 20$ г движется по окружности радиусом $R = 10$ см с постоянным тангенциальным ускорением. К концу пятого оборота после начала движения кинетическая энергия материальной точки оказалась равной 6,3 мДж. Определите тангенциальное ускорение.

Дано

$m = 20\ \text{г} = 2 \cdot 10^{-2}$ кг
$R = 10$ см $= 0{,}1$ м
$N = 5$
$T = 6{,}3$ мДж $=$
$= 6{,}3 \cdot 10^{-3}$ Дж

a_τ — ?

Решение

$$T = \frac{mv^2}{2}, \qquad v = \sqrt{\frac{2T}{m}},$$

$$2\pi N = \frac{\varepsilon t^2}{2}, \qquad a_\tau = \frac{v}{t} = \varepsilon R,$$

$$\varepsilon = \frac{v}{Rt}, \qquad 2\pi N = \frac{vt^2}{2Rt} = \frac{vt}{2R}, \qquad t = \frac{4\pi NR}{v},$$

$$a_\tau = \frac{v}{t} = \frac{v^2}{4\pi NR} = \frac{T}{2\pi mNR}.$$

Ответ $a_\tau = 0{,}1$ м/с^2.

1.97 Ядро массой $m = 5$ кг бросают под углом $\alpha = 60°$ к горизонту, совершая при этом работу 500 Дж. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите: 1) через какое время ядро упадет на землю; 2) какое расстояние по горизонтали оно пролетит.

Дано

$m = 5$ кг

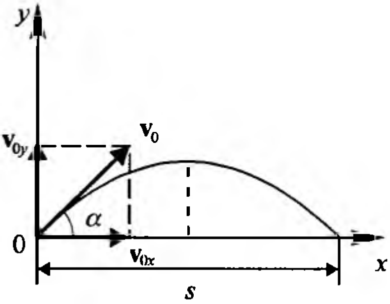
$\alpha = 60°$

$A = 500$ Дж

1) t — ?

2) s — ?

Решение



$s = v_{0x} t$, $\quad v_{0x} = v_0 \cos\alpha$, $\quad v_{0y} = g t_1 = v_0 \sin\alpha$,

$t = 2t_1$, $\quad t_1 = \dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$, $\quad A = \dfrac{m v_0^2}{2}$,

$v_0 = \sqrt{\dfrac{2A}{m}}$, $\quad t = 2\sqrt{\dfrac{2A}{m}}\dfrac{\sin\alpha}{g}$,

$$s = v_0 \cos\alpha \cdot 2\frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha, \qquad s = \frac{2A}{mg}\sin 2\alpha.$$

Ответ 1) $t = 2{,}5$ с; 2) $s = 17{,}6$ м.

1.98 Тело массой $m = 0{,}5$ кг бросают со скоростью $v_0 = 10$ м/с под углом $\alpha = 30°$ к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите кинетическую T, потенциальную П и полную E энергии тела: 1) через $t = 0{,}4$ с после начала движения; 2) в высшей точке траектории.

Ответ 1) $T = 19$ Дж; П = 5,9 Дж; $E = 24{,}9$ Дж;
2) $T = 18{,}7$ Дж; П = 6,2 Дж; $E = 24{,}9$ Дж.

1.99 Тележка проходит расстояние $s = 300$ м под гору с уклоном $\alpha = 5°$ и продолжает двигаться в гору с тем же уклоном. Принимая коэффициент трения f постоянным и равным 0,05, определите расстояние x, на которое поднимается тележка.

Дано

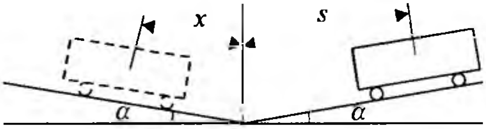
$s = 300$ м

$\alpha = 5°$

$f = 0{,}05$

x — ?

Решение



$mgh - F_{\text{тр}}(s+x) = mgh_1$, $\quad h = s\sin\alpha$, $\quad h_1 = x\sin\alpha$,

$F_{\text{тр}} = f\,mg\cos\alpha$, $\quad mgs\sin\alpha - f\,mg\cos\alpha(s+x) = mgx\sin\alpha$,

$$x = \frac{s(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{\sin\alpha + f\cos\alpha}.$$

Ответ $x = 81{,}8$ м.

1.100 К нижнему концу пружины жесткостью k_1 присоединена другая пружина жесткостью k_2, к концу которой прикреплена гиря. Пренебрегая массой пружины, определите отношение потенциальных энергий пружин.

Дано

k_1

k_2

mg

$\dfrac{\Pi_1}{\Pi_2}$ — ?

Решение

$k_1x_1 = k_2x_2$,

$\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$, $\quad \Pi_1 = \dfrac{k_1x_1^2}{2}$, $\quad \Pi_2 = \dfrac{k_2x_2^2}{2}$,

$$\frac{\Pi_1}{\Pi_2} = \frac{k_1x_1^2}{k_2x_2^2} = \frac{k_1k_2^2}{k_2k_1^2} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Ответ $\dfrac{\Pi_1}{\Pi_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$.

1.101 Тело массой $m = 0{,}4$ кг скользит с наклонной плоскости высотой $h = 10$ см и длиной $l = 1$ м. Коэффициент трения тела на всем пути $f = 0{,}04$. Определите: 1) кинетическую энергию тела у основания плоскости; 2) путь, пройденный телом на горизонтальном участке до остановки.

Ответ 1) $T = 0{,}24$ Дж; 2) $s = 1{,}53$ м.

1.102 Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 20$ м/с. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определите, на какой высоте h кинетическая энергия тела будет равна его потенциальной энергии.

Ответ $h = 10{,}2$ м.

1.103 Тело массой $m = 70$ кг движется под действием постоянной силы $F = 63$ Н. Определите, на каком пути s скорость этого тела возрастает в $n = 3$ раза по сравнению с моментом времени, когда скорость тела была равна $v_0 = 1{,}5$ м/с.

Дано	*Решение*
$m = 70$ кг $F = 63$ Н $v_0 = 1{,}5$ м/с $n = 3$ s — ?	$Fs = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2}$, $v = mv_0$, $Fs = \frac{mv_0^2}{2}(n^2 - 1)$,

$$s = \frac{mv_0^2}{2F}(n^2 - 1).$$

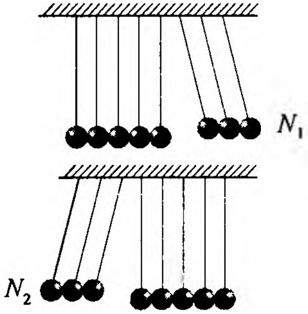
Ответ $s = 10$ м.

1.104 Подвешенный на нити шарик массой $m = 200$ г отклоняют на угол $\alpha = 45°$. Определите силу натяжения нити в момент прохождения шариком положения равновесия.

Ответ $F_{\text{нат}} = mg(3 - 2\cos\alpha) = 3{,}11$ Н.

1.105 При абсолютно упругом ударе шаров одинаковой массы всегда отскакивает столько шаров, сколько налетает. Докажите этот результат.

Дано	*Решение*
N_1	
N_2 — ?	



$$N_1 m v_1 = N_2 m v_2, \qquad \frac{v_1}{v_2} = \frac{N_2}{N_1},$$

$$N_1 \frac{m v_1^2}{2} = N_2 \frac{m v_2^2}{2},$$

$$\frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{N_2}{N_1}, \qquad \frac{N_2^2}{N_1^2} = \frac{N_2}{N_1},$$

$$N_1 = N_2.$$

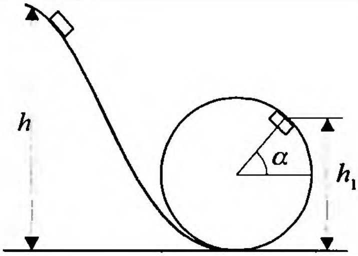
Ответ $N_2 = N_1$.

1.106 Тело брошено под углом $\alpha = 45°$ к горизонту со скоростью $v_0 = 15$ м/с. Используя закон сохранения энергии, определите скорость v тела в высшей точке его траектории.

Ответ $v = v_0 \cos\alpha = 10{,}6$ м/с.

1.107 Шайба массой m скользит без трения с высоты h по желобу, переходящему в петлю радиусом R. Определите: 1) силу давления F шайбы на опору в точке, определяемой углом α (см. рис.); 2) угол α, при котором произойдет отрыв шайбы.

Дано	*Решение*
m h R	
1) F — ? 2) α — ?	



$$mgh=\frac{mv^2}{2}+mgh_1, \qquad h_1=R(1+\sin\alpha),$$

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+mgR(1+\sin\alpha),$$

$$mv^2=2mgh-2mgR(1+\sin\alpha), \qquad F=\frac{mv^2}{R}-mg\sin\alpha,$$

$$F=\frac{2mgh-2mgR(1+\sin\alpha)}{R}-mg\sin\alpha=mg\left[\frac{2(h-R(1+\sin\alpha))}{R}-\sin\alpha\right],$$

$$\boxed{F=0} \qquad \frac{2h}{R}-2-3\sin\alpha=0,$$

$$\sin\alpha=\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}-1\right), \qquad \alpha=\arcsin\left[\frac{2}{3}\left(\frac{h}{R}-1\right)\right].$$

Ответ

1) $F=mg\left[\dfrac{2(h-R(1+\sin\alpha))}{R}-\sin\alpha\right]$;

2) $\alpha=\arcsin\left[\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{h}{R}-1\right)\right]$.

1.108 Пренебрегая трением, определите наименьшую высоту h, с которой должна скатываться тележка с человеком по желобу, переходящему в петлю радиусом $R = 6$ м, и не оторваться от него в верхней точке петли.

Дано	***Решение***
$R = 6$ м h — ?	$mgh = \dfrac{mv^2}{2} + mgh_1$, $\quad h_1 = 2R$: $\quad mg = \dfrac{mv^2}{R}$,

$$mv^2 = mgR, \qquad mgh = \frac{mgR}{2} + mg \cdot 2R,$$

$$h = \frac{R}{2} + 2R = \frac{5}{2}R.$$

Ответ $h = 15$ м.

1.109 Спортсмен с высоты $h = 12$ м падает на упругую сетку. Пренебрегая массой сетки, определите, во сколько раз наибольшая сила давления спортсмена на сетку больше его силы тяжести, если прогиб сетки под действием только силы тяжести спортсмена $x_0 = 15$ см.

Дано	***Решение***
$h = 12$ м $x_0 = 15$ см $= 0{,}15$ м n — ?	$n = \dfrac{F_{\max}}{mg}$, $\quad \lvert F\rvert = kx$, $\quad \lvert mg\rvert = kx_0$, $\quad \lvert F_{\max}\rvert = kx_{\max}$, $\Delta\Pi_{\text{упр}} = \Delta\Pi_{\text{тяг}}$ (в точках, где $\Delta T = 0$),

$$\Delta\Pi_{\text{упр}} = \frac{kx_{\max}^2}{2}, \qquad \Delta\Pi_{\text{тяг}} = mg(h + x_{\max}),$$

$$\frac{kx_{\max}^2}{2} = mgh + mgx_{\max}, \qquad x_{\max}^2 = 2\frac{mg}{k}h + 2\frac{mg}{k}x_{\max}, \qquad \frac{mg}{k} = x_0,$$

$$x_{\max}^2 - 2x_0x_{\max} - 2x_0h = 0, \qquad x_{\max} = x_0 + \sqrt{x_0^2 + 2x_0h},$$

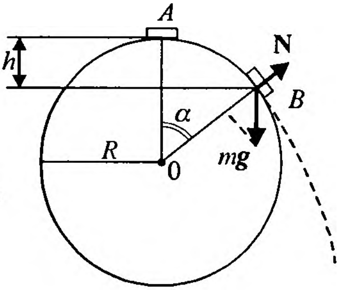
$$n = \frac{x_{\max}}{x_0} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2x_0h}{x_0^2}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{x_0}}.$$

Ответ $n = 13{,}7$.

1.110

С вершины идеально гладкой сферы радиусом $R = 1{,}2$ м соскальзывает небольшое тело. Определите высоту h (от вершины сферы), с которой тело со сферы сорвется.

Дано	Решение
$R = 1{,}2$ м	
h — ?	



$\mathrm{d}\Pi = \Pi_B - \Pi_A = -mgh$, $\quad \mathrm{d}T = T_B - T_A = \dfrac{mv_B^2}{2}$,

$v_A = 0$, $\quad \mathrm{d}\Pi + \mathrm{d}T = 0$, $\quad \dfrac{mv_B^2}{2} = mgh$,

$\dfrac{mv^2}{R} = mg\cos\alpha - N$, $\quad N_B = 0$, $\quad \dfrac{mv_B^2}{R} = mg\cos\alpha$, $\quad mv_B^2 = 2mgh$,

$mv_B^2 = mgR\cos\alpha$, $\quad 2mgh = mgR\cos\alpha$, $\quad \cos\alpha = \dfrac{R-h}{R}$,

$2h = R\cos\alpha = R\dfrac{R-h}{R} = R - h$, $\quad 3h = R$, $\quad h = \dfrac{R}{3}$.

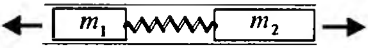
Ответ $h = 0{,}4$ м.

1.111

Два цилиндра массами $m_1 = 150$ г и $m_2 = 300$ г, соединенные сжатой пружиной, разошлись при внезапном освобождении пружины в разные стороны. Пренебрегая силами сопротивления и учитывая, что кинетическая энергия T упругой деформации пружины составляет 1,8 Дж, определите:

1) скорость v_1 движения первого цилиндра;

2) скорость v_2 движения второго цилиндра.



Ответ 1) $v_1 = 4$ м/с; 2) $v_2 = 2$ м/с.

1.112

Гиря массой $m = 10$ кг падает с высоты $h = 0{,}5$ м на подставку, скрепленную с пружиной жесткостью $k = 30$ Н/см. Определите при этом смещение x пружины.

Дано

$m = 10$ кг

$h = 0{,}5$ м

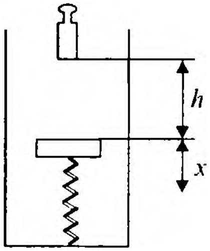
$k = 30$ Н/см $= 3 \cdot 10^3$ Н/м

x — ?

Решение

$$mg(h + x) = \frac{kx^2}{2},$$

$$\frac{kx^2}{2} - mgx - mgh = 0,$$



$$x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mg}{k}h = 0, \quad x = \frac{mg}{k} + \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}.$$

Ответ $x = 21{,}6$ см.

1.113

Пуля массой $m = 15$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v = 0{,}5$ км/с, попадает в баллистический маятник $M = 6$ кг и застревает в нем. Определите высоту h, на которую поднимется маятник, откачнувшись после удара.

Дано

$m = 15$ г $= 15 \cdot 10^{-3}$ кг

$v = 0{,}5$ км/с $= 500$ м/с

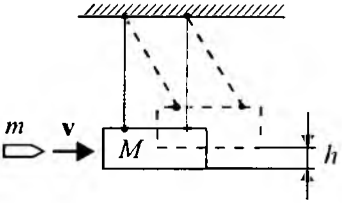
$M = 6$ кг

h — ?

Решение

$$mv = (m + M)u,$$

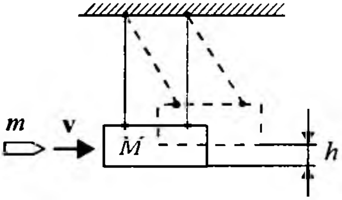
$$u = \frac{mv}{m + M},$$



$$\frac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh, \qquad h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mv)^2}{2g(m + M)^2}.$$

Ответ $h = 7{,}9$ см.

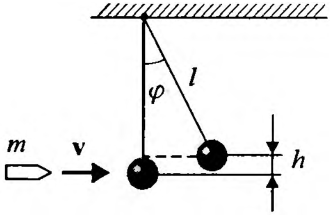
1.114 Пуля массой $m = 15$ г, летящая горизонтально, попадает в баллистический маятник длиной $l = 1$ м и массой $M = 1{,}5$ кг и застревает в нем. Маятник в результате этого отклонился на угол $\varphi = 30°$. Определите скорость пули.



Ответ $v = 164$ м/с.

1.115 Пуля массой $m = 15$ г, летящая горизонтально со скоростью $v = 200$ м/с, попадает в баллистический маятник длиной $l = 1$ м и массой $M = 1{,}5$ кг и застревает в нем. Определите угол отклонения φ маятника.

Дано	***Решение***
$m = 15$ г $= 15 \cdot 10^{-3}$ кг $v = 200$ м/с $l = 1$ м $M = 1{,}5$ кг	$mv = (m + M)u$, $u = \dfrac{mv}{m + M}$, $\dfrac{(m + M)u^2}{2} = (m + M)gh$,
φ — ?	



$$h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mv)^2}{2g(m + M)^2},$$

$$\cos\varphi = \frac{l - h}{l} = 1 - \frac{h}{l},$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{(mv)^2}{2gl(m + M)^2},$$

$$\varphi = \arccos\left[1 - \frac{(mv)^2}{2gl(m + M)^2}\right].$$

Ответ $\varphi = 36{,}9°$.

1.116 Пуля массой $m = 12$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v = 0{,}6$ км/с, попадает в мешок с песком массой $M = 10$ кг, висящий на длинной нити, и застревает в нем. Определите: 1) высоту, на которую поднимется мешок, отклонившись после удара; 2) долю кинетической энергии, израсходованной на пробивание песка.

Ответ 1) $h = 2{,}64$ см; 2) $\dfrac{\Delta T}{T} = 99{,}9\%$.

1.117 Зависимость потенциальной энергии П тела в центральном силовом поле от расстояния r до центра поля задается функцией $\Pi(r) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$ ($A = 6$ мкДж · м², $B = 0{,}3$ мДж · м). Определите, при каких значениях r максимальное значение принимают: 1) потенциальная энергия тела; 2) сила, действующая на тело.

Дано

$\Pi(r) = \dfrac{A}{r^2} - \dfrac{B}{r}$

$A = 6$ мкДж · м² $= 6 \cdot 10^{-6}$ Дж · м²

$B = 0{,}3$ мДж · м $= 3 \cdot 10^{-4}$ Дж · м

1) $\Pi = \Pi_{\max}$

2) $F = F_{\max}$

r — ?

Решение

$\boxed{\Pi = \Pi_{\max}}$ $\quad \dfrac{d\Pi}{dr} = 0$,

$$\frac{d\Pi}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{A}{r^2} - \frac{B}{r}\right) = -\frac{2A}{r^3} + \frac{B}{r^2},$$

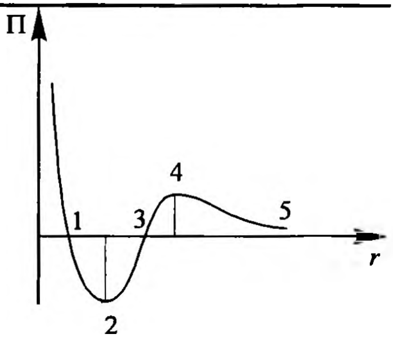
$$\frac{1}{r^3}(-2A + Br) = 0, \qquad 2A = Br, \qquad r = \frac{2A}{B}.$$

$\boxed{F = F_{\max}}$ $\quad \dfrac{dF}{dr} = 0, \qquad F = -\dfrac{d\Pi}{dr} = \dfrac{2A}{r^3} - \dfrac{B}{r^2}$,

$$\frac{dF}{dr} = \frac{d}{dr}\left(2\frac{A}{r^3} - \frac{B}{r^2}\right) = -\frac{6A}{r^4} + \frac{2B}{r^3} = \frac{2}{r^4}(-3A + Br) = 0, \qquad 3A = Br, \qquad r = \frac{3A}{B}.$$

Ответ 1) $r = \dfrac{2A}{B} = 4$ см; 2) $r = \dfrac{3A}{B} = 6$ см.

1.118 На рисунке представлена качественная зависимость потенциальной энергии П взаимодействия двух частиц от расстояния r между ними. Объясните, какому расстоянию между частицами соответствует равновесие, при каком расстоянии оно является устойчивым и при каком — неустойчивым.



Ответ $r_{\text{равн.}} = r_2$ — устойчивое равновесие,

$r_{\text{равн.}} = r_4$ — неустойчивое равновесие.

1.119 Сила, действующая на тело в некотором поле консервативных сил, описывается законом $\mathbf{F} = A(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$, где A — некоторая постоянная; $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — соответственно единичные векторы координатных осей x и y. Определите потенциальную энергию $П(x, y)$ тела в этом поле.

Ответ $П(x, y) = -Axy + C$, где C — аддитивная постоянная.

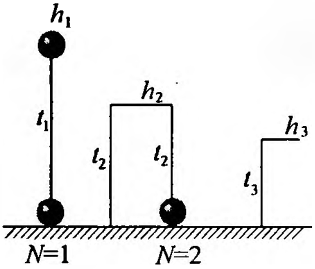
1.120 Металлический шарик падает вертикально на мраморный пол с высоты $h_1 = 80$ см и отскакивает от него на высоту $h_2 = 72$ см. Определите коэффициент восстановления материала шарика.

Дано	Решение
$h_1 = 80\ \text{см} = 0{,}8\ \text{м}$ $h_2 = 72\ \text{см} = 0{,}72\ \text{м}$	$\varepsilon = \dfrac{v_2}{v_1}$, $\quad mgh_1 = \dfrac{mv_1^2}{2}$, $\quad mgh_2 = \dfrac{mv_2^2}{2}$,
ε — ?	$\dfrac{h_2}{h_1} = \dfrac{v_2^2}{v_1^2} = \varepsilon^2$, $\quad \varepsilon = \sqrt{\dfrac{h_2}{h_1}}$.

Ответ $\varepsilon = 0{,}95$.

1.121 Шарик из некоторого материала, падая вертикально с высоты 0,9 м, несколько раз отскакивает от пола. Определите коэффициент восстановления материала шарика при ударе о пол, если с момента падения до второго удара прошло время $t=1$ с.

Дано	***Решение***
$h_1=0{,}9$ м $t=1$ с	$mgh_1=\dfrac{mv_1^2}{2}$, $mgh_2=\dfrac{mv_2^2}{2}$,
ε — ?	



$$\varepsilon=\frac{v_2}{v_1}=\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \qquad h_2=\varepsilon^2 h_1,$$

$$t=t_1+2t_2, \qquad t_1=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}, \qquad t_2=\sqrt{\frac{2h_2}{g}},$$

$$t=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}+2\sqrt{\frac{2h_2}{g}}=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}+2\varepsilon\sqrt{\frac{2h_1}{g}}=\sqrt{\frac{2h_1}{g}}(1+2\varepsilon),$$

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\left(t\sqrt{\frac{g}{2h_1}}-1\right).$$

Ответ $\varepsilon=0{,}67$.

● ●

Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})
Г — гига (10^{9})
М — мега (10^{6})
к — кило (10^{3})
д — деци (10^{-1})
с — санти (10^{-2})
м — милли (10^{-3})
мк — микро (10^{-6})
н — нано (10^{-9})
п — пико (10^{-12})
ф — фемто (10^{-15})
а — атто (10^{-18})

1.122 При центральном упругом ударе движущееся тело массой m_1 ударяется в покоящееся тело массой m_2, в результате чего скорость первого тела уменьшается в 2 раза. Определите: 1) во сколько раз масса первого тела больше массы второго тела; 2) кинетическую энергию T_2 второго тела непосредственно после удара, если первоначальная кинетическая энергия T первого тела равна 800 Дж.

Дано

$v_1' = \frac{v_1}{2}$

$T_1 = 800$ Дж

1) n — ?

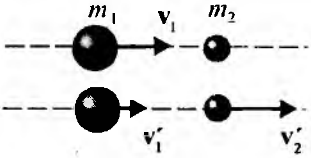
2) T_2' — ?

Решение

$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$,

$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}$,

$n = \frac{m_1}{m_2}$,



$v_1' = \frac{v_1}{2}$,

$n v_1 = n\frac{v_1}{2} + v_2'$,

$\frac{n v_1^2}{2} = \frac{n v_1^2}{8} + \frac{v_2'^2}{2}$,

$v_2' = n\frac{v_1}{2}$,

$v_2'^2 = \frac{3}{4} n v_1^2$,

$n^2 \frac{v_1^2}{4} = \frac{3}{4} n v_1^2$,

$n = 3$,

$T_2' = T_1 - T_1'$,

$T_1' = m_1 v_1'^2 = \frac{m_1}{2}\frac{v_1^2}{4} = \frac{T_1}{4}$,

$T_2' = T_1 - \frac{T_1}{4} = \frac{3}{4} T_1$.

Ответ 1) $n = 3$; 2) $T_2' = 600$ Дж.

1.123 Определите, во сколько раз уменьшится скорость шара, движущегося со скоростью v_1, при его соударении с покоящимся шаром, масса которого в n раз больше массы налетающего шара. Удар считать центральным абсолютно упругим.

Дано

$$n = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\frac{v_1}{v_1'} \text{ — ?}$$

Решение

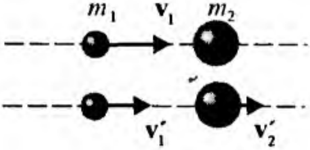
$$m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2},$$

$$m_2 = n m_1,$$

$$v_1 = v_1' + n v_2',$$

$$v_1^2 = v_1'^2 + n v_2'^2,$$



$$v_2' = \frac{v_1 - v_1'}{n}, \qquad v_2'^2 = \frac{(v_1 - v_1')^2}{n^2},$$

$$v_2'^2 = \frac{v_1^2 - v_1'^2}{n} = \frac{(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')}{n},$$

$$\frac{(v_1 - v_1')^2}{n^2} = \frac{(v_1 - v_1')(v_1 + v_1')}{n}, \qquad \frac{v_1 - v_1'}{n} = v_1 + v_1',$$

$$x = \frac{v_1}{v_1'}, \qquad \frac{x-1}{n} = x + 1, \qquad nx + n = x - 1,$$

$$nx - x = -n - 1, \qquad x(n-1) = -(n+1),$$

$$x = -\frac{n+1}{n-1} = \frac{1+n}{1-n}, \qquad \frac{v_1}{v_1'} = \frac{1+n}{1-n}.$$

Ответ $\dfrac{v_1}{v_1'} = \dfrac{1+n}{1-n}.$

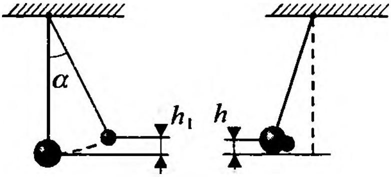
1.124 Тело массой $m_1 = 3$ кг движется со скоростью $v_1 = 2$ м/с и ударяется о неподвижное тело такой же массы. Считая удар центральным и неупругим, определите количество теплоты, выделившееся при ударе.

Ответ $Q = 3$ Дж.

1.125 Два шара массами $m_1 = 9$ кг и $m_2 = 12$ кг подвешены на нитях длиной $l = 1{,}5$ м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем меньший шар отклонили на угол $\alpha = 30°$ и отпустили. Считая удар неупругим, определите высоту h, на которую поднимутся оба шара после удара.

Дано	Решение	
$m_1 = 9$ кг	$m_1gh_1 = \dfrac{m_1v_1^2}{2}$,	$v_1 = \sqrt{2gh_1}$,
$m_2 = 12$ кг	$h_1 = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$,	$v_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}$;
$l = 1{,}5$ м	$m_1v_1 = (m_1 + m_2)v$,	
$\alpha = 30°$		
h — ?	$v = \dfrac{m_1v_1}{m_1 + m_2}$,	

$$v = \frac{m_1\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}}{m_1 + m_2};$$



$$(m_1 + m_2)\frac{v^2}{2} = (m_1 + m_2)gh,$$

$$h = \frac{v^2}{2g} = \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2}\cdot 2gl(1-\cos\alpha)\cdot\frac{1}{2g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 l(1-\cos\alpha).$$

Ответ $h = 3{,}7$ см.

1.126 Два шара массами $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 2$ кг подвешены на нитях длиной $l = 1$ м. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем больший шар отклонили от положения равновесия на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. Считая удар упругим, определите скорость второго шара после удара.

Дано

$m_1 = 3$ кг

$m_2 = 2$ кг

$l = 1$ м

$\alpha = 60°$

v_2' — ?

Решение

$$m_1gh = \frac{m_1v_1^2}{2}, \qquad v_1 = \sqrt{2gh},$$

$$h = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha), \qquad v_1 = \sqrt{2gl(1-\cos\alpha)};$$

$$m_1v_1 = m_1v_1' + m_2v_2', \qquad \frac{m_1v_1^2}{2} = \frac{m_1v_1'^2}{2} + \frac{m_2v_2'^2}{2},$$

$$m_1(v_1 - v_1') = m_2v_2', \qquad m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2v_2'^2,$$

$$m_1(v_1 + v_1')(v_1 - v_1') = m_2v_2'^2, \qquad v_1 + v_1' = v_2', \qquad m_1v_1 = m_1(v_2' - v_1) + m_2v_2',$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{2gl(1-\cos\alpha)}.$$

Ответ $v_2' = 3{,}76$ м/с.

1.127 Два шара массами $m_1 = 200$ г и $m_2 = 400$ г подвешены на нитях длиной $l = 67{,}5$ см. Первоначально шары соприкасаются между собой, затем первый шар отклонили от положения равновесия на угол $\alpha = 60°$ и отпустили. Считая удар упругим, определите, на какую высоту h поднимется второй шар после удара.

Ответ $h = \dfrac{4m_1^2l(1-\cos\alpha)}{(m_1+m_2)^2} = 15$ см.

1.128 Шар сталкивается с другим покоящимся шаром такой же массы. Докажите, что в случае упругого, но не центрального удара угол между направлениями скоростей после удара составляет $\pi/2$.

Ответ $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

1.4. Механика твердого тела

1.129 Выведите формулу для момента инерции тонкого кольца радиусом R и массой m относительно оси симметрии.

Ответ $J = mR^2$.

1.130 Выведите формулу для момента инерции тонкого стержня массой m и длиной l относительно оси, проходящей через центр масс перпендикулярно его длине.

1.131 Выведите формулу для момента инерции сплошного шара радиусом R и массой m относительно оси, проходящей через центр масс шара.

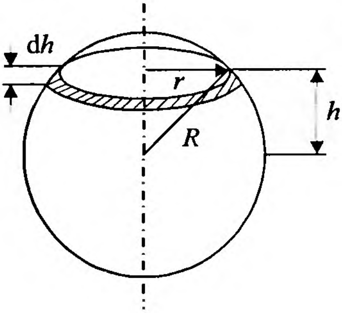
Дано

m

R

J — ?

Решение



$$dJ = \frac{mr^2}{2} = \frac{\rho\pi r^2\, dh\, r^2}{2} = \frac{\rho\pi r^4}{2} dh,$$

$$r^2 = R^2 - h^2,$$

$$J = \int dJ = 2\int_0^R \frac{\rho\pi}{2}(R^2 - h^2)^2\, dh = \rho\pi \cdot \frac{8}{15}R^5,$$

$$m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3, \qquad J = \frac{2}{5}\left(\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3\right)R^2 = \frac{2}{5}mR^2.$$

Ответ $J = \frac{2}{5}mR^2$.

1.132 Выведите формулу для момента инерции полого шара относительно оси, проходящей через его центр. Масса шара равна *m*, внутренний радиус *r*, внешний *R*.

Дано	Решение
m r R	$J=\frac{2}{5}m_1R^2-\frac{2}{5}m_2r^2$, $\quad m_1=\frac{4}{3}\pi\rho R^3$,
J — ?	$m_2=\frac{4}{3}\pi\rho r^3$, $\quad m=m_1-m_2=\frac{4}{3}\pi\rho(R^3-r^3)$,

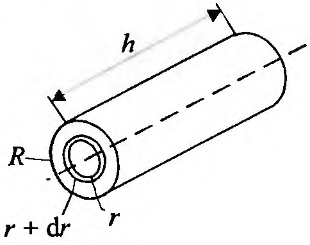
$$J=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^3R^2-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho r^3r^2=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho R^5-\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho r^5=$$

$$=\frac{2}{5}\cdot\frac{4}{3}\pi\rho\left(\frac{R^3-r^3}{R^3-r^3}\right)(R^5-r^5)=\frac{2}{5}\cdot m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}.$$

Ответ $J=\frac{2}{5}m\frac{R^5-r^5}{R^3-r^3}$.

1.133 Выведите формулу для момента инерции цилиндрической муфты относительно оси, совпадающей с ее осью симметрии. Масса муфты равна *m*, внутренний радиус *r*, внешний *R*.

Дано	Решение
m r R	$\mathrm{d}J=r^2\,\mathrm{d}m$, $\quad \mathrm{d}m=\rho\,\mathrm{d}V=\rho\cdot2\pi rh\,\mathrm{d}r$, $J=\int_r^R\rho\cdot2\pi r^3h\,\mathrm{d}r=2\pi\rho h\int_r^R r^3\,\mathrm{d}r=2\pi\rho h\left.\frac{r^4}{4}\right\|_r^R=$
J — ?	$=\frac{\pi\rho h}{2}(R^4-r^4)$,



$$m=m_1-m_2=\pi\rho h(R^2-r^2),\qquad J=\frac{1}{2}m(R^2+r^2).$$

Ответ $J=\frac{1}{2}m(R^2+r^2)$.

1.134 Определите момент инерции сплошного однородного диска радиусом $R = 40$ см и массой $m = 1$ кг относительно оси, проходящей через середину одного из радиусов перпендикулярно плоскости диска.

Ответ $J = 0{,}12$ кг · м².

1.135 Определите момент инерции J тонкого однородного стержня длиной $l = 50$ см и массой $m = 360$ г относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через: 1) конец стержня; 2) точку, отстоящую от конца стержня на $\frac{1}{6}$ его длины.

Дано

$l = 50$ см $= 0{,}5$ м

$m = 360$ г $= 0{,}36$ кг

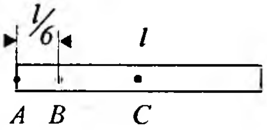
$AB = \dfrac{l}{6}$

1) J_A — ?

2) J_B — ?

Решение

$$J = J_C + ma^2,$$



$$J_C = \frac{1}{12} ml^2,$$

$$J_A = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} ml^2,$$

$$J_B = \frac{1}{12} ml^2 + m\left(\frac{l}{2} - \frac{l}{6}\right)^2 = \frac{7}{36} ml^2.$$

Ответ 1) $J_A = 3 \cdot 10^{-2}$ кг · м²; 2) $J_B = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ кг · м².

Момент инерции тел правильной геометрической формы

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
Полый тонкостенный цилиндр радиусом R	Ось симметрии	mR^2
Сплошной цилиндр или диск радиусом R	То же	$\frac{1}{2} mR^2$

1.136

Шар и сплошной цилиндр, изготовленные из одного и того же материала, одинаковой массы катятся без скольжения с одинаковой скоростью. Определите, во сколько раз кинетическая энергия шара меньше кинетической энергии сплошного цилиндра.

Дано

$m_1 = m_2 = m$

$v_1 = v_2 = v$

$\frac{T_2}{T_1}$ — ?

Решение

$$T = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad \omega = \frac{v}{R},$$

$$J_1 = \frac{2}{5}mR^2, \qquad J_2 = \frac{1}{2}mR^2,$$

$$T_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{2}{5}mR^2 \cdot \frac{v^2}{2R^2} = \frac{7}{10}mv^2, \qquad T_2 = \frac{mv_2}{2} + \frac{1}{2}mR^2 \cdot \frac{v^2}{2R^2} = \frac{3}{4}mv^2,$$

$$\frac{T_2}{T_1} = 1{,}07.$$

Ответ $T_2/T_1 = 1{,}07$.

1.137

Полная кинетическая энергия T диска, катящегося по горизонтальной поверхности, равна 24 Дж. Определите кинетическую энергию T_1 поступательного и T_2 вращательного движения диска.

Ответ $T_1 = 16$ Дж; $T_2 = 8$ Дж.

Прямой тонкий стержень длиной l	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$\frac{1}{12}ml^2$
То же	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его конец	$\frac{1}{3}ml^2$
Шар радиусом R	Ось проходит через центр шара	$\frac{2}{5}mR^2$

1.138 Полый тонкостенный цилиндр массой $m = 0{,}5$ кг, катящийся без скольжения, ударяется о стену и откатывается от нее. Скорость цилиндра до удара о стену $v_1 = 1{,}4$ м/с, после удара $v_1' = 1$ м/с. Определите выделившееся при ударе количество теплоты.

Дано

$m = 0{,}5$ кг

$v_1 = 1{,}4$ м/с

$v_1' = 1$ м/с

Q — ?

Решение

$$T_1 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2}, \qquad T_2 = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{J\omega_1'^2}{2},$$

$$\omega = \frac{v}{R}, \qquad J = mR^2, \qquad Q = T_1 - T_2,$$

$$Q = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{J\omega_1^2}{2} - \frac{mv_1'^2}{2} - \frac{J\omega_1'^2}{2} = \frac{m}{2}(v_1^2 - v_1'^2) + \frac{J}{2}(\omega_1^2 - \omega_1'^2) =$$

$$= \frac{m}{2}(v_1^2 - v_1'^2) + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{v_1^2}{R^2} - \frac{v_1'^2}{R^2}\right) = m(v_1^2 - v_1'^2), \qquad Q = m(v_1 + v_1')(v_1 - v_1').$$

Ответ $Q = 0{,}48$ Дж.

1.139 К ободу однородного сплошного диска массой $m = 10$ кг, насаженного на ось, приложена постоянная касательная сила $F = 30$ Н. Определите кинетическую энергию через время $t = 4$ с после начала действия силы.

Дано

$m = 10$ кг

$F = 30$ Н

$t = 4$ с

$T_{\text{вр}}$ — ?

Решение

$$T_{\text{вр}} = \frac{J\omega^2}{2}, \qquad M = FR = J\varepsilon, \qquad J = \frac{mR^2}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{FR}{J} = \frac{2F}{mR}, \qquad \omega = \varepsilon t = \frac{2F}{mR}t,$$

$$T_{\text{вр}} = \frac{mR^2}{2}\left(\frac{2F}{mR}t\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{F^2t^2}{m}.$$

Ответ $T_{\text{вр}} = 1{,}44$ кДж.

1.140 Шар радиусом $R = 10$ см и массой $m = 5$ кг вращается вокруг оси симметрии согласно уравнению $\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$ ($B = 2$ рад/с², $C = -0{,}5$ рад/с³). Определите момент сил M для $t = 3$ с.

Дано

$R = 10$ см $= 0{,}1$ м
$m = 5$ кг
$\varphi = A + Bt^2 + Ct^3$
$B = 2$ рад/с²
$C = -0{,}5$ рад/с³
$t = 3$ с

M — ?

Решение

$$M = J\varepsilon, \qquad J = \frac{2}{5}mR^2,$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}, \qquad \varepsilon = \frac{d\omega}{dt},$$

$$\omega = 2Bt + 3Ct^2, \qquad \varepsilon = 2B + 6Ct,$$

$$M = \frac{2}{5}mR^2(2B + 6Ct).$$

Ответ $M = -0{,}1$ Н · м.

1.141 Вентилятор вращается с частотой $n = 600$ об/мин. После выключения он начал вращаться равнозамедленно и, сделав $N = 50$ оборотов, остановился. Работа A сил торможения равна 31,4 Дж. Определите: 1) момент сил M торможения; 2) момент инерции J вентилятора.

Дано

$n = 600$ об/мин $= 10$ об/с
$N = 50$
$A = 31{,}4$ Дж

1) M — ?
2) J — ?

Решение

$$A = M\varphi, \qquad \varphi = 2\pi N, \qquad \omega_0 = 2\pi n,$$

$$M = \frac{A}{\varphi} = \frac{A}{2\pi N}, \qquad M = J\varepsilon,$$

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t} = \frac{2\pi n}{t}, \qquad \varphi = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2} = \frac{\omega_0 t}{2},$$

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 2\pi N}{2\pi n} = \frac{2N}{n}, \qquad J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{MN}{\pi n^2}.$$

Ответ 1) $M = 0{,}1$ Н · м; 2) $J = 1{,}59 \cdot 10^{-2}$ кг · м².

1.142 Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 150$ кг · м², вращается с частотой $n = 240$ об/мин. Через $t = 1$ мин после начала действия сил торможения он остановился. Определите: 1) момент M сил торможения; 2) число оборотов маховика от начала торможения до полной остановки.

Ответ 1) $M = 62{,}8$ Н · м; 2) $N = 120$.

1.143 Сплошной однородный диск скатывается без скольжения с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Определите линейное ускорение a центра диска.

Дано

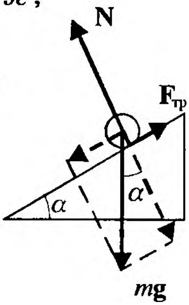
α

a — ?

Решение

$$ma = mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}, \qquad F_{\text{тр}}R = J\varepsilon,$$

$$J = \frac{mR^2}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{a}{R},$$



$$F_{\text{тр}} = \frac{J\varepsilon}{R} = \frac{mR^2a}{2R^2} = \frac{ma}{2}, \qquad ma = mg\sin\alpha - \frac{ma}{2},$$

$$\frac{3}{2}a = g\sin\alpha, \qquad a = \frac{2}{3}g\sin\alpha.$$

Ответ $a = \dfrac{2}{3}g\sin\alpha$.

● ●

Кинетическая энергия тела, катящегося по плоскости без скольжения

$$T = \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{2}J_C\omega^2,$$

где m — масса тела; v_C — скорость центра масс тела; J_C — момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс; ω — угловая скорость тела.

1.144 К ободу однородного сплошного диска радиусом $R = 0{,}5$ м приложена постоянная касательная сила $F = 100$ Н. При вращении диска на него действует момент сил трения $M_{\text{тр}} = 2$ Н · м. Определите массу m диска, если известно, что его угловое ускорение ε постоянно и равно 16 рад/с^2.

Дано	*Решение*
$R = 0{,}5$ м $F = 100$ Н $M_{\text{тр}} = 2$ Н · м $\varepsilon = 16$ рад/с^2 m — ?	$M = FR - M_{\text{тр}}$, $\quad M = J\varepsilon$, $J = \dfrac{mR^2}{2}$, $\quad J\varepsilon = FR - M_{\text{тр}}$, $\dfrac{mR^2}{2}\varepsilon = FR - M_{\text{тр}}$, $\quad m = \dfrac{2(FR - M_{\text{тр}})}{\varepsilon R^2}$.

Ответ $m = 24$ кг.

1.145 Частота вращения n_0 маховика, момент инерции J которого равен 120 кг · м^2, составляет 240 об/мин. После прекращения действия на него вращающего момента маховик под действием сил трения в подшипниках остановился за время $t = \pi$ мин. Считая трение в подшипниках постоянным, определите момент M сил трения.

Дано	*Решение*
$n_0 = 240$ об/мин $= 4$ об/с $J = 120$ кг · м^2 $t = \pi$ мин $= 60\pi$ с M — ?	$\dfrac{J\omega_0^2}{2} = M\varphi$, $\quad M = \dfrac{J\omega_0^2}{2\varphi}$, $\varphi = \dfrac{\omega_0 t}{2}$, $\quad \omega_0 = 2\pi n_0$, $M = \dfrac{2\pi n_0 J}{t}$.

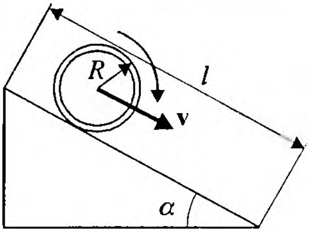
Ответ $M = 16$ Н · м.

1.146 Маховик в виде сплошного диска, момент инерции которого $J = 1{,}5$ кг · м², вращаясь при торможении равнозамедленно, за время $t = 1$ мин уменьшил частоту своего вращения с $n_0 = 240$ об/мин до $n_1 = 120$ об/мин. Определите: 1) угловое ускорение ε маховика; 2) момент M силы торможения; 3) работу торможения A.

Дано	*Решение*
$J = 1{,}5$ кг · м² $t = 1$ мин $= 60$ с $n_0 = 240$ об/мин $= 4$ об/с $n_1 = 120$ об/мин $= 2$ об/с 1) ε — ? 2) M — ? 3) A — ?	$\omega = \omega_0 - \varepsilon t$, $\quad \omega_0 = 2\pi n_0$, $\quad \omega = 2\pi n$, $\varepsilon = \dfrac{\omega_0 - \omega}{t} = \dfrac{2\pi}{t}(n_0 - n)$, $\quad M = J\varepsilon$. $A = \dfrac{J\omega_0^2}{2} - \dfrac{J\omega^2}{2} = \dfrac{J}{2}(\omega_0^2 - \omega^2) = 2\pi^2 J(n_0^2 - n^2)$.

Ответ 1) $\varepsilon = 0{,}21$ рад/с²; 2) $M = 0{,}315$ Н · м; 3) $A = 355$ Дж.

1.147 Колесо радиусом $R = 30$ см и массой $m = 3$ кг скатывается без трения по наклонной плоскости длиной $l = 5$ м и углом наклона $\alpha = 25°$. Определите момент инерции колеса, если его скорость v в конце движения составляла 4,6 м/с.

Дано	*Решение*
$R = 30$ см $= 0{,}3$ м $m = 3$ кг $l = 5$ м $\alpha = 25°$ $v = 4{,}6$ м/с J — ?	$mgh = \dfrac{mv^2}{2} + \dfrac{J\omega^2}{2}$, $h = l\sin\alpha$, $\quad \omega = \dfrac{v}{R}$, $mgh - \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{J\omega^2}{2}$, 

$$J = \left(mgl\sin\alpha - \frac{mv^2}{2}\right)\cdot\frac{2R^2}{v^2} = mR^2\left(\frac{2gl\sin\alpha}{v^2} - 1\right).$$

Ответ $J = 0{,}259$ кг · м².

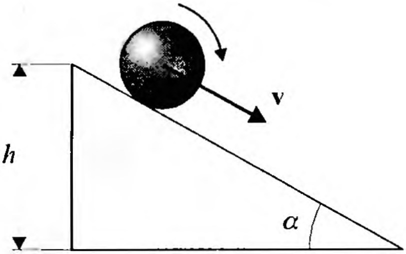
1.148 С наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, скатывается без скольжения шарик. Пренебрегая трением, определите время движения шарика по наклонной плоскости, если известно, что его центр масс при скатывании понизился на 30 см.

Дано

$\alpha = 30°$
$h = 0{,}3$ м

t — ?

Решение



$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2},$$

$$J = \frac{2}{5}mR^2, \qquad \omega = \frac{v}{R},$$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{2mR^2}{5}\cdot\frac{v^2}{2R^2}, \qquad mgh = \frac{7}{10}mv^2, \qquad v = \sqrt{\frac{10gh}{7}}.$$

$$l = \frac{at^2}{2} = \frac{vt}{2}, \qquad t = \frac{2l}{v}, \qquad l = \frac{h}{\sin\alpha}.$$

$$t = \frac{2h}{v\sin\alpha} = \sqrt{\frac{7}{10gh}}\cdot\frac{2h}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{7h}{10g}}.$$

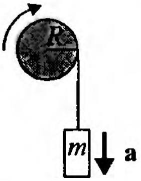
Ответ $t = 0{,}585$ с.

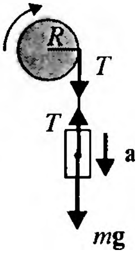
1.149 Полый тонкостенный цилиндр катится вдоль горизонтального участка дороги со скоростью $v = 1{,}5$ м/с. Определите путь, который он пройдет в гору за счет кинетической энергии, если уклон горы равен 5 м на каждые 100 м пути.

Ответ $s = 4{,}59$ м.

1.150 На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 50$ см намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 6{,}4$ кг. Груз, разматывая нить, опускается с ускорением $a = 2$ м/с². Определите: 1) момент инерции J вала; 2) массу m_1 вала.

Дано	*Решение*
$R = 50$ см $= 0{,}5$ м $m = 6{,}4$ кг $a = 2$ м/с²	$ma = mg - T$, $T = m(g - a)$, $M = TR = m(g - a)R$,
1) J — ? 2) m_1 — ?	$M = J\varepsilon$, $\varepsilon = \dfrac{a}{R}$;





$$J = \frac{M}{\varepsilon} = \frac{m(g-a)R^2}{a} = mR^2\left(\frac{g}{a} - 1\right),$$

$$J = \frac{m_1 R^2}{2}, \qquad m_1 = \frac{2J}{R^2}.$$

Ответ 1) $J = 6{,}25$ кг · м²; 2) $m_1 = 50$ кг.

1.151 На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 5$ см и массой $M = 10$ кг намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 1$ кг. Определите: 1) зависимость $s(t)$, согласно которой движется груз; 2) силу натяжения нити T; 3) зависимость $\varphi(t)$, согласно которой вращается вал; 4) угловую скорость ω вала через $t = 1$ с после начала движения; 5) тангенциальное (a_τ) и нормальное (a_n) ускорения точек, находящихся на поверхности вала.

Ответ 1) $s = 0{,}82t^2$; 2) $T = 8{,}2$ Н;

3) $\varphi = 16{,}4t^2$; 4) $\omega = 32{,}8$ рад/с;

5) $a_\tau = 1{,}64$ м/с², $a_n = 53{,}8$ м/с².

1.152 На однородный сплошной цилиндрический вал радиусом $R = 20$ см, момент инерции которого $J = 0{,}15$ кг · м², намотана легкая нить, к концу которой прикреплен груз массой $m = 0{,}5$ кг. До начала вращения барабана высота h груза над полом составляла 2,3 м. Определите: 1) время опускания груза до пола; 2) силу натяжения нити; 3) кинетическую энергию груза в момент удара о пол.

Дано

$R = 20$ см $= 0{,}2$ м

$J = 0{,}15$ кг · м²

$m = 0{,}5$ кг

$h = 2{,}3$ м

1) t — ?

2) T — ?

3) $W_к$ — ?

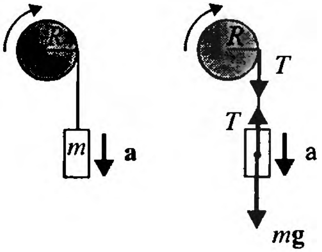
Решение

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad \omega = \frac{v}{R},$$

$$h = \frac{at^2}{2}, \qquad v = at,$$

$$mg\frac{at^2}{2} = \frac{a^2t^2}{2}\left(m + \frac{J}{R^2}\right),$$

$$a = \frac{mg}{m + \dfrac{J}{R^2}}, \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{a}}, \qquad TR = J\varepsilon,$$



$$T = \frac{J\varepsilon}{R}, \qquad \varepsilon = \frac{a}{R}, \qquad T = \frac{Ja}{R^2},$$

$$W_к = \frac{mv^2}{2} = \frac{ma^2t^2}{2}.$$

Ответ 1) $t = 2$ с; 2) $T = 4{,}31$ Н; 3) $W_к = 1{,}32$ Дж.

● ●

Некоторые математические формулы

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$

1.153 Через неподвижный блок в виде однородного сплошного цилиндра массой $m = 0{,}2$ кг перекинута невесомая нить, к концам которой прикреплены тела массами $m_1 = 0{,}35$ кг и $m_2 = 0{,}55$ кг. Пренебрегая трением в оси блока, определите: 1) ускорение груза; 2) отношение T_2/T_1 сил натяжения нити.

Дано

$m = 0{,}2$ кг

$m_1 = 0{,}35$ кг

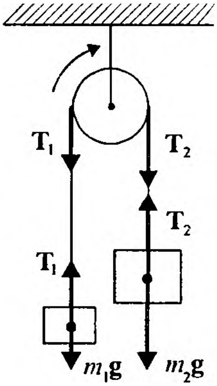
$m_2 = 0{,}55$ кг

1) a — ?

2) T_2/T_1 — ?

Решение

$$\begin{cases} m_1 a_1 = T_1 - m_1 g, \\ m_2 a = m_2 g - T_2, \\ (T_2 - T_1)R = J\varepsilon. \end{cases}$$



$$J = \frac{mR^2}{2}, \qquad \varepsilon = \frac{a}{R},$$

$$(T_2 - T_1)R = \frac{mR^2}{2}\frac{a}{R}, \qquad T_2 - T_1 = \frac{ma}{2},$$

$$T_2 - T_1 = m_2 g - m_2 a - m_1 a - m_1 g,$$

$$ma + 2m_2 a + 2m_1 a = 2m_2 g - 2m_1 g,$$

$$a = \frac{(m_2 - m_1)g}{m_1 + m_2 + \frac{m}{2}}, \qquad T_2 = m_2(g - a), \qquad T_1 = m_1(g + a),$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{m_2(g - a)}{m_1(g + a)}.$$

Ответ 1) $a = 1{,}96$ м/с^2; 2) $T_2/T_1 = 1{,}05$.

Некоторые внесистемные единицы

1 сут = 86400 с

1 год = 365,25 сут = $3{,}16 \cdot 10^7$ с

1° = $1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад

1′ = $2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад

1″ = $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад

1 рад = 57,3°

1 мм рт. ст. = 133,3 Па

1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

1.154 Тело массой $m_1 = 0{,}25$ кг, соединенное невесомой нитью посредством блока (в виде полого тонкостенного цилиндра) с телом массой $m_2 = 0{,}2$ кг, скользит по поверхности горизонтального стола. Масса блока $m = 0{,}15$ кг. Коэффициент трения f тела о поверхность равен 0,2. Пренебрегая трением в подшипниках, определите: 1) ускорение a, с которым будут двигаться эти тела; 2) силы натяжения T_1 и T_2 нити по обе стороны блока.

Дано

$m_1 = 0{,}25$ кг

$m_2 = 0{,}2$ кг

$m = 0{,}15$ кг

$f = 0{,}2$

1) a — ?

2) T_1 — ?

T_2 — ?

Решение

$$\begin{cases} m_1 a = T_1 - F_{\text{тр}}, \\ m_2 a = m_2 g - T_2, \\ (T_2 - T_1)R = J\varepsilon, \end{cases}$$

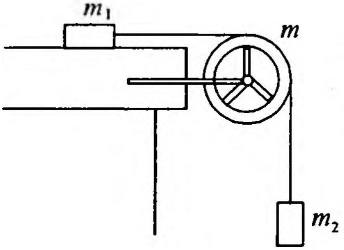
$$F_{\text{тр}} = fN = f m_1 g, \qquad J = mR^2, \qquad \varepsilon = \frac{a}{R},$$

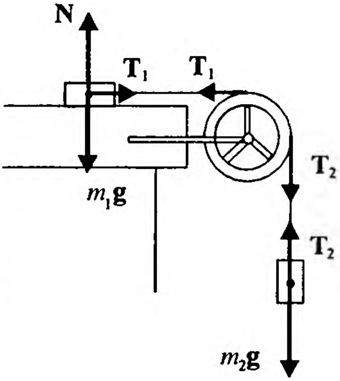
$$(T_2 - T_1)R = \frac{mR^2 \cdot a}{R}, \qquad m_2 g - T_2 = m_2 a,$$

$$T_1 - f m_1 g = m_1 a, \qquad T_2 - T_1 = ma, \qquad a = \frac{g(m_2 - f m_1)}{m_1 + m_2 + m},$$

$$T_2 = m_2(g - a),$$

$$T_1 = T_2 - ma.$$





Ответ 1) $a = 2{,}45$ м/с^2; 2) $T_1 = 1{,}1$ Н; $T_2 = 1{,}47$ Н.

1.155 Для демонстрации законов сохранения применяется маятник Максвелла, представляющий собой массивный диск радиусом R и массой m, туго насаженный на ось радиусом r, которая подвешивается на двух предварительно намотанных на нее нитях. Когда маятник отпускают, то он совершает возвратно-поступательное движение в вертикальной плоскости при одновременном движении диска вокруг оси. Не учитывая силы сопротивления и момент инерции оси, определите: 1) ускорение поступательного движения маятника; 2) силу натяжения нити.

Дано

R

m

r

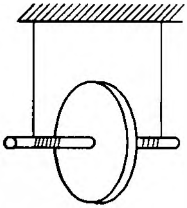
1) a — ?

2) T — ?

Решение

$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{J\omega^2}{2},$$

$$\omega=\frac{v}{\varepsilon}, \qquad J=\frac{mR^2}{2},$$



$$mgh=\frac{mv^2}{2}+\frac{mR^2v^2}{2\cdot 2r^2}, \qquad gh=\frac{v^2}{2}\left(1+\frac{R^2}{2r^2}\right), \qquad h=\frac{at^2}{2}, \qquad v=at,$$

$$g\frac{at^2}{2}=\frac{a^2t^2}{2}\left(1+\frac{R^2}{2r^2}\right), \qquad a=\frac{g}{1+R^2/(2r^2)}, \qquad 2Tr=J\varepsilon, \qquad \varepsilon=\frac{a}{r},$$

$$2Tr=\frac{mR^2}{2r}\frac{g}{(1+R^2/(2r^2))}, \qquad T=\frac{mgR^2}{2(2r^2+R^2)}.$$

Ответ 1) $a=\dfrac{g}{1+R^2/(2r^2)}$; 2) $T=\dfrac{mgR^2}{2(2r^2+R^2)}$.

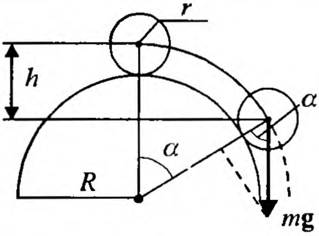
● ●

Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})
Г — гига (10^{9})
М — мега (10^{6})
к — кило (10^{3})
д — деци (10^{-1})
с — санти (10^{-2})
м — милли (10^{-3})
мк — микро (10^{-6})
н — нано (10^{-9})
п — пико (10^{-12})
ф — фемто (10^{-15})
а — атто (10^{-18})

1.156 Однородный шар радиусом $r = 20$ см скатывается без скольжения с вершины сферы радиусом $R = 50$ см. Определите угловую скорость ω шара после отрыва от поверхности сферы.

Дано	***Решение***
$r = 20$ см $= 0{,}2$ м $R = 50$ см $= 0{,}5$ м ω — ?	$\dfrac{mv^2}{R+r} = mg\cos\alpha$, $\cos\alpha = \dfrac{v^2}{g(R+r)}$,



$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}, \qquad J = \frac{2}{5}mr^2, \qquad v = \omega r,$$

$$h = (R+r) - (R+r)\cos\alpha, \qquad mg(R+r)(1-\cos\alpha) = \frac{m\omega^2 r^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{mr^2\omega^2}{2},$$

$$g(R+r)\left(1 - \frac{\omega^2 r^2}{g(R+r)}\right) = \frac{7}{10}\omega^2 r^2, \qquad g(R+r) - \omega^2 r^2 = \frac{7}{10}\omega^2 r^2,$$

$$g(R+r) = \frac{17}{10}\omega^2 r^2, \qquad \omega = \frac{1}{r}\sqrt{\frac{10}{17}g(R+r)}.$$

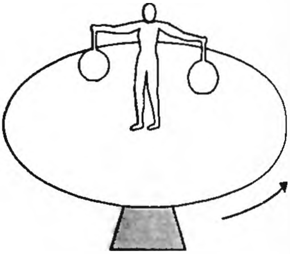
Ответ $\omega = 10$ рад/с.

1.157 Маховик начинает вращаться из состояния покоя с постоянным угловым ускорением $\varepsilon = 0{,}4$ рад/с². Определите кинетическую энергию маховика через время $t_2 = 25$ с после начала движения, если через $t_1 = 10$ с после начала движения момент импульса L_1 маховика составлял 60 кг · м²/с.

Ответ $T = 750$ Дж.

1.158 Горизонтальная платформа массой $m = 25$ кг и радиусом $R = 0{,}8$ м вращается с частотой $n_1 = 18$ мин $^{-1}$. В центре стоит человек и держит в расставленных руках гири. Считая платформу диском, определите частоту вращения платформы, если человек, опустив руки, уменьшит свой момент инерции от $J_1 = 3{,}5$ кг · м² до $J_2 = 1$ кг · м².

Дано	*Решение*
$m = 25$ кг $R = 0{,}8$ м $n_1 = 18$ мин$^{-1}$ $= 0{,}3$ с$^{-1}$ $J_1 = 3{,}5$ кг · м² $J_2 = 1$ кг · м² ——— n_2 — ?	$L = \text{const}$, $L = J\omega$, $(J_1 + J)\omega_1 = (J_2 + J)\omega_2$, $J = \dfrac{mR^2}{2}$, $\omega_1 = 2\pi n_1$, $\omega_2 = 2\pi n_2$,



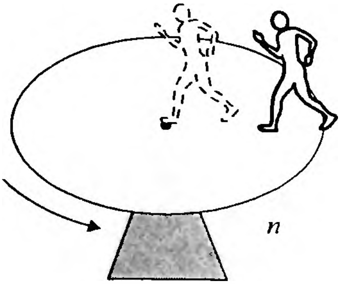
$$\left(J_1 + \frac{mR^2}{2}\right)n_1 = \left(J_2 + \frac{mR^2}{2}\right)n_2, \qquad n_2 = \frac{2J_1 + mR^2}{2J_2 + mR^2} \cdot n_1 .$$

Ответ $n_2 = 23$ мин $^{-1}$.

1.159 Человек, стоящий на скамье Жуковского, держит в руках стержень длиной $l = 2{,}5$ м и массой $m = 8$ кг, расположенный вертикально вдоль оси вращения скамейки. Эта система (скамья и человек) обладает моментом инерции $J = 10$ кг · м² и вращается с частотой $n_1 = 12$ мин $^{-1}$. Определите частоту n_2 вращения системы, если стержень повернуть в горизонтальное положение.

Ответ $n_2 = 8{,}5$ мин $^{-1}$.

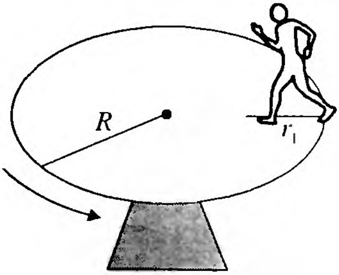
1.160 Человек массой $m = 60$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы массой $M = 120$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 10$ мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определите, с какой частотой n_2 будет тогда вращаться платформа.



Ответ $n_2 = \dfrac{(M + 2m)}{M} n_1 = 20$ мин$^{-1}$.

1.161 Платформа, имеющая форму сплошного однородного диска, может вращаться по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси. На краю платформы стоит человек, масса которого в 3 раза меньше массы платформы. Определите, как и во сколько раз изменится угловая скорость вращения платформы, если человек перейдет ближе к центру на расстояние, равное половине радиуса платформы.

Дано	*Решение*
$m_1 = \dfrac{m}{3}$	$L = \text{const}$,
$r_1 = \dfrac{R}{2}$	$L = J\omega$,
	$J_1\omega_1 = J_2\omega_2$,
$\dfrac{\omega_2}{\omega_1}$ — ?	$\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = \dfrac{J_1}{J_2}$,



$$J_1 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}R^2 = \frac{5}{6}mR^2, \qquad J_2 = \frac{mR^2}{2} + \frac{m}{3}\left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{7}{12}mR^2,$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{5mR^2 \cdot 12}{6 \cdot 7mR^2} = \frac{10}{7} = 1{,}43.$$

Ответ $\dfrac{\omega_2}{\omega_1} = 1{,}43$.

1.162

Человек массой $m = 60$ кг, стоящий на краю горизонтальной платформы радиусом $R = 1$ м и массой $M = 120$ кг, вращающейся по инерции вокруг неподвижной вертикальной оси с частотой $n_1 = 10$ мин$^{-1}$, переходит к ее центру. Считая платформу круглым однородным диском, а человека — точечной массой, определите работу, совершаемую человеком при переходе от края платформы к ее центру.

Дано

$m = 60$ кг

$M = 120$ кг

$R = 1$ м

$n_1 = 10$ мин$^{-1}$ $= 0{,}17$ с$^{-1}$

A — ?

Решение

$$A = \frac{J_2\omega_2^2}{2} - \frac{J_1\omega_1^2}{2},$$

$$J_1 = \frac{MR^2}{2} + mR^2, \qquad J_2 = \frac{MR^2}{2},$$

$$\omega_1 = 2\pi n_1, \qquad J_1\omega_1 = J_2\omega_2,$$

$$\omega_2 = \frac{J_1\omega_1}{J_2} = \left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\cdot\frac{2}{MR^2}\cdot 2\pi n_1 = \frac{M+2m}{M}\cdot 4\pi n_1,$$

$$A = \frac{MR^2}{2}\left(\frac{(M+2m)^2}{M^2}\cdot(4\pi n_1)^2\right)\cdot\frac{1}{2} - \left[\left(\frac{MR^2}{2} + mR^2\right)\cdot(2\pi n_1)^2\right]\cdot\frac{1}{2} =$$

$$= 2\pi^2 R^2 n_1^2\left[\frac{(M+2m)^2}{2M} - \left(\frac{M}{2} + m\right)\right].$$

Ответ $A = 65{,}8$ Дж.

1.163

Дайте определение и объяснение гироскопического эффекта.

1.164 К проволоке из углеродистой стали длиной $l = 1{,}5$ м и диаметром $d = 2{,}1$ мм подвешен груз массой $m = 110$ кг. Принимая для стали модуль Юнга $E = 216$ ГПа и предел пропорциональности $\sigma_п = 330$ МПа, определите: 1) какую долю первоначальной длины составляет удлинение проволоки при этом грузе; 2) превышает приложенное напряжение или нет предел пропорциональности.

Дано

$l = 1{,}5$ м

$d = 2{,}1$ мм $= 2{,}1 \cdot 10^{-3}$ м

$m = 110$ кг

$E = 216$ ГПа $= 216 \cdot 10^9$ Па

$\sigma_п = 330$ МПа $= 33 \cdot 10^7$ Па

1) $\dfrac{\Delta l}{l}$ — ?

2) σ — ?

Решение

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}, \qquad S = \frac{1}{4}\pi d^2,$$

$$F = mg, \qquad \frac{\Delta l}{l} = \frac{4mg}{\pi d^2 E},$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{4mg}{\pi d^2}.$$

Ответ 1) $\dfrac{\Delta l}{l} = 0{,}14$ %;

2) $\sigma = 312$ МПа, $\sigma < \sigma_п$.

1.165 Медная проволока сечением $S = 8$ мм^2 под действием растягивающей силы удлинилась на столько, на сколько она удлиняется при нагревании на 30 К. Принимая для меди модуль Юнга $E = 118$ ГПа и коэффициент линейного расширения $\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, определите числовое значение этой силы.

Дано

$S = 8$ мм^2 $= 8 \cdot 10^{-6}$ м^2

$\Delta T = 30$ К

$E = 118$ ГПа $= 118 \cdot 10^9$ Па

$\alpha = 1{,}7 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$

F — ?

Решение

$$\sigma = \frac{F}{S}, \qquad \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E} = \frac{F}{S}\cdot\frac{1}{E},$$

$$\Delta l = \frac{Fl}{ES}, \qquad \Delta l = \alpha l\, \Delta T, \qquad F = \alpha ES\, \Delta T.$$

Ответ $F = 481$ Н.

1.166 Резиновый шнур длиной 40 см и внутренним диаметром 8 мм натянут так, что удлинился на 8 см. Принимая коэффициент Пуассона для резины равным 0,5, определите внутренний диаметр натянутого шнура.

Дано	Решение
$l = 40$ см $= 0{,}4$ м $d = 8$ мм $= 8 \cdot 10^{-3}$ м $\Delta l = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м $\mu = 0{,}5$ d_1 — ?	$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}, \qquad \varepsilon' = \dfrac{\Delta d}{d}, \qquad \varepsilon' = \mu\varepsilon,$ $\dfrac{\Delta d}{d} = \mu\dfrac{\Delta l}{l}, \qquad \Delta d = \dfrac{\mu d\,\Delta l}{l},$ $d_1 = d - \Delta d = d\left(1 - \dfrac{\mu\,\Delta l}{l}\right).$

Ответ $d_1 = 7{,}2$ мм.

1.167 Определите работу, которую необходимо затратить, чтобы сжать пружину на 15 см, если известно, что сила пропорциональна деформации и под действием силы 20 Н пружина сжимается на 1 см.

Ответ $A = 22{,}5$ Дж.

1.168 Определите относительное удлинение алюминиевого стержня, если при его растяжении затрачена работа $A = 6{,}9$ Дж. Длина стержня $l = 1$ м, площадь поперечного сечения $S = 1$ мм², модуль Юнга для алюминия $E = 69$ ГПа.

Дано	Решение
$A = 6{,}9$ Дж $l = 1$ м $S = 1$ мм² $= 10^{-6}$ м² $E = 69$ ГПа $= 69 \cdot 10^{9}$ Па ε — ?	$\varepsilon = \dfrac{\Delta l}{l}, \qquad A = \Pi = \dfrac{1}{2}\dfrac{ES}{l}(\Delta l)^2,$ $A = \dfrac{1}{2}ESl\left(\dfrac{\Delta l}{l}\right)^2 = \dfrac{1}{2}ESl\varepsilon^2, \qquad \varepsilon = \sqrt{\dfrac{2A}{ESl}}.$ **Ответ** $\varepsilon = 0{,}014$.

1.169 Определите объемную плотность потенциальной энергии упруго-растянутого медного стержня, если относительное изменение длины стержня $\varepsilon = 0{,}01$ и для меди модуль Юнга $E = 118$ ГПа.

Ответ $w = 5{,}9$ МДж/м^3.

1.170 Два вагона (масса каждого $m = 15$ т) движутся навстречу друг другу со скоростью $v = 3$ м/с и сталкиваются между собой. Определите сжатие пружины буферов вагонов, если известно, что сила пропорциональна деформации, и под действием силы $F = 50$ кН пружина сжимается на $\Delta l = 1$ см.

Дано

$m = 15$ т $= 15 \cdot 10^3$ кг
$v = 3$ м/с
$F = 50$ кН $= 5 \cdot 10^4$ Н
$\Delta l = 1$ см $= 10^{-2}$ м

l — ?

Решение

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{2kl^2}{2}, \qquad k = \frac{F}{\Delta l},$$

$$l = \sqrt{\frac{mv^2\,\Delta l}{2F}} = v\sqrt{\frac{m\,\Delta l}{2F}}.$$

Ответ $l = 11{,}6$ см.

• •

Рекомендуемая литература

Трофимова Т. И. Курс физики, М., 2001.
Трофимова Т. И. Сборник задач по курсу физики, М., 1996.
Трофимова Т. И. Физика. 500 основных законов и формул. Справочник, М., 2000.
Трофимова Т. И. Оптика и атомная физика: законы, проблемы, задачи (справочник для студентов вузов), М., 1998.

1.5. Тяготение. Элементы теории поля

1.171 Определите период обращения вокруг Солнца искусственной планеты, если известно, что большая полуось ее эллиптической орбиты больше на 10^7 км большой полуоси земной орбиты.

Дано	*Решение*
$R_1 = R_2 + R$ $R_2 = 1{,}49\cdot 10^{11}$ м $R = 10^7$ км $= 10^{10}$ м $T_2 = 12$ мес T_1 — ?	$\dfrac{T_1^2}{T_2^2} = \dfrac{R_1^3}{R_2^3}$, $\quad T_1 = T_2\sqrt{\dfrac{R_1^3}{R_2^3}}$. Вычисления: $T_1 = 12\text{ мес}\cdot\sqrt{\left(\dfrac{1{,}49\cdot 10^{11}\text{ м} + 10^{10}\text{ м}}{1{,}49\cdot 10^{11}\text{ м}}\right)^3} = 13{,}2$ мес.

Ответ $T_1 = 13{,}2$ мес.

1.172 Период обращения кометы Галлея вокруг Солнца $T = 76$ лет. Минимальное расстояние, на котором она проходит от Солнца, составляет 180 Гм. Определите максимальное расстояние, на которое комета Галлея удаляется от Солнца. Радиус орбиты Земли принять равным $R_0 = 150$ Гм.

Дано	*Решение*
$T = 76$ лет $R_{\min} = 180$ Гм $= 1{,}8\cdot 10^{11}$ м $R_0 = 150$ Гм $= 1{,}5\cdot 10^{11}$ м $R_{\max}$ — ?	$\dfrac{T^2}{T_0^2} = \dfrac{A^3}{R_0^3}$, $\quad A = \dfrac{R_{\min} + R_{\max}}{2}$, $R_{\max} = 2A - R_{\min}$, $\quad A = \sqrt[3]{R_0^3\cdot\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^2} = R_0\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{2/3}$, $R_{\max} = 2R_0\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{2/3} - R_{\min}$.

Ответ $R_{\max} = 5{,}2\cdot 10^9$ км.

1.173 Считая орбиту Земли круговой, определите линейную скорость v движения Земли вокруг Солнца.

Дано

$M = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг
$R = 1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)

v — ?

Решение

$$\frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Ответ $v = 29{,}8$ км/с.

1.174 Период обращения искусственного спутника Земли составляет 3 ч. Считая его орбиту круговой, определите, на какой высоте от поверхности Земли находится спутник.

Дано

$T = 3$ ч $= 1{,}08 \cdot 10^4$ с
$R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м
$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2)

h — ?

Решение

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}, \qquad r = R + h,$$

$$v = \omega r, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}}, \qquad h = \sqrt[3]{\frac{GMT^2}{4\pi^2}} - R.$$

Ответ $h = 4{,}19$ Мм.

• •

Некоторые астрономические величины

Радиус Земли	$6{,}37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6{,}95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг

1.175 Планета массой M движется по окружности вокруг Солнца со скоростью v (относительно гелиоцентрической системы отсчета). Определите период обращения этой планеты вокруг Солнца.

Дано	Решение
M $M_\text{С}$ v	$T = \dfrac{2\pi R}{v}$, $\qquad \dfrac{Mv^2}{R} = G\dfrac{MM_\text{С}}{R^2}$,
T — ?	$R = \dfrac{GM_\text{С}}{v^2}$, $\qquad T = \dfrac{2\pi GM_\text{С}}{v^3}$.

Ответ $T = \dfrac{2\pi GM_\text{С}}{v^3}$.

1.176 Определите, во сколько раз сила притяжения на Земле больше силы притяжения на Марсе, если радиус Марса составляет 0,53 радиуса Земли, а масса Марса — 0,11 массы Земли.

Ответ $n = 2{,}55$.

1.177 Определите среднюю плотность Земли, считая известными гравитационную постоянную, радиус Земли и ускорение свободного падения на Земле.

Дано	Решение
$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м^3/(кг · с^2) $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м $g = 9{,}81$ м/с^2	$mg = G\dfrac{mM}{R^2}$, $M = \rho V$, $\qquad V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$,
ρ — ?	$\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{gR^2}{G} \cdot \dfrac{3}{4\pi R^3}$, $\qquad \rho = \dfrac{3g}{4\pi GR}$.

Ответ $\rho = 5{,}51$ г/см^3.

1.178 Две материальные точки массами m_1 и m_2 расположены друг от друга на расстоянии R. Определите угловую скорость вращения, с которой они должны вращаться вокруг общего центра масс, чтобы расстояние между ними осталось постоянным.

Дано	*Решение*
m_1 m_2 $R = \text{const}$ ω — ?	$\frac{m_1 v_1^2}{r_1} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$, $\frac{m_2 v_2^2}{r_2} = G\frac{m_1 m_2}{R^2}$, $v_1 = \omega r_1$, $v_2 = \omega r_2$, $r_1 + r_2 = R$, $\omega^2 r_1 = G\frac{m_2}{R^2}$,

$$\omega^2 r_2 = G\frac{m_1}{R^2}, \qquad \omega^2 (r_1 + r_2) = \frac{G}{R^2}(m_1 + m_2), \qquad \omega = \sqrt{\frac{G}{R^3}(m_1 + m_2)}.$$

Ответ $\omega = \sqrt{\frac{G}{R^3}(m_1 + m_2)}$.

1.179 Два одинаковых однородных шара из одинакового материала, соприкасаясь друг с другом, притягиваются. Определите, как изменится сила притяжения, если массу шаров увеличить в $n = 3$ раза за счет увеличения их размеров.

Дано	*Решение*
$m_1 = m_2 = m$ $R_1 = R_2 = R$ $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ $M = nm$ $n = 3$ $\frac{F_3}{F}$ — ?	$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$, $r = 2R$, $F = \frac{Gm^2}{4R^2}$, $m = \rho V = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, $R = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho}}$, $F_3 = G\frac{M^2}{r_3^2}$, $r_3 = 2R_3$, $R_3 = \sqrt[3]{\frac{3M}{4\pi\rho}}$, $F_3 = \frac{Gn^2 m^2}{4 \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3nm}{4\pi\rho}\right)^2}} = \frac{n^2}{n^{2/3}} F = n^{4/3} F$, $\frac{F_3}{F} = n^{4/3}$.

Ответ $\frac{F_3}{F} = n^{4/3} = 4{,}33$.

1.180 Определите высоту, на которой ускорение свободного падения составляет 25% от ускорения свободного падения на поверхности Земли.

Ответ $h = R$, R — радиус Земли.

1.181 Считая плотность Земли постоянной, определите глубину, на которой ускорение свободного падения составляет 25% от ускорения свободного падения на поверхности Земли.

Ответ $h = 0{,}75R$, R — радиус Земли.

1.182 На какой высоте h ускорение свободного падения вдвое меньше его значения на поверхности Земли.

Дано	*Решение*
$g' = g/2$ $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м h — ?	$mg = G\dfrac{mM}{R^2}$, $\quad mg' = G\dfrac{mM}{(R+h)^2}$, $\dfrac{g}{g'} = \dfrac{(R+h)^2}{R^2}$, $\quad \dfrac{g}{g'} = 2$,

$$(R+h)^2 = 2R^2, \qquad h^2 + 2Rh - R^2 = 0, \qquad h = R(\sqrt{2} - 1).$$

Ответ $h = 2{,}64$ Мм.

● ●

Некоторые астрономические величины

Радиус Луны	$1{,}74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7{,}33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от центра Земли до центра Солнца	$1{,}49 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от центра Земли до центра Луны	$3{,}84 \cdot 10^8$ м

1.183

Стационарным искусственным спутником Земли называется спутник, находящийся постоянно над одной и той же точкой экватора. Определите расстояние такого спутника до центра Земли.

Дано	***Решение***
$T_1 = T = 24$ ч $= 86400$ с $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м r — ?	$mg = G\dfrac{mM}{R^2}$, $\quad mg_1 = G\dfrac{mM}{r^2}$, $\dfrac{g}{g_1} = \dfrac{r^2}{R^2}$, $\quad g_1 = \dfrac{gR^2}{r^2}$,

$$g_1 = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot r = \frac{gR^2}{r^2}, \qquad r = \sqrt[3]{\frac{gR^2T^2}{4\pi^2}}.$$

Ответ $r = 4{,}22 \cdot 10^4$ км.

1.184

На экваторе некоторой планеты (плотность планеты $\rho = 3$ г/см³) тела весят в два раза меньше, чем на полюсе. Определите период обращения планеты вокруг собственной оси.

Дано	***Решение***
$\rho = 3$ г/см³ $= 3 \cdot 10^8$ кг/м³ $P_\text{э} = \dfrac{1}{2}P_\text{п}$ T — ?	$P_\text{п} = mg$, $\quad P_\text{э} = mg - \dfrac{mv^2}{R}$, $\quad mg = G\dfrac{mM}{R^2}$, $M = \dfrac{4}{3}\pi\rho R^3$, $\quad g = \dfrac{GM}{R^2} = \dfrac{4}{3}\pi\rho G R$, $\quad v = \dfrac{2\pi R}{T}$,

$$mg = 2\left(mg - \frac{mv^2}{R}\right), \qquad \frac{1}{2}mg = \frac{mv^2}{R}, \qquad g = \frac{2v^2}{R}, \qquad g = \frac{2 \cdot 4\pi^2 R^2}{T^2 R} = \frac{8\pi^2 R}{T^2},$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho G R = \frac{8\pi^2 R}{T^2}, \qquad T^2 = \frac{8\pi^2 R \cdot 3}{4\pi\rho G R} = \frac{6\pi}{\rho G}, \qquad T = \sqrt{\frac{6\pi}{\rho G}}.$$

Ответ $T = 2{,}7$ ч.

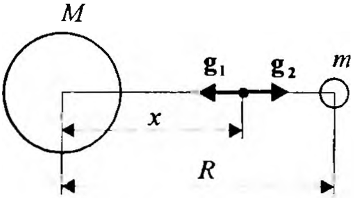
1.185 Принимая, что радиус Земли известен, определите, на какой высоте h над поверхностью Земли напряженность поля тяготения равна 4,9 Н/кг.

Дано	Решение
$g_1 = 4{,}9$ Н/кг $g = 9{,}81$ Н/кг $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м h — ?	$g_1 = \frac{F_1}{m} = \frac{GM}{(R+h)^2}$, $g = \frac{GM}{R^2}$, $\frac{g}{g_1} = \frac{(R+h)^2}{R^2}$, $\frac{R+h}{R} = \sqrt{\frac{g}{g_1}}$, $h = R\left(\sqrt{\frac{g}{g_1}} - 1\right)$.

Ответ $h = 2{,}64$ Мм.

1.186 Определите, в какой точке (считая от Земли) на прямой, соединяющей центры Земли и Луны, напряженность поля тяготения равна нулю. Расстояние между центрами Земли и Луны равно R, масса Земли в 81 раз больше массы Луны.

Дано	Решение
$M = 81m$ R x — ?	$\mathbf{g}_1 + \mathbf{g}_2 = 0$, $g_1 = g_2$,



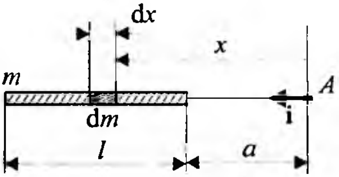
$$g_1 = G\frac{M}{x^2}, \quad g_2 = G\frac{M}{81(R-x)^2}, \quad G\frac{M}{x^2} = G\frac{M}{81(R-x)^2},$$

$$x^2 = 81(R-x)^2, \quad x = 9(R-x), \quad 10x = 9R,$$

$$x = 0{,}9R.$$

Ответ $x = 0{,}9R$.

1.187 Имеется тонкий однородный стержень массой m и длиной l. Для точки, находящейся на одной прямой со стержнем на расстоянии a от его ближайшего конца, определите: 1) потенциал гравитационного поля стержня; 2) напряженность его гравитационного поля.

Дано	*Решение*
m l a	
1) φ — ? 2) $\mathbf{g}$ — ?	

$$\mathrm{d}m = \frac{m}{l}\,\mathrm{d}x, \qquad \mathrm{d}\varphi = -G\frac{\mathrm{d}m}{x} = -G\frac{m}{l}\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

$$\varphi = -G\frac{m}{l}\int_{a}^{l+a}\frac{\mathrm{d}x}{x} = -G\frac{m}{l}\ln\frac{l+a}{a}, \qquad \mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}a}\mathbf{i},$$

$$\mathbf{g} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(-G\frac{m}{l}\ln\frac{l+a}{a}\right)\mathbf{i} = G\frac{m}{(l+a)a}\mathbf{i}.$$

Ответ

1) $\varphi = -G\dfrac{m}{l}\ln\dfrac{l+a}{a}$;

2) $\mathbf{g} = G\dfrac{m}{(l+a)a}\mathbf{i}$.

● ●

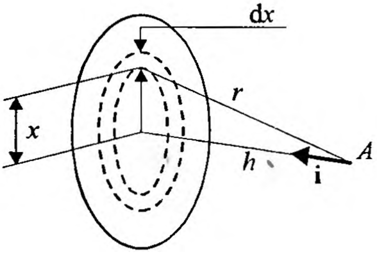
Связь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \text{или} \quad \mathbf{g} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\mathbf{k}\right),$$

где **i, j, k** — единичные векторы координатных осей.

1.188 Тонкий однородный диск радиусом R имеет массу m. Определите в точке A, расположенной на оси диска на расстоянии h от него: 1) потенциал гравитационного поля; 2) напряженность гравитационного поля.

Дано	*Решение*
R m h	
1) φ — ? 2) $\mathbf{g}$ — ?	



$$\mathrm{d}m = \frac{m}{\pi R^2} 2\pi x\,\mathrm{d}x = \frac{2mx\,\mathrm{d}x}{R^2},$$

$$\mathrm{d}\varphi = -G\frac{\mathrm{d}m}{r}, \qquad r = \sqrt{h^2 + x^2}, \qquad \mathrm{d}\varphi = -G\frac{2m}{R^2}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{h^2 + x^2}},$$

$$\varphi = -G\frac{2m}{R^2}\int_0^R \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{h^2 + x^2}} = -G\frac{2m}{R^2}\left[\sqrt{h^2 + x^2}\right]_0^R = -G\frac{2m}{R^2}\left[\sqrt{h^2 + R^2} - h\right],$$

$$\mathbf{g} = -\operatorname{grad}\varphi = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}h}\mathbf{i} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left[G\frac{2m}{R^2}(\sqrt{h^2 + R^2} - h)\right]\mathbf{i} =$$

$$= -\left[G\frac{2m}{R^2}\left(\frac{1}{2}\left(h^2 + R^2\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2h - 1\right)\right]\mathbf{i} = G\frac{2m}{R^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right)\mathbf{i}.$$

Ответ

1) $\varphi = -G\frac{2m}{R^2}\left[\sqrt{h^2 + R^2} - h\right]$;

2) $\mathbf{g} = G\frac{2m}{R^2}\left(1 - \frac{h}{\sqrt{h^2 + R^2}}\right)\mathbf{i}$.

1.189 Для тела массой m, находящегося в гравитационном поле Земли над ее поверхностью, выведите зависимость потенциальной энергии тела от расстояния до центра Земли. Считать известными радиус Земли R_0 и ускорение свободного падения g на поверхности Земли.

Дано	***Решение***
m R_0 g	$\Pi = \int\limits_{\infty}^{R} F\,\mathrm{d}r\,, \qquad F = G\dfrac{mM}{r^2}\,,$
$\Pi(R)$ — ?	$\Pi = GmM\int\limits_{\infty}^{R}\dfrac{\mathrm{d}r}{r^2} = -GmM\dfrac{1}{r}\Big\vert_{\infty}^{R} = -G\dfrac{mM}{R}\,,$

$$mg = G\frac{mM}{R_0^2}\,, \qquad GmM = mgR_0^2\,, \qquad \Pi = -\frac{mgR_0^2}{R}\,.$$

Ответ $\Pi(\mathrm{R}) = -\dfrac{mgR_0^2}{R}\,.$

1.190 Как известно, искусственный спутник Земли движется вокруг нее по круговой орбите. Определите, во сколько раз гравитационная потенциальная энергия спутника больше его кинетической энергии.

Дано	***Решение***
R	$\dfrac{mv^2}{R} = G\dfrac{mM}{R^2}\,, \qquad T = \dfrac{mv^2}{2}\,,$
$\dfrac{\lvert\Pi\rvert}{T}$ — ?	$\lvert\Pi\rvert = G\dfrac{mM}{R}\,,$

$$\frac{\lvert\Pi\rvert}{T} = \frac{GmM}{R}\cdot\frac{2}{mv^2}\cdot\frac{R}{R} = 2\,.$$

Ответ $\dfrac{\lvert\Pi\rvert}{T} = 2\,.$

1.191 Два алюминиевых шарика ($\rho = 2{,}7$ г/см^3) радиусами $r_1 = 3$ см и $r_2 = 5$ см соприкасаются друг с другом. Определите потенциальную энергию их гравитационного взаимодействия.

Дано

$\rho = 2{,}7$ г/см^3 =
$= 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3
$r_1 = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м
$r_2 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

Π — ?

Решение

$$\Pi = -G\frac{m_1 m_2}{R}, \qquad R = r_1 + r_2,$$

$$m_1 = \rho V_1 = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_1^3, \qquad m_2 == \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r_2^3,$$

$$\Pi = -G \cdot \frac{16}{9}\pi^2 \rho^2 \frac{r_1^3 r_2^3}{r_1 + r_2}.$$

Ответ $\Pi = -\,0{,}36$ нДж.

1.192 Два одинаковых однородных шара из одинакового материала соприкасаются друг с другом. Определите, как изменится потенциальная энергия их гравитационного взаимодействия, если массу шаров увеличить в 3 раза.

Дано

$m_1 = m_2 = m$
$r_1 = r_2 = r$
$\rho_1 = \rho_2 = \rho$
$M = nm$
$n = 3$

$\dfrac{\Pi_2}{\Pi_1}$ — ?

Решение

$$\Pi_1 = -G\frac{m_1 m_2}{r_1 + r_2} = -G\frac{m^2}{2r}, \qquad \Pi_2 = -G\frac{M^2}{2R},$$

$$M = nm, \qquad m = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad M = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3,$$

$$\frac{R^3}{r^3} = \frac{M}{m} = n, \qquad \frac{R}{r} = \sqrt[3]{n},$$

$$\frac{\Pi_2}{\Pi_1} = \frac{M^2 r}{m^2 R} = n^2 \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = n^{5/3}.$$

Ответ $\dfrac{\Pi_2}{\Pi_1} = 6{,}24.$

1.193 Принимая, что атмосфера на Луне отсутствует, определите скорость падения метеорита на ее поверхность. Скорость метеорита вдали от Луны считать малой.

Ответ $v = 2{,}37$ км/с.

1.194 Спутник поднимают на высоту $h = 6370$ км и запускают его по круговой орбите на той же высоте. Определите отношение работ на поднятие (A_1) и на запуск (A_2) спутника.

Дано

$h = 6370\ \text{км} = 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{м}$

$R_{\text{З}} = 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{м}$

$R = R_{\text{З}} + h$

$\dfrac{A_1}{A_2}$ — ?

Решение

$$A_1 = \Delta\Pi = -G\frac{mM}{R_{\text{З}} + h} - \left(-G\frac{mM}{R_{\text{З}}}\right) =$$

$$= GmM\left(\frac{1}{R_{\text{З}}} - \frac{1}{R_{\text{З}} + h}\right) = \frac{GmMh}{R_{\text{З}}(R_{\text{З}} + h)},$$

$$A_2 = \frac{mv^2}{2}, \qquad \frac{mv^2}{R} = G\frac{mM}{R^2},$$

$$A_2 = \frac{GmM}{2R} = \frac{GmM}{2(R_{\text{З}} + h)}, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \frac{h \cdot 2(R_{\text{З}} + h)}{R_{\text{З}}(R_{\text{З}} + h)} = \frac{2h}{R_{\text{З}}}.$$

Ответ $\dfrac{A_1}{A_2} = 2.$

1.195 Определите числовое значение первой космической скорости, т. е. горизонтально направленной минимальной скорости, которую надо сообщить телу, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала круговой (тело могло превратиться в искусственный спутник Земли).

Ответ $v_1 = 7{,}9$ км/с.

1.196 Определите числовое значение второй космической скорости, т. е. наименьшей скорости, которую надо сообщить телу, чтобы его орбита в поле тяготения Земли стала параболической (тело могло превратиться в спутник Солнца).

Ответ $v_2 = \sqrt{2gR_{\text{З}}} = 11{,}2$ км/с.

1.197 Определите числовое значение второй космической скорости для Луны.

Ответ $v_2 = 2{,}37$ км/с.

1.198 Искусственный спутник Земли движется по круговой орбите на высоте $h = 500$ км. Определите скорость его движения.

Дано	**Решение**
$h = 500$ км $= 5 \cdot 10^5$ м $R = 6{,}37 \cdot 10^6$ м $M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг v — ?	$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mM}{r^2}$, $r = R + h$, $v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = \sqrt{\frac{GM}{R+h}}$. **Ответ** $v = 7{,}62$ км/с.

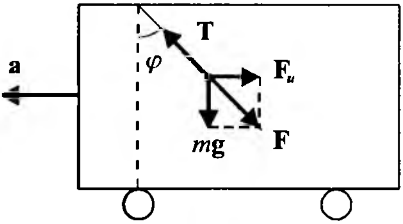
1.199 Два спутника с одинаковой массой движутся вокруг Земли по круговым орбитам разных радиусов R_1 и R_2 ($R_2 > R_1$). Определите: 1) отношение кинетической энергии второго спутника к первому; 2) как зависят от радиуса орбиты потенциальная и полная энергия спутников.

Ответ 1) $\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1}{R_2}$; 2) П и E возрастают с удалением от Земли.

1.200 Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы тело массой $m = 1000$ кг, находящееся на Земле, смогло превратиться в спутник Солнца (при отсутствии сопротивления среды).

Ответ $A = 62{,}6$ ГДж.

1.201 К потолку вагона, движущегося в горизонтальном направлении с ускорением $a = 9{,}81$ м/с², подвешен на нити шарик массой $m = 200$ г. Определите для установившегося движения: 1) силу натяжения нити T; 2) угол φ отклонения нити от вертикали.

Дано	*Решение*
$a = 9{,}81$ м/с² $g = 9{,}81$ м/с² $m = 200$ г $= 0{,}2$ кг 1) T — ? 2) φ — ?	

$$\mathbf{F}_и = -m\mathbf{a}, \qquad \mathbf{F}_и + m\mathbf{g} = \mathbf{F}, \qquad \mathbf{T} = -\mathbf{F},$$

$$|F_и| = ma, \qquad F = \sqrt{(mg)^2 + (ma)^2}, \qquad |T| = |F|,$$

$$T = m\sqrt{g^2 + a^2}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{ma}{mg} = \frac{a}{g}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{a}{g}.$$

Ответ 1) $T = 2{,}77$ Н; 2) $\varphi = 45^\circ$.

• •

Силы инерции

$$\mathbf{F}_{ин} = \mathbf{F}_н + \mathbf{F}_ц + \mathbf{F}_К,$$

где $\mathbf{F}_и$ — силы инерции, проявляющиеся при поступательном движении системы отсчета с ускорением a_0: $F_н = -ma_0$; $\mathbf{F}_ц$ — центробежные силы инерции (силы инерции, действующие во вращающейся системе отсчета на тела, удаленные от оси вращения на конечное расстояние R): $F_ц = -m\omega^2 R$; $\mathbf{F}_К$ — кориолисова сила инерции (силы инерции, действующие на тело, движущееся со скоростью v' во вращающейся системе отсчета): $\mathbf{F}_К = 2m[\mathbf{v}'\,\omega]$.

1.202 Вагон под действием силы тяжести катится вдоль дороги, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом. Сила трения составляет $\eta = 10\%$ от веса вагона. К потолку вагона на нити подвешен шарик массой $m = 15$ г. Определите: 1) силу F, действующую на нить; 2) угол φ отклонения нити от вертикали.

Дано

$\alpha = 30°$

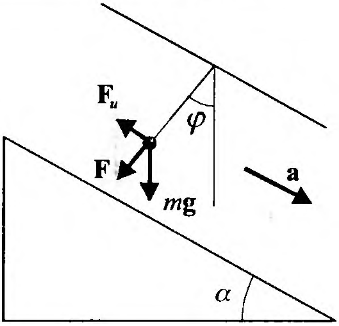
$\eta = 10\%$

$m = 15 \text{ г} = 15 \cdot 10^{-3}$ кг

1) F — ?

2) φ — ?

Решение



$Ma = Mg\sin\alpha - F_{\text{тр}}$,

$F_{\text{тр}} = \eta Mg$, $\quad Ma = Mg\sin\alpha - \eta Mg$,

$a = g(\sin\alpha - \eta)$, $\quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_и + m\mathbf{g}$, $\quad \mathbf{F}_и = -m\mathbf{a}$,

$$F = \sqrt{F_и^2 + (mg)^2 - 2F_и mg\cos(90°-\alpha)},$$

$$F = \sqrt{\left[mg(\sin\alpha - \eta)\right]^2 + (mg)^2 - 2(mg)^2(\sin\alpha - \eta)\cos(90°-\alpha)} =$$

$$= mg\sqrt{(\sin\alpha - \eta)^2 + 1 - 2(\sin\alpha - \eta)\sin\alpha},$$

$$\frac{F_и}{\sin\varphi} = \frac{F}{\sin(90°-\alpha)}, \qquad \sin\varphi = \frac{F_и\sin(90°-\alpha)}{F},$$

$$\varphi = \arcsin\frac{mg(\sin\alpha - \eta)\cos\alpha}{F}.$$

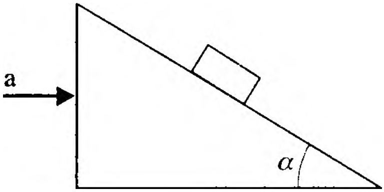
Ответ 1) $F = 0{,}128$ Н; 2) $\varphi = 23{,}5°$.

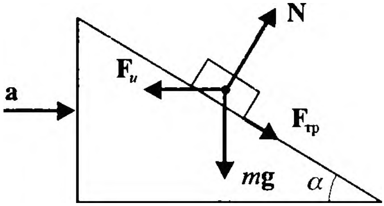
1.203 Вагон под действием силы тяжести катится вдоль дороги, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, а затем переходящей в горизонтальный участок. Силы трения на обоих участках составляют 10% от веса вагона. К потолку вагона на нити подвешен шарик массой $m = 15$ г. Определите силу F, действующую на нить, и угол φ отклонения нити от вертикали на: 1) наклонном; 2) горизонтальном участках дороги.

Ответ 1) $F = 0{,}128$ Н; $\varphi = 23{,}5°$; 2) $F = 0{,}148$ Н; $\varphi = 5{,}7°$.

1.204 На наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 30°$ лежит тело. Коэффициент трения между телом и наклонной плоскостью $f = 0{,}2$. Определите наименьшее горизонтально направленное ускорение a, с которым должна двигаться наклонная плоскость, чтобы тело, лежащее на ней, поднималось по наклонной плоскости.

Дано	*Решение*
$\alpha = 30°$	$\lvert F_и \rvert = ma$,
$f = 0{,}2$	$a = a_{\min}$, $\quad mg\sin\alpha + F_{тр} - F_и\cos\alpha = 0$,
a — ?	$F_{тр} = fN = f(mg\cos\alpha + F_и\sin\alpha)$,





$$mg\sin\alpha + f(mg\cos\alpha + ma\sin\alpha) - ma\cos\alpha = 0,$$

$$ma\cos\alpha - fma\sin\alpha = mg\sin\alpha + fmg\cos\alpha,$$

$$a = \frac{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}{\cos\alpha - f\sin\alpha}.$$

Ответ $a = 8{,}62$ м/с^2.

1.205 Самолет, летящий со скоростью $v = 360$ км/ч, описывает вертикальную петлю Нестерова радиусом $R = 360$ м. Определите силу, прижимающую летчика ($m = 80$ кг) к сиденью: 1) в нижней точке этой петли; 2) в верхней точке этой петли.

Дано

$v = 360$ км/ч = 100 м/с

$R = 360$ м

$m = 80$ кг

1) F_1 — ?

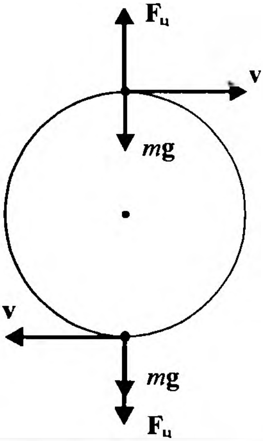
2) F_2 — ?

Решение

$$|F_ц| = \frac{mv^2}{R},$$

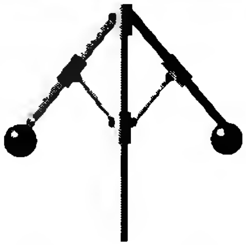
$$F_1 = \frac{mv^2}{R} + mg,$$

$$F_2 = \frac{mv^2}{R} - mg.$$



Ответ 1) $F_1 = 3$ кН; 2) $F_2 = 1{,}44$ кН.

1.206 Модель центробежного регулятора вращается с частотой $n = 2$ с$^{-1}$. Учитывая только массу шаров, определите угол отклонения стержней, несущих шары. Длина стержней $l = 15$ см.



Ответ $\alpha = 65{,}5°$.

Некоторые внесистемные единицы

1 сут = 86400 с

1 год = 365,25 сут = $3{,}16 \cdot 10^7$ с

1° = $1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад

1′ = $2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад

1″ = $4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад

1 рад = 57,3°

1 мм рт. ст. = 133,3 Па

1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж

1.207 Определите, во сколько раз ускорение a_1, обусловленное центробежной силой на экваторе Земли, меньше ускорения a_2, вызываемого силой тяготения на поверхности Земли.

Дано

$T = 24$ ч $= 86400$ с

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²)

$R_З = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ м

$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг

$\dfrac{a_2}{a_1}$ — ?

Решение

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{F_{тяг}}{F_ц}, \qquad F_{тяг} = G\frac{mM}{R_З^2},$$

$$F_ц = m\omega^2 R_З, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{GmMT^2}{R_З^2 m \cdot 4\pi^2 R_З} = \frac{GMT^2}{4\pi^2 R_З^3}.$$

Ответ $\dfrac{a_2}{a_1} = 292$.

1.208 Мотоциклист в цирке едет вдоль внутренней поверхности вертикального цилиндра радиусом $r = 15$ м. Центр масс мотоцикла с человеком отстоит на $h = 1$ м от места соприкосновения колес со стенкой. Коэффициент трения шин о стенки $f = 0{,}5$. Определите: 1) минимальную скорость $\upsilon_{\min}$, с которой должен ехать мотоциклист; 2) угол α наклона мотоциклиста к горизонтальной поверхности при данной минимальной скорости.

Ответ 1) $\upsilon_{\min} = 17{,}1$ м/с; 2) $\alpha = 26{,}6°$.

• •

Некоторые математические формулы

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2} \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right) = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

1.209 Тело массой $m = 1$ кг, падая свободно в течение $t = 4$ с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi = 45°$. Учитывая вращение Земли, определите и нарисуйте все силы, действующие на тело в момент его падения на Землю.

Дано

$m = 1$ кг

$t = 4$ с

$\varphi = 45°$

$G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ м³/(кг · с²)

$R_\text{з} = 6{,}37 \cdot 10^{6}$ м

$M = 5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг

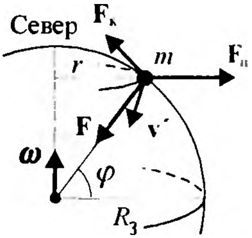
F — ?

Решение

1. Сила тяготения

$$\mathbf{F}_\text{т} = G\frac{mM}{R_\text{з}^3} \cdot \mathbf{R}_\text{з},$$

$$F_\text{т} = G\frac{mM}{R_\text{з}^2}.$$



2. Центробежная сила инерции

$$\mathbf{F}_\text{ц} = -m\omega^2\mathbf{r}, \qquad F_\text{ц} = m\omega^2 r,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad r = R_\text{з}\cos\varphi, \qquad F_\text{ц} = \frac{m \cdot 4\pi^2 R_\text{з}\cos\varphi}{T^2}.$$

3. Сила Кориолиса

$$\mathbf{F}_\text{К} = 2m[\mathbf{v}'\,\omega], \qquad F_\text{К} = 2mv'\omega\sin(\mathbf{v}', \omega),$$

$$v' = gt, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$\sin(\mathbf{v}', \omega) = \cos\varphi,$$

$$F_\text{К} = 2mv'\frac{2\pi}{T}\cos\varphi = \frac{4m\pi gt\cos\varphi}{T}.$$

Ответ 1) $F = 9{,}83$ Н; 2) $F_\text{ц} = 23{,}8$ мН; 3) $F_\text{К} = 4{,}04$ мН.

1.210 Тело массой $m = 1$ кг, падая свободно в течение $\tau = 6$ с, попадает на Землю в точку с географической широтой $\varphi = 30°$. Учитывая вращение Земли, определите отклонение тела при его падении от вертикали.

Дано

$m = 1$ кг

$\tau = 6$ с

$\varphi = 30°$

$T = 24$ ч $= 86400$ с

s — ?

Решение

$$\mathbf{F}_\text{К} = 2m[\mathbf{v}'\,\boldsymbol{\omega}],$$

$$F_\text{К} = 2mv'\omega\sin(\mathbf{v}', \boldsymbol{\omega}) = 2mv'\omega\cos\varphi,$$

$$v' = gt, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$a_\text{К} = \frac{F_\text{К}}{m} = 2gt\frac{2\pi}{T}\cos\varphi,$$

$$v_\text{К} = \int_0^t a_\text{К}\,\mathrm{d}t = \frac{4\pi g\cos\varphi}{T}\int_0^t t\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi g t^2\cos\varphi}{T},$$

$$s = \int_0^\tau v_\text{К}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi g\cos\varphi}{T}\int_0^\tau t^2\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi g\tau^3\cos\varphi}{3T}.$$

Ответ $s = 4{,}45$ см.

* * *

Некоторые математические формулы

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^x) = \mathrm{e}^x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1.6. Элементы механики жидкостей

1.211 Полый медный шар ($\rho = 8{,}93$ г/см^3) весит в воздухе 3 Н, а в воде ($\rho' = 1$ г/см^3) — 2Н. Пренебрегая выталкивающей силой воздуха, определите объем внутренней полости шара.

Ответ $V_{\text{пол}} = \dfrac{1}{g}\left(\dfrac{P - P'}{\rho'} - \dfrac{P}{\rho}\right) = 68$ см^3.

1.212 На столе стоит цилиндрический сосуд, наполненный водой до уровня $H = 20$ см от дна. Если в воду ($\rho = 1$ г/см^3) опустить плавать тонкостенный никелевый стакан ($\rho' = 8{,}8$ г/см^3), то уровень воды подымается на $h = 2{,}2$ см. Определите уровень H_1 воды в сосуде, если стакан утопить.

Дано

$H = 20$ см $= 0{,}2$ м

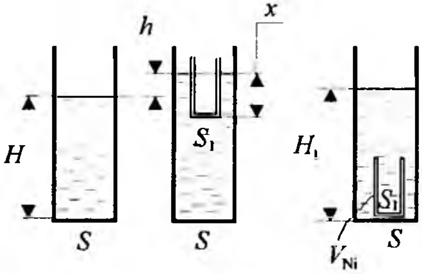
$h = 2{,}2$ см $= 2{,}2 \cdot 10^{-2}$ м

$\rho = 1$ г/см$^3 = 10^3$ кг/м^3

$\rho' = 8{,}8$ г/см$^3 =$
$= 8{,}8 \cdot 10^3$ кг/м^3

H_1 — ?

Решение



$HS = H_1S - V_{\text{Ni}}$, $\quad \rho' g V_{\text{Ni}} = F_A$, $\quad F_A = \rho g S_1 x$,

$\rho' g V_{\text{Ni}} = \rho g S_1 x$, $\quad (H + h)S = HS + S_1 x$, $\quad S_1 x = hS$,

$\rho' g V_{\text{Ni}} = \rho g h S$, $\quad V_{\text{Ni}} = \dfrac{hS\rho}{\rho'}$, $\quad H_1 = H + \dfrac{V_{\text{Ni}}}{S} = H + \dfrac{h\rho}{\rho'}$.

Ответ $H_1 = 20{,}2$ см.

1.213 По трубе радиусом $r = 1{,}5$ см течет углекислый газ ($\rho = 7{,}5$ кг/м^3). Определите скорость его течения, если за $t = 20$ мин через поперечное сечение трубы протекает $m = 950$ г газа.

Ответ $v = 0{,}15$ м/с.

1.214 В бочку заливается вода со скоростью 200 см^3/с. На дне бочки образовалось отверстие площадью поперечного сечения 0,8 см^2. Пренебрегая вязкостью воды, определите уровень воды в бочке.

Дано	*Решение*
$V = 200\ \text{см}^3 = 2 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^3$ $t = 1$ с $S = 0{,}8\ \text{см}^2 = 0{,}8 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2$ h — ?	$v = \sqrt{2gh}, \qquad h = \dfrac{v^2}{2g},$ $vS = \dfrac{V}{t}, \qquad v = \dfrac{V}{St}, \qquad h = \dfrac{V^2}{2gS^2t^2}.$

Ответ $h = 31{,}9$ см.

1.215 В сосуд заливается вода со скоростью 0,5 л/с. Пренебрегая вязкостью воды, определите диаметр отверстия в сосуде, при котором вода поддерживалась бы в нем на постоянном уровне $h = 20$ см.

Ответ $d = 1{,}8$ см.

● ●

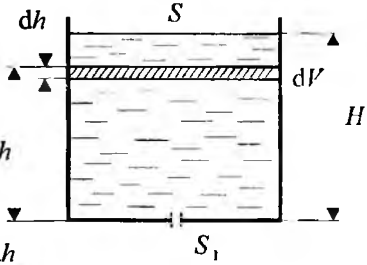
Формула Торричелли

$$v = \sqrt{2gh},$$

где h — глубина, на которой находится отверстие относительно уровня жидкости в сосуде.

1.216 Бак цилиндрической формы площадью основания 10 м² и объемом 100 м³ заполнен водой. Пренебрегая вязкостью воды, определите время, необходимое для полного опустошения бака, если на дне бака образовалось круглое отверстие площадью 8 см².

Дано	*Решение*
$S = 10$ м² $V = 100$ м³ $S_1 = 8$ см² $= 8\cdot 10^{-4}$ м² τ — ?	$H = \dfrac{V}{S}$, $\mathrm{d}V = -S_1 v\,\mathrm{d}t$, $v = \sqrt{2gh}$,



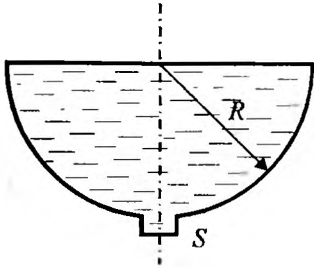
$$\mathrm{d}h = \frac{\mathrm{d}V}{S} = -\frac{S_1}{S}\sqrt{2gh}\,\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}t = -\frac{S}{S_1}\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{2gh}},$$

$$\tau = \int_0^{\tau}\mathrm{d}t = -\frac{S}{S_1}\frac{1}{\sqrt{2g}}\int_H^0\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{h}} = -\frac{S}{S_1\sqrt{2g}}\left(2\sqrt{h}\right)\Big|_H^0 =$$

$$= \frac{S}{S_1}\frac{1}{\sqrt{2g}}\cdot 2\sqrt{H} = \frac{S}{S_1}\sqrt{\frac{2V}{Sg}} = \frac{1}{S_1}\sqrt{\frac{2SV}{g}}.$$

Ответ $\tau = 1{,}78\cdot 10^4$ с.

1.217 Сосуд в виде полусферы радиусом $R = 10$ см до краев наполнен водой. На дне сосуда имеется отверстие площадью поперечного сечения $S = 4$ мм². Определите время, за которое через это отверстие выльется столько воды, чтобы ее уровень в сосуде понизился на 5 см.



Ответ $t = 10$ мин.

1.218 Определите работу, которая затрачивается на преодоление трения при перемещении воды объемом $V = 1{,}5$ м^3 в горизонтальной трубе от сечения с давлением $p_1 = 40$ кПа до сечения с давлением $p_2 = 20$ кПа.

Дано

$V = 1{,}5$ м^3

$p_1 = 40$ кПа $= 4 \cdot 10^4$ Па

$p_2 = 20$ кПа $= 2 \cdot 10^4$ Па

A — ?

Решение

$$A = (p_1 - p_2)V.$$

Ответ $A = 30$ кДж.

1.219 В дне сосуда имеется отверстие диаметром d_1. В сосуде вода поддерживается на постоянном уровне, равном h. Считая, что струя не разбрызгивается, и пренебрегая силами трения в жидкости, определите диаметр струи, вытекающей из сосуда на расстоянии $h_1 = 2h$ от его дна.

Дано

d_1

h

$h_1 = 2h$

d_2 — ?

Решение

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \qquad v_1 = \sqrt{2gh},$$

$$v_2 = \sqrt{2g(h + h_1)}, \quad S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4},$$

$$S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4},$$

$$\frac{d_2^2}{d_1^2} = \frac{S_2}{S_1} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2g(h + h_1)}} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{3h}} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$d_2 = \sqrt{d_1^2 \frac{1}{\sqrt{3}}} = d_1 \sqrt[4]{\frac{1}{3}}.$$

Ответ $d_2 = 0{,}76 d_1$.

1.220 Площадь поршня, вставленного в горизонтально расположенный налитый водой цилиндр, $S_1 = 1{,}5$ см², а площадь отверстия $S_2 = 0{,}8$ мм². Пренебрегая трением и вязкостью, определите время t, за которое вытечет вода из цилиндра, если на поршень действовать постоянной силой $F = 5$ Н, а ход поршня $l = 5$ см. Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м³.

Дано

$S_1 = 1{,}5$ см² $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м²

$S_2 = 0{,}8$ мм² $= 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м²

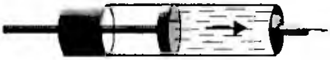
$F = 5$ Н

$l = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$\rho = 1000$ кг/м³

t — ?

Решение



$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \qquad t = \frac{l}{v_1},$$

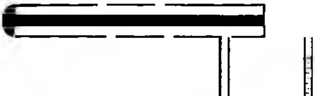
$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p = \frac{\rho v_2^2}{2}; \qquad p = \frac{F}{S_1},$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \frac{F}{S_1} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{v_1 S_1}{S_2}\right)^2, \qquad v_1^2\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)\frac{\rho}{2} = \frac{F}{S_1}, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}},$$

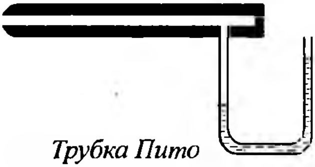
$$t = l \cdot \sqrt{\frac{\rho S_1\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}{2F}}.$$

Ответ $t = 1{,}15$ с.

1.221 Для измерения статического давления p используется зонд, для измерения динамического давления $\rho v^2/2$ используется трубка Пито. Нарисуйте, как должен выглядеть прибор, который измеряет гидростатическое давление.

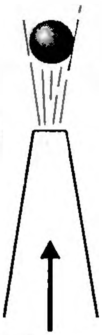


Зонд

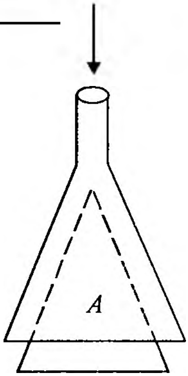


Трубка Пито

1.222 Объясните, почему легкий шарик, помещенный в струю воздуха, выходящую с большой скоростью из трубы с узким отверстием, свободно парит в этой струе.



1.223 Объясните, почему бумажный конус *A* втягивается в воронку, а не выталкивается из нее при продувании через воронку воздуха в направлении, указанном стрелкой.

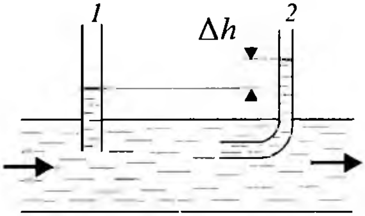


1.224 Для точного измерения малых разностей давления служат U-образные манометры, которые заполнены двумя различными жидкостями. В одном из них при использовании нитробензола ($\rho = 1{,}203$ г/см^3) и воды ($\rho' = 1{,}000$ г/см^3) получили разность уровней $\Delta h = 26$ мм. Определите разность давлений.

Ответ $\Delta p = 51{,}8$ Па.

1.225 По горизонтальной трубе в направлении, указанном на рисунке стрелкой, течет жидкость. Разность уровней Δh жидкости в манометрических трубках *1* и *2* одинакового диаметра составляет 8 см. Определите скорость течения жидкости по трубе.

Дано	*Решение*
$d_1 = d_2$ $\Delta h = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м v — ?	$\dfrac{\rho v^2}{2} = \rho g\,\Delta h$, $v = \sqrt{2g\,\Delta h}$.



Ответ $v = 1{,}25$ м/с.

1.226 По горизонтальной трубе переменного сечения течет вода. Площади поперечных сечений трубы на разных ее участках соответственно равны $S_1 = 10$ см² и $S_2 = 20$ см². Разность уровней Δh воды в вертикальных трубках одинакового сечения составляет 20 см. Определите объем воды, проходящей за 1 с через сечение трубы.

Дано

$S_1 = 10$ см² $= 10^{-3}$ м²

$S_2 = 20$ см² $= 2 \cdot 10^{-3}$ м²

$\Delta h = 20$ см $= 0{,}2$ м

$t = 1$ с

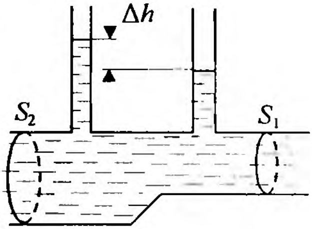
V — ?

Решение

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2,$$

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

$$v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2},$$



$$p_2 - p_1 = \rho g\,\Delta h, \qquad \frac{\rho v_1^2}{2}\left(1 - \frac{S_1^2}{S_2^2}\right) = \rho g\,\Delta h, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2g\,\Delta h}{1 - S_1^2/S_2^2}},$$

$$V = v_1 t S_1 = S_1 t \sqrt{\frac{2g\,\Delta h}{1 - S_1^2/S_2^2}}.$$

Ответ $V = 2{,}29 \cdot 10^3$ см³.

1.227 Определите, на какую высоту h поднимется вода в вертикальной трубке, впаянной в узкую часть горизонтальной трубы диаметром $d_2 = 3$ см, если в широкой части трубы диаметром $d_1 = 9$ см скорость газа $v_1 = 25$ см/с.

Дано

$d_1 = 9$ см $= 9 \cdot 10^{-2}$ м

$d_2 = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м

$v_1 = 25$ см/с $= 0{,}25$ м/с

h — ?

Решение

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}, \quad v_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1.$$

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + p_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + p_2, \qquad p_1 - p_2 = \frac{\rho v_1^2}{2}\left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1\right),$$

$$p_1 - p_2 = \rho g h; \qquad h = \frac{p_1 - p_2}{\rho g} = \frac{v_1^2}{2g}\left(\frac{d_1^4}{d_2^4} - 1\right).$$

Ответ $h = 25{,}5$ см.

1.228 Определите разность давлений в широком и узком ($d_1 = 9$ см, $d_2 = 6$ см) коленах горизонтальной трубы, если в широком колене воздух ($\rho = 1{,}29$ кг/м^3) продувается со скоростью $v_1 = 6$ м/с.

Ответ $\Delta p = 94{,}3$ Па.

1.229 Вдоль оси горизонтальной трубки диаметром 3 см, по которой течет углекислый газ ($\rho = 7{,}5$ кг/м^3), установлена трубка Пито. Пренебрегая вязкостью, определите объем газа, проходящего за 1 с через сечение трубы, если разность уровней в жидкостном манометре составляет $\Delta h = 0{,}5$ см. Плотность жидкости принять равной $\rho' = 1000$ кг/м^3.

Дано

$\rho = 7{,}5$ кг/м^3

$\rho' = 1000$ кг/м^3

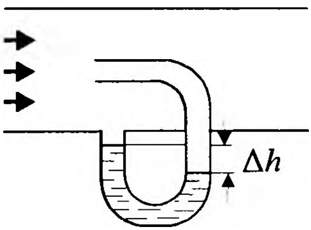
$d = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м

$\Delta h = 0{,}5$ см $= 5 \cdot 10^{-3}$ м

$t = 1$ с

V — ?

Решение



$$\Delta p = \frac{\rho v^2}{2},$$

$$\Delta p = \rho' g\,\Delta h,$$

$$\frac{\rho v^2}{2} = \rho' g\,\Delta h,$$

$$v = \sqrt{2g\,\Delta h \frac{\rho'}{\rho}},$$

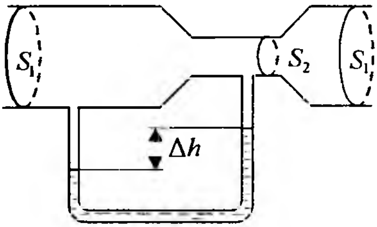
$$V = Svt,$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$V = \frac{\pi d^2}{4} \cdot t \cdot \sqrt{2g\,\Delta h \frac{\rho'}{\rho}}.$$

Ответ $V = 2{,}55 \cdot 10^3$ см^3.

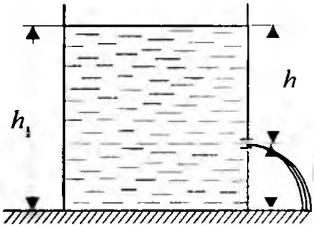
1.230 Через трубку сечением $S_1 = 100\ \text{см}^2$ продувается воздух со скоростью 2 м³/мин. В трубке имеется короткий участок с меньшим поперечным сечением $S_2 = 20\ \text{см}^2$. Определите: 1) скорость v_1 воздуха в широкой части трубки; 2) разность уровней Δh воды, используемой в подсоединенном к данной системе манометре. Плотность воздуха $\rho = 1{,}3\ \text{кг/м}^3$, воды $\rho' = 1000\ \text{кг/м}^3$.



Ответ 1) $v_1 = 3{,}33\ \text{м/с}$; 2) $\Delta h = 1{,}8\ \text{см}$.

1.231 Пренебрегая вязкостью жидкости, определите скорость истечения жидкости из малого отверстия в стенке сосуда, если высота h уровня жидкости над отверстием составляет 1,5 м.

Дано	*Решение*
$h = 1{,}5\ \text{м}$	
v_2 — ?	



$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2,$$

$S_1 \gg S_2$, $\quad v_1 S_1 = v_2 S_2$,

$v_1 \ll v_2$, $\quad \dfrac{\rho v_1^2}{2} \ll \dfrac{\rho v_2^2}{2}$,

$\rho g h_1 = \dfrac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2$, $\quad v_2^2 = 2g(h_1 - h_2) = 2gh$, $\quad v_2 = \sqrt{2gh}$.

Ответ $v_2 = 5{,}42\ \text{м/с}$.

1.232 В боковой поверхности цилиндрического сосуда, стоящего на горизонтальной поверхности, имеется отверстие, поперечное сечение которого значительно меньше поперечного сечения самого сосуда. Отверстие расположено на расстоянии $h_1 = 49$ см от уровня воды в сосуде, который поддерживается постоянным, и на расстоянии $h_2 = 25$ см от дна сосуда. Пренебрегая вязкостью воды, определите расстояние по горизонтали от отверстия до места, куда попадает струя воды.

Ответ $s = 70$ см.

1.233 На столе стоит наполненный водой широкий цилиндрический сосуд высотой $h = 40$ см. Пренебрегая вязкостью, определите, на какой высоте от дна сосуда должно располагаться небольшое отверстие, чтобы расстояние по горизонтали от отверстия до места, куда попадает струя воды, было максимальным.

Ответ $h = 20$ см.

1.234 Для вытекания струи жидкости из сосуда с постоянной скоростью применяют устройство, приведенное на рисунке (сосуд Мариотта). Определите скорость истечения струи.

Дано

H

h

v — ?

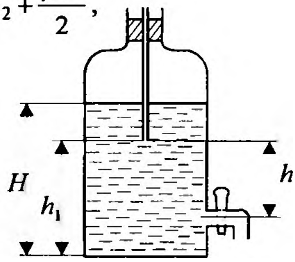
Решение

$$H \geqslant h_1, \quad \rho g h_1 = \rho g h_2 + \frac{\rho v^2}{2},$$

$$\rho g(h_1 - h_2) = \frac{\rho v^2}{2},$$

$$h_1 - h_2 = h,$$

$$v = \sqrt{2gh} = \text{const}.$$



Ответ $v = \sqrt{2gh}$.

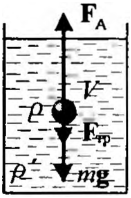
1.235 Площадь соприкосновения слоев текущей жидкости $S = 10$ см², коэффициент динамической вязкости жидкости $\eta = 10^{-3}$ Па · с, а возникающая сила трения между слоями $F = 0{,}1$ мН. Определите градиент скорости.

Дано	*Решение*
$S = 10$ см² $= 10^{-3}$ м² $\eta = 10^{-3}$ Па · с $F = 0{,}1$ мН $= 10^{-4}$ Н	$\operatorname{grad}\mathbf{v} = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\mathbf{i}$, $\qquad F = \eta\left\|\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right\|S$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \dfrac{F}{\eta S}$.
$\operatorname{grad}\mathbf{v}$ — ?	

Ответ $\operatorname{grad}\mathbf{v} = 100$ с$^{-1}$.

1.236 Шарик всплывает с постоянной скоростью в жидкости, плотность которой в три раза больше плотности материала шарика. Определите отношение силы трения, действующей на всплывающий шарик, к его весу.

Дано	*Решение*
$v = \text{const}$ $\rho' = 3\rho$	
$\dfrac{F_{\text{тр}}}{P}$ — ?	



$$\mathbf{F}_A = m\mathbf{g} + \mathbf{F}_{\text{тр}},$$

$$F_{\text{тр}} = F_A - mg,$$

$$P = mg,$$

$$F_A = \rho' gV,$$

$$P = \rho gV,$$

$$\frac{F_{\text{тр}}}{P} = \frac{F_A - mg}{mg} = \frac{\rho' gV - \rho gV}{\rho gV} = \frac{\rho' - \rho}{\rho} = \frac{3\rho - \rho}{\rho} = 2.$$

Ответ $\dfrac{F_{\text{тр}}}{P} = 2$.

1.237 Смесь свинцовых дробинок (плотность $\rho = 11{,}3$ г/см³) диаметром 4 мм и 2 мм одновременно опускают в широкий сосуд глубиной $h = 1{,}5$ м с глицерином (плотность $\rho = 1{,}26$ г/см³, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па · с). Определите, на сколько больше времени потребуется дробинкам меньшего размера, чтобы достичь дна сосуда.

Дано

$\rho = 11{,}3$ г/см³ = $= 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м³

$d_1 = 4$ мм $= 4 \cdot 10^{-3}$ м

$d_2 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м

$h = 1{,}5$ м

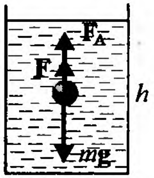
$\rho' = 1{,}26$ г/см³ = $= 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м³

$\eta = 1{,}48$ Па · с

Δt — ?

Решение

$$v \approx \text{const}, \quad t = \frac{h}{v}, \quad r = \frac{d}{2},$$



$$mg = F_A + F,$$

$$mg = \rho g V = \frac{4}{3}\rho g \pi r^3,$$

$$F_A = \rho' g V = \frac{4}{3}\rho' g \pi r^3, \qquad F = 6\pi\eta r v,$$

$$\frac{4}{3}\rho g \pi r^3 = \frac{4}{3}\rho' g \pi r^3 + 6\pi\eta r v,$$

$$v = \frac{2gr^2(\rho - \rho')}{9\eta} = \frac{gd^2(\rho - \rho')}{18\eta},$$

$$v_1 = \frac{gd_1^2(\rho - \rho')}{18\eta}, \qquad v_2 = \frac{gd_2^2(\rho - \rho')}{18\eta},$$

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{h}{v_2} - \frac{h}{v_1} = h\left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}\right) = \frac{18h\eta}{g(\rho - \rho')}\left(\frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d_1^2}\right).$$

Ответ $\Delta t = 76{,}1$ с.

● ●

Некоторые математические формулы

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \ (n \neq 1) \qquad \int \frac{dx}{x} = \ln x \qquad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x}$$

1.238 В широком сосуде, наполненном глицерином (плотность $\rho = 1{,}26$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 1{,}48$ Па · с), падает свинцовый шарик (плотность $\rho = 11{,}3$ г/см^3). Считая, что при числе Рейнольдса $\mathrm{Re} \leqslant 0{,}5$ выполняется закон Стокса (при вычислении Re в качестве характерного размера берется диаметр шарика), определите предельный диаметр шарика.

Ответ $d = 5{,}41$ мм.

1.239 Стальной шарик (плотность $\rho = 9$ г/см^3) диаметром $d = 0{,}8$ см падает с постоянной скоростью в касторовом масле (плотность $\rho' = 0{,}96$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 0{,}99$ Па · с). Учитывая, что критическое значение числа Рейнольдса $\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 0{,}5$, определите характер движения масла, обусловленный падением в нем шарика.

Дано

$\rho = 9$ г/см$^3 = 9 \cdot 10^3$ кг/м^3

$d = 0{,}8$ см $= 8 \cdot 10^{-3}$ м

$\upsilon = \mathrm{const}$

$\rho' = 0{,}96$ г/см$^3 = 960$ кг/м^3

$\eta = 0{,}99$ Па · с

$\mathrm{Re}_{\text{кр}} = 0{,}5$

Re — ?

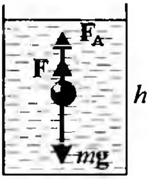
Решение

$$mg = F_A + F,$$

$$mg = \rho g V = \frac{4}{3}\rho g \pi r^3,$$

$$F_A = \rho' g V = \frac{4}{3}\rho' g \pi r^3,$$

$$F = 6\pi\eta r\upsilon,$$



$$6\pi\eta r\upsilon = \frac{4}{3} g \pi r^3 (\rho - \rho'), \qquad \upsilon = \frac{2(\rho - \rho')gr^2}{9\eta} = \frac{(\rho - \rho')gd^2}{18\eta},$$

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho' \upsilon d}{\eta} = \frac{\rho'(\rho - \rho')gd^3}{18\eta^2}.$$

Ответ $\mathrm{Re} = 2{,}2$, $\mathrm{Re} > \mathrm{Re}_{\text{кр}}$, движение жидкости турбулентное.

1.240 Пробковый шарик (плотность $\rho = 0,2$ г/см^3) диаметром $d = 6$ мм всплывает в сосуде, наполненном касторовым маслом (плотность $\rho' = 0,96$ г/ см^3), с постоянной скоростью $v = 1,5$ см/с. Определите для касторового масла: 1) динамическую вязкость η; 2) кинематическую вязкость ν.

Дано

$\rho = 0,2$ г/см$^3 = 2 \cdot 10^2$ кг/м^3

$d = 6$ мм $= 6 \cdot 10^{-3}$ м

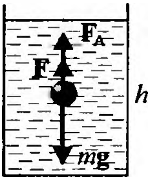
$\rho' = 0,96$ г/см$^3 = 960$ кг/м^3

$v = 1,5$ см/с $= 1,5 \cdot 10^{-2}$ м/с

1) η — ?

2) ν — ?

Решение



$$F_A = mg + F,$$

$$\frac{4}{3}\pi\rho' r^3 = \frac{4}{3}\pi\rho r^3 + 6\pi\eta r v,$$

$$\eta = \frac{2gr^2(\rho - \rho')}{9v} = \frac{gd^2(\rho - \rho')}{18v},$$

$$\nu = \frac{\eta}{\rho'}.$$

Ответ 1) $\eta = 0,99$ Па · с; 2) $\nu = 1,03 \cdot 10^{-3}$ м^2/с.

1.241 В боковую поверхность сосуда вставлен горизонтальный капилляр с внутренним диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 1,2$ см. Через капилляр вытекает касторовое масло (плотность $\rho = 0,96$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 0,99$ Па · с), уровень которого в сосуде поддерживается постоянным на высоте $h = 30$ см выше капилляра. Определите время, которое требуется для протекания через капилляр 10 см^3 масла.

Ответ $t = \dfrac{128\eta V l}{\pi d^4 \rho g h} = 107$ с.

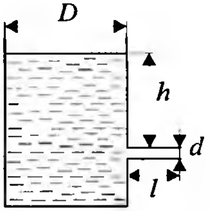
• •

Некоторые математические формулы

$\int \sin x \, dx = -\cos x$ $\int \cos x \, dx = \sin x$ $\int e^x \, dx = e^x$

1.242 В боковую поверхность цилиндрического сосуда D вставлен капилляр с внутренним диаметром d и длиной l. В сосуд налита жидкость с динамической вязкостью η. Определите зависимость скорости v понижения уровня жидкости в сосуде от высоты h этого уровня над капилляром.

Дано	*Решение*
D d l η h	$V = \dfrac{\pi r^4 \Delta p t}{8\eta l}$, $\quad \Delta p = \rho g h$,
$v(h)$ — ?	$r = \dfrac{d}{2}$, $\quad R = \dfrac{D}{2}$, $S_1 = \pi r^2$, $\quad S = \pi R^2$,



$$V = S_1 v_1 t = \pi r^2 v_1 t,$$

$$\frac{\pi r^4 \rho g h t}{8\eta l} = \pi r^2 v_1 t, \qquad v_1 = \frac{r^2 \rho g h}{8\eta l}, \qquad v_1 S_1 = vS,$$

$$v = v_1 \frac{S_1}{S}, \qquad \frac{S_1}{S} = \frac{d^2}{D^2}, \qquad v = \frac{d^2 \rho g h \cdot d^2}{4 \cdot 8\eta l \cdot D^2} = \frac{\rho g h d^4}{32\eta l D^2}.$$

Ответ $v(h) = \dfrac{\rho g d^4}{32\eta l D^2} h$.

1.243 В боковую поверхность цилиндрического сосуда, установленного на столе, вставлен на высоте $h_1 = 10$ см от его дна капилляр с внутренним диаметром $d = 2$ мм и длиной $l = 1$ см. В сосуде поддерживается постоянный уровень машинного масла (плотность $\rho = 0{,}9$ г/см^3, динамическая вязкость $\eta = 0{,}1$ Па · с) на высоте $h_2 = 70$ см выше капилляра. Определите расстояние по горизонтали от конца капилляра до места, куда попадает струя масла.

Ответ $s = 11$ см.

1.244 Определите наибольшую скорость, которую может приобрести свободно падающий в воздухе ($\rho = 1{,}29$ кг/м^3) свинцовый шарик ($\rho' = 11{,}3$ г/см^3) массой $m = 12$ г. Коэффициент сопротивления C_x принять равным 0,5.

Дано

$\rho = 1{,}29$ кг/м^3

$\rho' = 11{,}3$ г/см^3 =

$= 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м^3

$m = 12$ г $= 12 \cdot 10^{-3}$ кг

$C_x = 0{,}5$

$v_{\max}$ — ?

Решение

$$mg = \rho' g V = \rho' g \cdot \frac{4}{3}\pi r^3, \qquad r = \sqrt[3]{\frac{3m}{4\pi\rho'}},$$

$$v = v_{\max}, \qquad mg = R_x + F_A,$$

$$F_A \ll mg, \ \rho \ll \rho', \quad mg = R_x, \quad R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

$$\rho' g \frac{4}{3}\pi r^3 = C_x \frac{\rho v_{\max}^2}{2}\pi r^2, \qquad v_{\max} = \sqrt{\frac{8\rho' g r}{3 C_x \rho}}.$$

Ответ $v_{\max} = 53{,}9$ м/с.

1.245 Парашют ($m_1 = 32$ кг) пилота ($m_2 = 65$ кг) в раскрытом состоянии имеет форму полусферы диаметром $d = 12$ м, обладая коэффициентом сопротивления $C_x = 1{,}3$. Определите максимальную скорость, развиваемую пилотом, при плотности воздуха 1,29 кг/м^3.

Дано

$m_1 = 32$ кг

$m_2 = 65$ кг

$d = 12$ м

$C_x = 1{,}3$

$\rho = 1{,}29$ кг/м^3

$v_{\max}$ — ?

Решение

$$(m_1 + m_2)g = R_x + F_A, \qquad R_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S,$$

$$F_A \ll (m_1 + m_2)g, \quad C_x \frac{\rho v_{\max}^2}{2} \cdot \frac{\pi d^2}{4} = (m_1 + m_2)g,$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{8(m_1 + m_2)g}{C_x \pi d^2 \rho}}.$$

Ответ $v_{\max} = 3{,}17$ м/с.

1.246 Автомобиль с площадью миделя (наибольшая площадь сечения в направлении, перпендикулярном скорости) $S = 2{,}2$ м^2, коэффициентом лобового сопротивления $C_x = 0{,}4$ и максимальной мощностью $P = 45$ кВт может на горизонтальных участках дороги развивать скорость до 140 км/ч. При реконструкции автомобиля уменьшают площадь миделя до $S_1 = 2$ м^2, оставляя C_x прежним. Принимая силу трения о поверхность дороги постоянной, определите, какую максимальную мощность должен иметь автомобиль, чтобы он развивал на горизонтальных участках дороги скорость до 160 км/ч. Плотность воздуха принять равной 1,29 кг/м^3.

Дано	*Решение*
$S = 2{,}2$ м^2 $C_x = 0{,}4$ $P = 45$ кВт $= 45 \cdot 10^3$ Вт $v = 140$ км/ч $= 38{,}9$ м/с $S_1 = 2$ м^2 $F_{тр} = \text{const}$ $v_1 = 160$ км/ч $= 44{,}4$ м/с $\rho = 1{,}29$ кг/м^3 P_1 — ?	$P = Fv$, $\quad F = R_x + F_{тр}$, $R_x = C_x \dfrac{\rho v^2}{2} S$, $\quad P = \left(C_x \dfrac{\rho v^2}{2} S + F_{тр}\right) v$, $F_{тр} = \dfrac{P}{v} - C_x \dfrac{\rho v^2}{2} S$, $\quad P_1 = \left(C_x \dfrac{\rho v_1^2}{2} S_1 + F_{тр}\right) v_1$, $P_1 = v_1 \left[\dfrac{P}{v} + \dfrac{1}{2} C_x \rho \left(S_1 v_1^2 - S v^2\right)\right]$.

Ответ $P_1 = 58{,}5$ кВт.

1.247 Объясните, зависит ли разность давлений на нижнюю и верхнюю поверхность крыла самолета от высоты его подъема.

Ответ $\Delta p \sim \dfrac{1}{H}$.

1.7. Элементы специальной (частной) теории относительности

1.248 Покажите, что события, происходящие одновременно в различных точках в одной инерциальной системе отсчета, не одновременны в другой инерциальной системе отсчета.

1.249 В лабораторной системе отсчета в точках с координатами x_1 и $x_2 = x_1 + l_0$ одновременно происходят события *1* и *2*, причем $l_0 = 1{,}4$ км. Определите: 1) расстояние l', фиксируемое наблюдателем в системе отсчета, связанной с ракетой, которая движется со скоростью $v = 0{,}6c$ в отрицательном направлении оси x; 2) время между этими событиями, фиксируемое наблюдателем в системе отсчета, связанной с ракетой.

Дано

x_1

$x_2 = x_1 + l_0$

$l_0 = 1{,}4\ \text{км} = 1{,}4 \cdot 10^3\ \text{м}$

$t_1 = t_2$

$v = -0{,}6c$

1) l' — ?

2) $\Delta t'$ — ?

Решение

$\boxed{\text{ИСО}_1}$ $x_1, \quad x_2 = x_1 + l_0, \quad t_1 = t_2 = t;$

$\boxed{\text{ИСО}_2}$ $x_1', \quad x_2', \quad t_1', \ t_2'.$

$$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - vt - x_1 + vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{l_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad t_1' = \frac{t - vx_1/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

$$t_2' = \frac{t - vx_2/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta t' = t_2' - t_1' = -\frac{v(x_2 - x_1)}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{vl_0}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -\frac{vl'}{c^2}.$$

Ответ 1) $l' = 1{,}75$ км; 2) $\Delta t' = 3{,}5$ мкс.

1.250 Две нестабильные частицы движутся в системе отсчета K в одном направлении вдоль одной прямой с одинаковой скоростью $v = 0{,}6c$. Расстояние между частицами в системе K равно 64 м. Обе частицы распались одновременно в системе K', которая связана с ними. Определите промежуток времени между распадом частиц в системе K.

Дано	*Решение*
$\Delta x = 64$ м $\Delta t = 0$ $v = 0{,}6c$	$\Delta t' = t_2' - t_1' = \dfrac{t_2 - vx_2/c^2 - (t_1 - vx_1/c^2)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} =$
$\Delta t'$ — ?	$= \dfrac{(t_2 - t_1) + v\,\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \dfrac{v\,\Delta x}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.

Ответ $\Delta t' = 0{,}16$ мкс.

1.251 Докажите, что длительность события, происходящего в некоторой точке, наименьшая в той инерциальной системе отсчета, относительно которой эта точка неподвижна.

1.252 Определите, во сколько раз увеличивается время жизни нестабильной частицы (по часам неподвижного наблюдателя), если она начинает двигаться со скоростью $0{,}9c$.

Дано	*Решение*
$v = 0{,}9c$	$\Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$, $\quad \dfrac{\Delta t}{\Delta t_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$.
$\dfrac{\Delta t}{\Delta t_0}$ — ?	

Ответ $\dfrac{\Delta t}{\Delta t_0} = 2{,}29$.

1.253 Собственное время жизни частицы отличается на 1% от времени жизни по неподвижным часам. Определите $\beta = v/c$.

Дано	*Решение*
$k = 0{,}01$	$k = \dfrac{\Delta t - \Delta t_0}{\Delta t}$, $\quad \Delta t = \dfrac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$; $\quad \beta = \dfrac{v}{c}$,
β — ?	

$$k = 1 - \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 - \sqrt{1-\beta^2}, \qquad 1-\beta^2 = (1-k)^2, \qquad \beta = \sqrt{k(2-k)}.$$

Ответ $\beta = 0{,}141$.

1.254 Космический корабль движется со скоростью $v = 0{,}8c$ по направлению к Земле. Определите расстояние, пройденное им в системе отсчета, связанной с Землей (системе K), за $t_0 = 0{,}5c$, отсчитанное по часам в космическом корабле (системе K').

Ответ $l = 200$ Мм.

1.255 Мюоны, рождаясь в верхних слоях атмосферы, при скорости $v = 0{,}995c$ пролетают до распада $l = 6$ км. Определите: 1) собственную длину пути, пройденную ими до распада; 2) время жизни мюона для наблюдателя на Земле; 3) собственное время жизни мюона.

Дано	*Решение*
$v = 0{,}995c$ $l = 6$ км	$\boxed{\text{ИСО}_1}$ l_0, Δt_0; $\quad \boxed{\text{ИСО}_2}$ l, Δt;
1) l_0 — ? 2) Δt — ? 3) Δt_0 — ?	$l_0 = l\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $\quad \Delta t = \dfrac{l}{v}$, $\quad \Delta t_0 = \dfrac{l_0}{v}$.

Ответ 1) $l_0 = 599$ м; 2) $\Delta t = 20{,}1$ мкс; 3) $\Delta t_0 = 2$ мкс.

1.256 Докажите, что линейные размеры тела наибольшие в той инерциальной системе отсчета, относительно которой тело покоится.

1.257 Определите относительную скорость движения, при которой релятивистское сокращение линейных размеров тела составляет 10%.

Ответ $\upsilon = 1{,}31\cdot 10^5$ км/с.

1.258 В системе K' покоится стержень (собственная длина $l_0 = 1{,}5$ м), ориентированный под углом $\vartheta' = 30^\circ$ к оси Ox'. Система K' движется относительно системы K со скоростью $\upsilon = 0{,}6c$. Определите в системе K: 1) длину стержня l; 2) соответствующий угол ϑ.

Дано

$l_0 = 1{,}5$ м

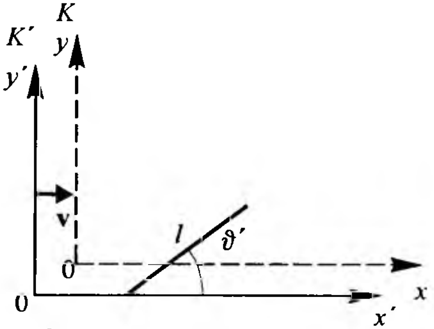
$\vartheta' = 30^\circ$

$\upsilon = 0{,}6c$

1) l — ?

2) ϑ — ?

Решение



$l_{0x} = l_0 \cos\vartheta'$, $\quad l_{0y} = l_0 \sin\vartheta'$,

$l_x = l_{0x}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$, $\quad l_y = l_{0y}$, $\quad l = \sqrt{l_x^2 + l_y^2}$,

$$l = \sqrt{l_0^2(\cos\vartheta')^2(1-\upsilon^2/c^2) + l_0^2(\sin\vartheta')^2},$$

$$\mathrm{tg}\vartheta = \frac{l_y}{l_x} = \frac{l_{0y}}{l_{0x}\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = \frac{\mathrm{tg}\vartheta'}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}.$$

Ответ 1) $l = 1{,}28$ м; 2) $\vartheta = 35{,}8^\circ$.

1.259 Определите собственную длину стержня, если в лабораторной системе его скорость $v = 0{,}6c$, длина $l = 1{,}5$ м и угол между ним и направлением движения $\vartheta = 30°$.

Ответ $l_0 = 1{,}79$ м.

1.260 Пользуясь преобразованиями Лоренца, выведите релятивистский закон сложения скоростей, если переход происходит от системы K к системе K'.

Дано	**Решение**
$K \to K'$	$x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$,
$u'(u)$ — ?	$y' = y$,
	$z' = z$,
$\beta = \dfrac{v}{c}$	$t' = \dfrac{t - vx/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$,

$$u_x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \qquad u_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \qquad u_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t},$$

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}, \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'}, \qquad u'_z = \frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'},$$

$$\mathrm{d}x' = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \mathrm{d}y' = \mathrm{d}y,$$

$$\mathrm{d}z' = \mathrm{d}z, \qquad \mathrm{d}t' = \frac{\mathrm{d}t - v\,\mathrm{d}x/c^2}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$u'_x = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - v\,\mathrm{d}x/c^2} = \frac{\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t - v\,\mathrm{d}x/c^2} \qquad \left[:\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}\right].$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_y = \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \frac{\mathrm{d}y\sqrt{1-\beta^2}}{\mathrm{d}t - v\,\mathrm{d}x/c^2} = \frac{u_y\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1-\beta^2}}{1 - vu_x/c^2}.$$

1.261 Космический корабль удаляется от Земли с относительной скоростью $v_1 = 0{,}8c$, а затем с него стартует ракета (в направлении от Земли) со скоростью $v_2 = 0{,}8c$ относительно корабля. Определите скорость u ракеты относительно Земли.

Ответ $u = 0{,}976c$.

1.262 Ионизированный атом, вылетев из ускорителя со скоростью $0{,}8c$, испустил фотон в направлении своего движения. Определите скорость фотона относительно ускорителя.

Дано

$u' = 0{,}8c$

u — ?

Решение

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2}, \qquad v = c,$$

$$u = \frac{0{,}8c + c}{1 + 0{,}8c \cdot c/c^2} = c.$$

Ответ $u = c$.

1.263 Две ракеты движутся навстречу друг другу относительно неподвижного наблюдателя с одинаковой скоростью, равной $0{,}5c$. Определите скорость сближения ракет, исходя из закона сложения скоростей: 1) в классической механике; 2) в специальной теории относительности.

Дано

$v_1 = v_2 = 0{,}5c$

1) $u_{\text{кл}}$ — ?

2) $u_{\text{рел}}$ — ?

Решение

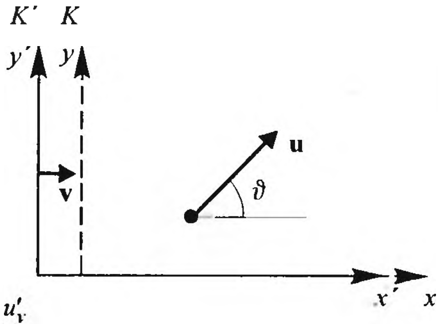
$$u_{\text{кл}} = v_1 + v_2 = 0{,}5c + 0{,}5c = c,$$

$$u_{\text{рел}} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2} = \frac{c}{1 + 0{,}25} = 0{,}8c.$$

Ответ 1) $u_{\text{кл}} = c$; 2) $u_{\text{рел}} = 0{,}8c$.

1.264 Релятивистская частица движется в системе K со скоростью $\mathbf{u}$ под углом ϑ к оси x. Определите соответствующий угол в системе K', движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно системы K в положительном направлении оси x, если оси x и x' обеих систем совпадают.

Дано	***Решение***
$\mathbf{u}$ ϑ $\mathbf{v}$ ϑ' — ?	



$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{u_y}{u_x}, \qquad \operatorname{tg}\vartheta' = \frac{u'_y}{u'_x},$$

$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2},$$

$$\operatorname{tg}\vartheta' = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{u_x - v}, \qquad u_x = u\cos\vartheta, \qquad u_y = u\sin\vartheta,$$

$$\vartheta' = \operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos\vartheta - v/u}.$$

Ответ

$$\vartheta' = \operatorname{arctg}\frac{\sin\vartheta\sqrt{1 - v^2/c^2}}{\cos\vartheta - v/u}.$$

1.265 Докажите, что интервал между двумя событиями является величиной инвариантной, т. е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

1.266 Воспользовавшись тем, что интервал является инвариантной величиной по отношению к преобразованиям координат, определите расстояние, которое пролетел π–мезон с момента рождения до распада, если время его жизни в этой системе отсчета $\Delta t = 4{,}4$ мкс, а собственное время жизни $\Delta t_0 = 2{,}2$ мкс.

Дано	*Решение*
$l_0 = 0$	$s_{12}^2 = c^2 t_{12}^2 - l_{12}^2 = \text{inv}$,
$\Delta t = 4{,}4$ мкс $= 4{,}4 \cdot 10^{-6}$ с	$c^2\ \Delta t_0^2 = c^2\ \Delta t^2 - l^2$,
$\Delta t_0 = 2{,}2$ мкс $= 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с	$l = c\sqrt{\Delta t^2 - \Delta t_0^2}$.
l — ?	

Ответ $l = 1{,}14$ км.

1.267 Частица движется со скоростью $v = 0{,}8c$. Определите отношение полной энергии релятивистской частицы к ее энергии покоя.

Ответ $\dfrac{E}{E_0} = 1{,}67$.

1.268 Определите, на сколько процентов полная энергия релятивистской элементарной частицы, вылетающей из ускорителя со скоростью $v = 0{,}75c$, больше ее энергии покоя.

Ответ на 51,2%.

1.269 Определите скорость движения релятивистской частицы, если ее полная энергия в два раза больше энергии покоя.

Ответ $v = 0{,}866c$.

1.270 Определите релятивистский импульс протона, если скорость его движения $v = 0{,}8c$.

Ответ $p = 6{,}69 \cdot 10^{-19}$ Н · с.

1.271 Определите скорость, при которой релятивистский импульс частицы превышает ее ньютоновский импульс в 3 раза.

Ответ

$$v = c\sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = 0{,}943c.$$

1.272 Определите зависимость скорости частицы (масса частицы m) от времени, если движение одномерное, сила постоянна и уравнение движения релятивистское.

Дано	***Решение***
m $F = \mathrm{const}$	$F = \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}, \qquad \mathrm{d}p = F\,\mathrm{d}t,$
$v(t)$ — ?	$p = \displaystyle\int_0^t F\,\mathrm{d}t = Ft, \qquad p = \dfrac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = Ft, \qquad mv = Ft\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

$$m^2v^2 = F^2t^2\left(1 - v^2/c^2\right), \qquad m^2v^2 = F^2t^2 - F^2t^2v^2/c^2,$$

$$F^2t^2v^2/c^2 + m^2v^2 = F^2t^2, \qquad v^2\left(F^2t^2/c^2 + m^2\right) = F^2t^2,$$

$$v^2 = \frac{F^2t^2}{F^2t^2/c^2 + m^2}, \qquad v = \frac{Ft}{\sqrt{(Ft/c)^2 + m^2}} = \frac{Ft/m}{\sqrt{(Ft/mc)^2 + 1}}.$$

Ответ

$$v(t) = \frac{Ft/m}{\sqrt{1 + (Ft/mc)^2}}.$$

1.273 Полная энергия релятивистской частицы в 8 раз превышает ее энергию покоя. Определите скорость этой частицы.

Ответ $\upsilon = 298$ Мм/с.

1.274 Кинетическая энергия частицы оказалась равной ее энергии покоя. Определите скорость частицы.

Дано

$E_0 = mc^2$

$T = E_0$

υ — ?

Решение

$$T = E - E_0, \qquad E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}, \qquad T = E_0 = mc^2,$$

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1\right), \qquad 1 = \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - 1,$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} = 2, \qquad 1 - \upsilon^2/c^2 = \frac{1}{4}, \qquad \upsilon^2/c^2 = \frac{3}{4}, \qquad \upsilon = c\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}866c.$$

Ответ $\upsilon = 260$ Мм/с.

1.275 Определите релятивистский импульс p и кинетическую энергию T протона, движущегося со скоростью $\upsilon = 0{,}75c$.

Дано

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

$\upsilon = 0{,}75c$

p — ?

T — ?

Решение

$$p = \frac{m_p \upsilon}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}},$$

$$T = \frac{m_p c^2}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}} - m_p c^2.$$

Ответ $p = 5{,}68 \cdot 10^{-19}$ Н · с; $T = 7{,}69 \cdot 10^{-11}$ Дж.

1.276 Определите кинетическую энергию электрона, если полная энергия движущегося электрона втрое больше его энергии покоя. Ответ выразите в электрон-вольтах.

Дано

$m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг

$E = 3E_0$

T — ?

Решение

$$T = E - E_0 = 3E_0 - E_0 = 2E_0\,,$$

$$E_0 = m_e c^2\,, \qquad T = 2m_e c^2\,.$$

Ответ $T = 1{,}02$ МэВ.

1.277 Определите, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы его скорость составила 90% скорости света.

Дано

$m_p = 1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг

$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

$v = 0{,}9c$

U — ?

Решение

$$T = m_p c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right), \qquad T = eU\,,$$

$$U = \frac{m_p c^2}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right).$$

Ответ $U = 1{,}22$ ГВ.

1.278 Определите, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти электрон, чтобы его продольные размеры уменьшились в два раза.

Дано

$m_e = 9{,}11\cdot 10^{-31}$ кг

$e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл

$l = l_0/2$.

U — ?

Решение

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2}\,, \qquad l = l_0/2\,, \qquad \sqrt{1 - v^2/c^2} = \frac{1}{2}\,,$$

$$T = eU\,, \qquad T = m_e c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right),$$

$$U = \frac{T}{e} = \frac{m_e c^2}{e}(2 - 1) = \frac{m_e c^2}{e}\,.$$

Ответ $U = 512$ кВ.

1.279 Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы увеличить скорость частицы от 0,5c до 0,7c.

Дано	***Решение***
$\upsilon_1 = 0{,}5c$ $\upsilon_2 = 0{,}7c$ ——— A — ?	$A = T_2 - T_1$, $T_2 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon_2^2/c^2}} - mc^2$, $\quad T_1 = \dfrac{mc^2}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}} - mc^2$,

$$A = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_2^2/c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_1^2/c^2}}\right).$$

Ответ $A = 0{,}245mc^2$.

1.280 Выведите в общем виде зависимость между релятивистским импульсом, кинетической энергией релятивистской частицы и ее массой.

1.281 Определите релятивистский импульс электрона, кинетическая энергия которого $T = 1$ ГэВ.

Дано	***Решение***
$m_e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $T = 1$ ГэВ = $= 10^9\cdot1{,}6\cdot10^{-19}$ Дж ——— p — ?	$pc = \sqrt{T(T+2m_ec^2)}$, $p = \dfrac{\sqrt{T(T+2m_ec^2)}}{c}$.

Ответ $p = 5{,}34\cdot10^{-19}$ Н · с.

1.282 Докажите, что выражение релятивистского импульса $p=\dfrac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{c}$ при $v \ll c$ переходит в соответствующее выражение классической механики.

Дано	Решение
$p=\dfrac{\sqrt{T(T+2mc^2)}}{c}$ $v \ll c$	$T=E-E_0$, $\quad E=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$,
$p=mv$ — ?	$E_0=mc^2$, $\quad T=mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$,

$$p=\frac{1}{c}\sqrt{mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)\left[mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)+2mc^2\right]}=$$

$$=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-mc^2\right)\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}+mc^2\right)}=$$

$$=\frac{1}{c}\sqrt{\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)^2-\left(mc^2\right)^2}=\frac{mc^2}{c}\sqrt{\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1}=$$

$$=mc\sqrt{\frac{1-1+v^2/c^2}{1-v^2/c^2}}=mc\cdot\frac{v}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{mv}{\sqrt{1-v^2/c^2}},$$

$\boxed{v \ll c}$ $\quad \sqrt{1-v^2/c^2}=1$, $\quad p=mv$.

Ответ $p=mv$.

1.283 Докажите, что для релятивистской частицы величина $E^2 - p^2c^2$ является инвариантной, т. е. имеет одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета.

Дано

$E_0 = mc^2$

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$E^2 - p^2c^2 = \text{inv}$

Решение

$$E^2 - p^2c^2 = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 - \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)^2 \cdot c^2 =$$

$$= \frac{m^2c^4}{1 - v^2/c^2} - \frac{m^2v^2c^2}{1 - v^2/c^2} =$$

$$= \frac{m^2c^4 - m^2v^2c^2}{1 - v^2/c^2} = \frac{m^2c^2(c^2 - v^2)}{(c^2 - v^2)/c^2} = m^2c^4 .$$

Ответ $E^2 - p^2c^2 = m^2c^4 = \text{inv}$.

1.284 Определите энергию, которую необходимо затратить, чтобы разделить ядро дейтрона на протон и нейтрон. Массу ядра дейтрона принять равной $3{,}343 \cdot 10^{-27}$ кг. Ответ выразите в электрон-вольтах.

Дано

$m_d = 3{,}343 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_p = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

ΔE — ?

Решение

$\Delta E = (m_p + m_n)c^2 - m_dc^2$,

1 эВ = $1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Ответ $\Delta E = 2{,}25$ МэВ.

1.285 Определите энергию связи ядра ${}^{14}_{7}\mathrm{N}$. Примите массу ядра азота равной $2{,}325 \cdot 10^{-26}$ кг. Ответ выразите в электрон-вольтах.

Ответ $E_{\text{св}} = 100$ МэВ.

2. Основы молекулярной физики и термодинамики

2.1. Молекулярно-кинетическая теория идеальных газов

2.1 Начертите графики изотермического, изобарного и изохорного процессов в координатах p и V, p и T, T и V.

2.2 Определите число N атомов в 1 кг водорода и массу одного атома водорода.

Дано	*Решение*
$m = 1$ кг $M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$	$N = \nu N_A = \dfrac{m}{M} N_A$, $m_0 = \dfrac{m}{N}$.
N — ? m_0 — ?	

Ответ $N = 3{,}01 \cdot 10^{26}$; $m_0 = 3{,}32 \cdot 10^{-27}$ кг.

● ●

Основные физические постоянные

Постоянная Авогадро $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

Молярная газовая постоянная $R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)

Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

2.3 В закрытом сосуде вместимостью 20 л находятся водород массой 6 г и гелий массой 12 г. Определите: 1) давление; 2) молярную массу газовой смеси в сосуде, если температура смеси $T = 300$ К.

Дано

$V = 20$ л $= 2 \cdot 10^{-2}$ м^3

$m_1 = 6$ г $= 6 \cdot 10^{-3}$ кг

$M_1 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m_2 = 12$ г $= 12 \cdot 10^{-3}$ кг

$M_2 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T = 300$ К

$R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)

1) p — ?

2) M — ?

Решение

$$p = p_1 + p_2,$$

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1}\frac{RT}{V}, \qquad p_2 = \frac{m_2}{M_2}\frac{RT}{V},$$

$$p = \frac{RT}{V}\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right), \qquad M = \frac{RT}{Vp}(m_1 + m_2).$$

Ответ 1) $p = 0{,}75$ МПа; 2) $M = 3 \cdot 10^{-3}$ кг/моль.

2.4 Определите плотность смеси газов водорода массой $m_1 = 8$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г при температуре $T = 290$ К и при давлении 0,1 МПа. Газы считать идеальными.

Дано

$m_1 = 8$ г $= 8 \cdot 10^{-3}$ кг

$M = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m_2 = 64$ г $= 64 \cdot 10^{-3}$ кг

$M_2 = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T = 290$ К

$p = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па

$R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)

ρ — ?

Решение

$$\rho = \frac{m}{V},$$

$$m = m_1 + m_2, \qquad pV = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT,$$

$$V = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)\frac{RT}{p}, \qquad \rho = \frac{(m_1 + m_2)p}{\left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right)RT}.$$

Ответ $\rho = 0{,}498$ кг/м^3.

2.5 В баллоне вместимостью 15 л находится азот под давлением 100 кПа при температуре $t_1 = 27$ °C. После того как из баллона выпустили азот массой 14 г, температура газа стала равной $t_2 = 17$ °C. Определите давление азота, оставшегося в баллоне.

Ответ $p = 16{,}3$ кПа.

2.6 Баллон вместимостью $V = 20$ л содержит смесь водорода и азота при температуре 290 К и давлении 1 МПа. Определите массу водорода, если масса смеси равна 150 г.

Ответ $m_{\mathrm{H}_2} = 6{,}3$ г.

2.7 Азот массой 7 г находится под давлением $p = 0{,}1$ МПа и температуре $T_1 = 290$ К. Вследствие изобарного нагревания азот занял объем $V_2 = 10$ л. Определите: 1) объем V_1 газа до расширения; 2) температуру T_2 газа после расширения; 3) плотность газа до и после расширения.

Дано	*Решение*
$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $m = 7$ г $= 7 \cdot 10^{-3}$ кг $p = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па $T_1 = 290$ К $V_2 = 10$ л $= 10^{-2}$ м^3 $R = 8{,}31$ Дж/(К · моль)	$pV_1 = \frac{m}{M} RT_1$, $\quad pV_2 = \frac{m}{M} RT_2$, $\quad V_1 = \frac{mRT_1}{Mp}$, $T_2 = \frac{MpV_2}{mR}$, $\quad \rho_1 = \frac{m}{V_1}$, $\quad \rho_2 = \frac{m}{V_2}$.
1) V_1 — ? 2) T_2 — ? 3) ρ_1 — ? ρ_2 — ?	**Ответ** 1) $V_1 = 6{,}02 \cdot 10^{-3}$ м^3; 2) $T_2 = 481$ К; 3) $\rho_1 = 1{,}16$ кг/м^3; $\rho_2 = 0{,}7$ кг/м^3.

2.8 В сосуде вместимостью 1 л находится кислород массой 1 г. Определите концентрацию молекул кислорода в сосуде.

Дано

$V = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг

n — ?

Решение

$$p = nkT, \qquad n = \frac{p}{kT},$$

$$pV = \frac{m}{M}RT, \qquad \frac{p}{T} = \frac{m}{M}\frac{R}{V},$$

$$n = \frac{mR}{MkV}.$$

Ответ $n = 1{,}88 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

2.9 В сосуде вместимостью 5 л при нормальных условиях находится азот. Определите: 1) количество вещества ν; 2) массу азота; 3) концентрацию n его молекул в сосуде.

Ответ 1) $\nu = 0{,}233$ моль; 2) $m = 6{,}24$ г; 3) $n = 2{,}69 \cdot 10^{25}$ м$^{-3}$.

2.10 Средняя квадратичная скорость некоторого газа при нормальных условиях равна 480 м/с. Сколько молекул содержит 1 г этого газа?

Дано

$\langle v_{\text{кв}} \rangle = 480$ м/с

$T = 273$ К

$m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг

$R = 8{,}31$ Дж/(моль $\cdot$ К)

N — ?

Решение

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \qquad M = \frac{3RT}{\langle v_{\text{кв}} \rangle^2},$$

$$N = \frac{mN_A}{M}, \qquad N = \frac{mN_A \langle v_{\text{кв}} \rangle^2}{3RT}.$$

Ответ $N = 2{,}04 \cdot 10^{22}$.

2.11 В сосуде вместимостью $V = 0{,}3$ л при температуре $T = 290$ К находится некоторый газ. На сколько понизится давление газа в сосуде, если из него из-за утечки выйдет $N = 10^{19}$ молекул?

Дано	*Решение*
$V = 0{,}3\ \text{л} = 3\cdot10^{-4}\ \text{м}^3$ $T = 290$ К $N = 10^{19}$ Δp — ?	$p_1V = \dfrac{m_1}{M}RT$, $\quad p_2V = \dfrac{m_2}{M}RT$, $\Delta p = p_1 - p_2 = \dfrac{(m_1 - m_2)}{M}\cdot\dfrac{RT}{V} = \dfrac{\Delta mRT}{MV}$,

$$\frac{\Delta m}{M} = \frac{N}{N_A}, \qquad \Delta p = \frac{NRT}{N_AV} = \frac{NkT}{V}.$$

Ответ $\Delta p = 133$ Па.

2.12 Определите давление, оказываемое газом на стенки сосуда, если его плотность равна 0,01 кг/м³, а средняя квадратичная скорость молекул газа составляет 480 м/с.

Дано	*Решение*
$\rho = 0{,}01$ кг/м³ $\langle v_{\text{кв}}\rangle = 480$ м/с p — ?	$\langle v_{\text{кв}}\rangle = \sqrt{\dfrac{3RT}{M}}$, $pV = \dfrac{m}{M}RT$, $\quad \rho = \dfrac{m}{M}$,

$$p = \frac{m}{V}\frac{RT}{M} = \rho\frac{RT}{M}, \qquad \frac{RT}{M} = \frac{\langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{3},$$

$$p = \frac{\rho\langle v_{\text{кв}}\rangle^2}{3}.$$

Ответ $p = 768$ Па.

2.13 Определите наиболее вероятную скорость молекул газа, плотность которого при давлении 40 кПа составляет 0,35 кг/м³.

Дано	*Решение*
$\rho = 0{,}35$ кг/м³ $p = 40$ кПа $= 4 \cdot 10^4$ Па	$v_в = \sqrt{\dfrac{2RT}{M}}$, $\qquad \rho = \dfrac{m}{V}$, $\qquad pV = \dfrac{m}{M}RT$,
$v_в$ — ?	$\dfrac{RT}{M} = \dfrac{p}{\rho}$, $\qquad v_в = \sqrt{\dfrac{2p}{\rho}}$.

Ответ $v_в = 478$ м/с.

2.14 Определите среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon_0 \rangle$ поступательного движения молекул газа, находящегося под давлением 0,1 Па. Концентрация молекул газа равна 10^{13} см$^{-3}$.

Дано	*Решение*
$p = 0{,}1$ Па $n = 10^{13}$ см$^{-3}$ $= 10^{19}$ м$^{-3}$	$p = nkT$, $\qquad T = \dfrac{p}{nk}$,
$\langle \varepsilon_0 \rangle$ — ?	$\langle \varepsilon_0 \rangle = \dfrac{3}{2}kT = \dfrac{3}{2}k\dfrac{p}{nk} = \dfrac{3p}{2n}$.

Ответ $\langle \varepsilon_0 \rangle = 1{,}5 \cdot 10^{-20}$ Дж.

2.15 Определите: 1) наиболее вероятную $v_в$; 2) среднюю арифметическую $\langle v \rangle$; 3) среднюю квадратичную $\langle v_{кв} \rangle$ скорость молекул азота (N_2) при 27 °C.

Ответ 1) $v_в = 422$ м/с; 2) $\langle v \rangle = 476$ м/с; 3) $\langle v_{кв} \rangle = 517$ м/с.

2.16 При какой температуре средняя квадратичная скорость молекул кислорода больше их наиболее вероятной скорости на 100 м/с.

Дано

$\langle v_{\text{кв}}\rangle - v_{\text{в}} = 100$ м/с

$M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль

T — ?

Решение

$$\langle v_{\text{кв}}\rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \qquad v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}},$$

$$\langle v_{\text{кв}}\rangle - v_{\text{в}} = \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\sqrt{\frac{RT}{M}},$$

$$\frac{RT}{M} = \left(\frac{\langle v_{\text{кв}}\rangle - v_{\text{в}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2, \qquad T = \frac{M}{R}\left(\frac{\langle v_{\text{кв}}\rangle - v_{\text{в}}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\right)^2.$$

Ответ $T = 381$ К.

2.17 Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите формулу наиболее вероятной скорости $v_{\text{в}}$.

Дано

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\, e^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}}$$

$v_{\text{в}}$ — ?

Решение

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\, e^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}}.$$

$$\boxed{f(v) = \max} \qquad \frac{df}{dv} = 0,$$

$$\frac{df}{dv} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\left(2v\, e^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}} + v^2\, e^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}}\cdot\left(-\frac{m_0}{2kT}\cdot 2v\right)\right) = 0,$$

$$\frac{df}{dv} = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2}\cdot 2v\, e^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}}\left(1-\frac{m_0}{2kT}\cdot v^2\right) = 0, \qquad 1-\frac{m_0}{2kT}\cdot v_{\text{в}}^2 = 0,$$

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}.$$

Ответ $v_{\text{в}} = \sqrt{\dfrac{2kT}{m_0}}$.

2.18 Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите закон, выражающий распределение молекул по относительным скоростям u ($u = v/v_в$).

Дано

$$f(v) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\, e^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}}$$

$$u = \frac{v}{v_в}$$

$f(u)$ — ?

Решение

$$v_в = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}}, \qquad v = v_в u, \qquad dv = v_в\, du,$$

$$\frac{dN_v}{N} = f(v)\, dv, \qquad \frac{dN_u}{N} = f(u)\, du,$$

$$f(u) = f(v)\frac{dv}{du} = f(v)\cdot v_в,$$

$$f(u) = 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot v_в^2 \cdot u^2 \cdot e^{\frac{-m_0 v_в^2 u^2}{2kT}} \cdot v_в =$$

$$= 4\pi\left(\frac{m_0}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot \frac{2kT}{m_0} \cdot u^2 \cdot e^{\frac{-m_0 \cdot 2kTu^2}{2kTm_0}} \cdot \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} u^2\, e^{-u^2}.$$

Ответ $f(u) = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} u^2\, e^{-u^2}$.

2.19 Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите среднюю арифметическую скорость $\langle v \rangle$ молекул.

Указание: средняя арифметическая скорость определяется по формуле

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v\, f(v)\, dv.$$

Ответ $\langle v \rangle = \sqrt{\dfrac{8kT}{\pi m_0}}$.

2.20 Используя закон распределения молекул идеального газа по скоростям, найдите среднюю квадратичную скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$.

Дано	*Решение*
$f(v) = 4\pi \left(\dfrac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \, \mathrm{e}^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}}$	$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle}$,
$\langle v_{\text{кв}} \rangle$ — ?	$\langle v^2 \rangle = \int\limits_0^\infty v^2 f(v)\, \mathrm{d}v = 4\pi \left(\dfrac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int\limits_0^\infty v^4 \, \mathrm{e}^{\frac{-m_0 v^2}{2kT}} \, \mathrm{d}v$;

Табличный интеграл: $\int\limits_0^\infty x^4 \, \mathrm{e}^{-ax^2} \, \mathrm{d}x = \frac{3}{8}\sqrt{\pi}\, a^{-5/2}$.

$\boxed{x = v}$ $\qquad a = \dfrac{m_0}{2kT}$, $\qquad \langle v^2 \rangle = 4\pi \left(\dfrac{m_0}{2\pi kT} \right)^{3/2} \cdot \dfrac{3}{8}\sqrt{\pi} \left(\dfrac{m_0}{2\pi kT} \right)^{-5/2} = \dfrac{3kT}{m_0}$,

$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$.

Ответ $\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$.

2.21 Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите среднюю кинетическую энергию $\langle \varepsilon \rangle$ молекул.

Дано	*Решение*
$f(\varepsilon) = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \varepsilon^{1/2} \, \mathrm{e}^{-\varepsilon/(kT)}$	$\langle \varepsilon \rangle = \int\limits_0^\infty \varepsilon \, f(\varepsilon)\, \mathrm{d}\varepsilon = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \int\limits_0^\infty \varepsilon^{3/2} \, \mathrm{e}^{-\varepsilon/kT} \, \mathrm{d}\varepsilon$.
$\langle \varepsilon \rangle$ — ?	Табличный интеграл: $\int\limits_0^\infty x^{3/2} \, \mathrm{e}^{-ax} \, \mathrm{d}x = \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}\, a^{-5/2}$.

$\boxed{x = \varepsilon}$ $\qquad a = \dfrac{1}{kT}$, $\qquad \langle \varepsilon \rangle = \dfrac{2}{\sqrt{\pi}} (kT)^{-3/2} \cdot \dfrac{3}{4}\sqrt{\pi} \left(\dfrac{1}{kT} \right)^{-5/2} = \dfrac{3}{2} kT$.

Ответ $\langle \varepsilon \rangle = \dfrac{3}{2} kT$.

2.22 Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_в$ молекул.

Дано

$$f(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/(kT)}$$

$\varepsilon_в$ — ?

Решение

$$\frac{\mathrm{d}f(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon}=0\,,\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/(kT)}\right)=0\,,$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/(kT)}\left(\frac{1}{2}\varepsilon^{-1/2}-\frac{\varepsilon^{1/2}}{kT}\right)=0\,,$$

$$\frac{1}{2\varepsilon_в^{1/2}}-\frac{\varepsilon_в^{1/2}}{kT}=0\,,\qquad \varepsilon_в=\frac{1}{2}kT\,.$$

Ответ $\varepsilon_в=\dfrac{1}{2}kT$.

2.23 Используя функцию распределения молекул идеального газа по энергиям, найдите для данной температуры отношение средней кинетической энергии $\langle\varepsilon\rangle$ молекул к их наиболее вероятному значению энергии $\varepsilon_в$.

Дано

$$f(\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\varepsilon^{1/2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/(kT)}$$

T = const

$\dfrac{\langle\varepsilon\rangle}{\varepsilon_в}$ — ?

Решение

$$\langle\varepsilon\rangle=\int_0^\infty\varepsilon\,f(\varepsilon)\,\mathrm{d}\varepsilon=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}(kT)^{-3/2}\int_0^\infty\varepsilon^{3/2}\,\mathrm{e}^{-\varepsilon/(kT)}\,\mathrm{d}\varepsilon=\frac{3}{2}kT\,.$$

Используя результат задачи 2.22, находим

$$\varepsilon_в=\frac{1}{2}kT\,,\qquad \frac{\langle\varepsilon\rangle}{\varepsilon_в}=3\,.$$

Ответ $\dfrac{\langle\varepsilon\rangle}{\varepsilon_в}=3$.

2.24 Закон распределения молекул газа по скоростям в некотором молекулярном пучке имеет вид $f(v) = Av^3 e^{-m_0v^2/(2kT)}$. Определите: 1) наиболее вероятную скорость $v_в$; 2) наиболее вероятное значение энергии $\varepsilon_в$ молекул в этом пучке.

Дано

$$f(v) = Av^3\, e^{\frac{-m_0v^2}{(2kT)}}$$

---

1) $v_в$ — ?

2) $\varepsilon_в$ — ?

Решение

$\boxed{v_в}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}f(v)}{\mathrm{d}v} = 0.$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v}\left(Av^3 e^{\frac{-m_0v^2}{2kT}}\right) = A\left(3v^2 e^{\frac{-m_0v^2}{2kT}} - \frac{m_0}{2kT}\cdot 2v\cdot v^3 e^{\frac{-m_0v^2}{2kT}}\right) =$$

$$= Av^2\, e^{\frac{-m_0v^2}{2kT}}\left(3 - \frac{m_0v^2}{kT}\right) = 0, \qquad \frac{m_0v^2}{kT} = 3, \qquad v = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}, \qquad v_в = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}}.$$

$\boxed{\varepsilon_в}$ $\quad \dfrac{\mathrm{d}f(\varepsilon)}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0, \qquad f(\varepsilon) = f(v)\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon} = 0.$

$$\varepsilon = \frac{m_0v^2}{2}, \qquad v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m_0}}, \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\varepsilon} = (2m_0\varepsilon)^{-1/2},$$

$$f(\varepsilon) = A\cdot\left(\frac{2\varepsilon}{m_0}\right)^{3/2}\cdot e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}\cdot(2m_0\varepsilon)^{-1/2} = \frac{2A}{m_0^2}\cdot\varepsilon\, e^{\frac{-\varepsilon}{kT}},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\frac{2A}{m_0^2}\cdot\varepsilon\, e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}\right) = \frac{2A}{m_0^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varepsilon}\left(\varepsilon\, e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}\right) = \frac{2A}{m_0^2}\, e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}\left(1 - \frac{\varepsilon}{kT}\right) = 0,$$

$$1 - \frac{\varepsilon}{kT} = 0, \qquad \varepsilon = kT, \qquad \varepsilon_в = kT.$$

Ответ 1) $v_в = \sqrt{\dfrac{3kT}{m_0}}$; 2) $\varepsilon_в = kT$.

2.25 На какой высоте давление воздуха составляет 60% от давления на уровне моря? Считайте, что температура воздуха везде одинакова и равна 10 °С.

Дано	*Решение*
$p = 0{,}6p_0$ $t = 10\,°\text{C}$ $M = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль h — ?	$p = p_0\,\mathrm{e}^{-\frac{Mg(h-h_0)}{RT}}$, $\boxed{h_0 = 0}$ $\quad \dfrac{p}{p_0} = \mathrm{e}^{-\frac{Mgh}{RT}}$, $\dfrac{Mgh}{RT} = -\ln\dfrac{p}{p_0}$, $\quad h = -\dfrac{RT}{Mg}\ln\dfrac{p}{p_0}$.

Ответ $h = 4{,}22$ км.

2.26 Каково давление воздуха в шахте на глубине 1 км, если считать, что температура по всей высоте постоянная и равна 22 °С, а ускорение свободного падения не зависит от высоты? Давление воздуха у поверхности Земли примите равным p_0.

Дано	*Решение*
$h = 1$ км $= 10^3$ м $t = 22$ °С; $T = 295$ К $M = 29\cdot10^{-3}$ кг/моль $g = \text{const}$ p_0 p — ?	$p = p_0\,\mathrm{e}^{-\Pi/(kT)}$, $\qquad \Pi = -m_0gh$, $p = p_0\,\mathrm{e}^{-m_0gh/(kT)} = p_0\,\mathrm{e}^{-Mgh/(RT)}$.

Ответ $p = 1{,}12p_0$.

2.27 Определите отношение давления воздуха на высоте 1 км к давлению на дне скважины глубиной 1 км. Воздух у поверхности Земли находится при нормальных условиях, и его температура не зависит от высоты.

Дано	*Решение*
$h_1 = 1$ км $= 10^3$ м $h_2 = -1$ км $= 10^{-3}$ м $T = 273$ К $\frac{p_1}{p_2}$ — ?	$p_1 = p_0\, \mathrm{e}^{-\frac{Mgh_1}{RT}}$, $\quad p_2 = p_0\, \mathrm{e}^{-\frac{Mgh_2}{RT}}$, $\frac{p_1}{p_2} = \mathrm{e}^{-\frac{Mgh_1}{RT} - \left(-\frac{Mgh_2}{RT}\right)}$, $\quad \frac{p_1}{p_2} = \mathrm{e}^{-\frac{Mg}{RT}(h_1 - h_2)}$

Ответ $\frac{p_1}{p_2} = 0{,}778$.

2.28 На какой высоте плотность воздуха в е раз (е — основание натуральных логарифмов) меньше по сравнению с его плотностью на уровне моря? Температуру воздуха и ускорение свободного падения считайте не зависящими от высоты.

Ответ $h = 7{,}98$ км.

• •

Распределение Больцмана во внешнем потенциальном поле

$$n = n_0\, \mathrm{e}^{-Mgh/(RT)} = n_0\, \mathrm{e}^{-m_0 gh/(kT)}$$

или

$$n = n_0\, \mathrm{e}^{-\Pi/(kT)},$$

где n и n_0 — концентрация молекул на высоте h и $h = 0$; $\Pi = m_0 gh$ — потенциальная энергия молекулы в поле тяготения.

2.29

Используя идею установки Перрена для определения постоянной Авогадро и применив к частицам краски, взвешенным в воде, больцмановское распределение, найдите объем частиц, если при расстоянии между двумя слоями 80 мкм число взвешенных частиц в одном слое вдвое больше, чем в другом. Плотность растворенной краски 1700 кг/м³, а температура окружающей среды 300 К.

Дано

$\Delta h = 80$ мкм $= 8 \cdot 10^{-5}$ м

$\dfrac{n_1}{n_2} = 2$

$\rho = 1700$ кг/м³

$\rho_1 = 1000$ кг/м³

$T = 300$ К

$N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль⁻¹

V — ?

Решение

$$n = n_0\, e^{\frac{-(m-m_1)g\,\Delta h}{kT}}, \qquad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \qquad m_1 = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_1,$$

$n_1 \,.\,.\,.\,.\,.\, h_1$

$n_2 \,.\,.\,.\,.\,.\, h_2$

$$k = \frac{R}{N_A},$$

$$N_A = \frac{3RT \ln \dfrac{n_1}{n_2}}{4\pi r^3 (\rho - \rho_1) g (h_2 - h_1)} = \frac{RT \ln \dfrac{n_1}{n_2}}{Vg(\rho - \rho_1)\,\Delta h},$$

$$V = \frac{RT \ln \dfrac{n_1}{n_2}}{N_A g\, \Delta h (\rho - \rho_1)}.$$

Ответ

$V = 5{,}22 \cdot 10^{-21}$ м³.

2.30

Определите среднюю длину свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода, находящегося при температуре 0 °С, если среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых молекулой в 1 с, равно 3,7 · 10⁹.

Дано

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T = 273$ К

$\langle z \rangle = 3{,}7 \cdot 10^{9}$ с⁻¹

$\langle l \rangle$ — ?

Решение

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle}, \qquad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

$$\langle l \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{1}{\langle z \rangle}.$$

Ответ $\langle l \rangle = 115$ нм.

2.31 При каком давлении средняя длина свободного пробега молекул водорода равна 2,5 см, если температура газа равна 67 °C? Диаметр молекулы водорода примите равным 0,28 нм.

Дано

$\langle l\rangle = 2{,}5$ см $= 2{,}5\cdot10^{-2}$ м

$t = 67$ °C, $T = 340$ К

$d = 0{,}28$ нм $= 2{,}8\cdot10^{-10}$ м

p — ?

Решение

$$p = nkT, \qquad \langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi d^2 n},$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\pi d^2\langle l\rangle},$$

$$p = \frac{kT}{\sqrt{2}\cdot\pi d^2\langle l\rangle}.$$

Ответ $p = 0{,}539$ Па.

2.32 Определите среднюю продолжительность $\langle\tau\rangle$ свободного пробега молекул водорода при температуре 27 °C и давлении 0,5 кПа. Диаметр молекулы водорода примите равным 0,28 нм.

Дано

$M = 2\cdot10^{-3}$ кг/моль

$t = 27$ °C, $T = 300$ К

$p = 0{,}5$ кПа $= 5\cdot10^{2}$ Па

$d = 0{,}28$ нм $= 2{,}8\cdot10^{-10}$ м

$\langle\tau\rangle$ — ?

Решение

$$\langle\tau\rangle = \frac{1}{\langle z\rangle},$$

$$\langle z\rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n\langle v\rangle,$$

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad n = \frac{p}{kT},$$

$$\langle\tau\rangle = \frac{kT\sqrt{\pi M}}{\sqrt{2}\pi d^2 p\sqrt{8RT}} = \frac{k\sqrt{TM}}{4\sqrt{\pi}Rd^2 p}.$$

Ответ $\langle\tau\rangle = 13{,}3$ нс.

2.33 Средняя длина свободного пробега $\langle l_1 \rangle$ молекул водорода при нормальных условиях составляет 0,1 мкм. Определите среднюю длину их свободного пробега при давлении 0,1 мПа, если температура газа остается постоянной.

Дано

$\langle l_1 \rangle = 0{,}1$ мкм $= 10^{-7}$ м

$p_2 = 0{,}1$ мПа $= 10^{-4}$ Па

$p_1 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па

$T = \text{const}$

$\langle l_2 \rangle$ — ?

Решение

$$\langle l \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad p = nkT,$$

$$\frac{\langle l_1 \rangle}{\langle l_2 \rangle} = \frac{p_2}{p_1}, \qquad \langle l_2 \rangle = \frac{p_1 \langle l_1 \rangle}{p_2}.$$

Ответ $\langle l_2 \rangle = 101$ м.

2.34 При температуре 300 К и некотором давлении средняя длина свободного пробега $\langle l \rangle$ молекул кислорода равна 0,1 мкм. Чему равно среднее число $\langle z \rangle$ столкновений, испытываемых молекулами в 1 с, если сосуд откачать до 0,1 первоначального давления? Температуру газа считайте постоянной.

Дано

$T = 300$ К

$\langle l \rangle = 0{,}1$ мкм $= 10^{-7}$ м

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$p_1 = 0{,}1p$

$\langle z_1 \rangle$ — ?

Решение

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle}, \qquad \langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

$$\frac{\langle z_1 \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{p_1}{p}, \qquad \langle z_1 \rangle = \langle z \rangle \frac{p_1}{p},$$

$$\langle z_1 \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle l \rangle} \cdot \frac{p_1}{p} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{p_1}{\langle l \rangle p}.$$

Ответ $\langle z_1 \rangle = 4{,}45 \cdot 10^8$ с$^{-1}$.

2.35 Определите: 1) плотность ρ воздуха в сосуде; 2) концентрацию n его молекул; 3) среднюю длину свободного пробега $\langle l\rangle$ молекул, если сосуд откачан до давления 0,13 Па. Диаметр молекул воздуха примите равным 0,27 нм. Температура воздуха 300 К.

Дано	**Решение**
$p = 0{,}13$ Па $d = 0{,}27$ нм $= 2{,}7\cdot 10^{-10}$ м $T = 300$ К $M = 29\cdot 10^{-3}$ кг/моль	$\rho = \dfrac{m}{V}$, $\quad pV = \dfrac{m}{M}RT$, $\rho = \dfrac{pM}{RT}$, $\quad p = nkT$, $n = \dfrac{p}{kT}$, $\quad \langle l\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$.
1) ρ — ? 2) n — ? 3) $\langle l\rangle$ — ?	

Ответ 1) $\rho = 1{,}51\cdot 10^{-6}$ кг/м³; 2) $n = 3{,}14\cdot 10^{19}$ м⁻³; 3) $\langle l\rangle = 0{,}1$ м.

2.36 Определите коэффициент теплопроводности λ азота, находящегося в некотором объеме при температуре 280 К. Эффективный диаметр молекул азота примите равным 0,38 нм.

Дано	**Решение**
$M = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль $T = 280$ К $d = 0{,}38$ нм $= 3{,}8\cdot 10^{-10}$ м	$\lambda = \dfrac{1}{3}c_V\rho\langle l\rangle\langle v\rangle$, $\quad c_V = \dfrac{i}{2}\dfrac{R}{M}$, $\quad \boxed{i = 5}$ $\quad \rho = \dfrac{m}{V}$, $pV = \dfrac{m}{M}RT$, $\quad \rho = \dfrac{pM}{RT}$, $\quad \langle l\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, $\quad p = nkT$,
λ — ?	

$$n = \frac{p}{kT}, \qquad \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad \lambda = \frac{1}{3}\frac{i}{2}\frac{R}{M}\frac{pM}{RT}\frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \frac{i}{3}\frac{k}{\pi d^2}\sqrt{\frac{RT}{\pi M}}.$$

Ответ $\lambda = 8{,}25$ мВт/(м · К).

2.37 Кислород находится при нормальных условиях. Определите коэффициент теплопроводности λ кислорода, если эффективный диаметр его молекул равен 0,36 нм.

Ответ $\lambda = 8{,}49$ мВт/(м · К).

2.38 Пространство между двумя параллельными пластинами площадью 150 см^2 каждая, находящимися на расстоянии 5 мм друг от друга, заполнено кислородом. Одна пластина поддерживается при температуре 17 °С, другая — при температуре 27 °С. Определите количество теплоты, прошедшее за 5 мин посредством теплопроводности от одной пластины к другой. Кислород находится при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода считать равным 0,36 нм.

Дано	*Решение*
$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $S = 150$ см^2 $= 15 \cdot 10^{-3}$ м^2 $\Delta x = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м $t_1 = 17$ °C $t_2 = 27$ °C $t = 5$ мин $= 300$ с $T = 273$ К $d = 0{,}36$ нм $= 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м Q — ?	$Q = \left\lvert \lambda \frac{\Delta T}{\Delta x} St \right\rvert, \qquad \Delta T = t_2 - t_1,$ $\lambda = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}}$ (см. задачу 2.36), $Q = \frac{i}{3} \frac{k}{\pi d^2} \sqrt{\frac{RT}{\pi M}} \frac{(t_2 - t_1)}{\Delta x} St.$

Ответ $Q = 76{,}4$ Дж.

• •

Зависимость между коэффициентами теплопроводности, диффузии и внутреннего трения

$$\eta = \rho D, \qquad \lambda / \eta c_V = 1.$$

2.39 Определите коэффициент диффузии D кислорода при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул кислорода примите равным 0,36 нм.

Дано

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T = 273$ К

$p = 1{,}013 \cdot 10^{5}$ Па

$d = 0{,}36$ нм $= 3{,}6 \cdot 10^{-10}$ м

D — ?

Решение

$$D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle, \qquad \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad p = nkT, \qquad n = \frac{p}{kT},$$

$$D = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{kT}{\sqrt{2}\pi p d^2}.$$

Ответ $D = 9{,}18 \cdot 10^{-6}$ м²/с.

2.40 Определите массу азота, прошедшего вследствие диффузии через площадку 50 см² за 20 с, если градиент плотности в направлении, перпендикулярном площадке, равен 1 кг/м⁴. Температура азота 290 К, а средняя длина свободного пробега его молекул равна 1 мкм.

Дано

$S = 50$ см² $= 5 \cdot 10^{-3}$ м²

$t = 20$ с

$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\dfrac{d\rho}{dx} = 1$ кг/м⁴

$T = 290$ К

$\langle l\rangle = 1$ мкм $= 10^{-6}$ м

m — ?

Решение

$$m = \left| D\frac{d\rho}{dx} St \right|, \qquad D = \frac{1}{3}\langle v\rangle\langle l\rangle,$$

$$\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}, \qquad m = \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\langle l\rangle\frac{d\rho}{dx}St.$$

Ответ $m = 15{,}6$ мг.

2.41 Определите, во сколько раз отличаются коэффициенты динамической вязкости η углекислого газа и азота, если оба газа находятся при одинаковой температуре и одном и том же давлении. Эффективные диаметры молекул этих газов равны.

Дано

$M_1 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T_1 = T_2$

$p_1 = p_2$

$d_1 = d_2$

$\frac{\eta_1}{\eta_2}$ — ?

Решение

$$\eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle, \qquad \langle v\rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}},$$

$$\langle l\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \qquad p = nkT,$$

$$pV = \frac{m}{M}RT, \qquad \rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT},$$

$$\eta_1 = \frac{1}{3}\frac{p_1 M_1}{RT_1}\sqrt{\frac{8RT_1}{\pi M_1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_1^2 n_1},$$

$$\eta_2 = \frac{1}{3}\frac{p_2 M_2}{RT_2}\sqrt{\frac{8RT_2}{\pi M_2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\pi d_2^2 n_2}, \quad p_1 = p_2, \quad T_1 = T_2, \quad d_1 = d_2, \quad n_1 = n_2,$$

$$\frac{\eta_1}{\eta_2} = \frac{M_1}{M_2}\sqrt{\frac{M_2}{M_1}} = \sqrt{\frac{M_1}{M_2}}.$$

Ответ $\frac{\eta_1}{\eta_2} = 1{,}25$.

2.42 Определите коэффициент теплопроводности λ азота, если коэффициент динамической вязкости η для него при тех же условиях равен 10 мкПа · с.

Дано

$\eta = 10$ мкПа · с $= 10^{-5}$ Па · с

$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

λ — ?

Решение

$$\lambda = \frac{1}{3}c_V\rho\langle v\rangle\langle l\rangle, \qquad \eta = \frac{1}{3}\rho\langle v\rangle\langle l\rangle, \qquad \lambda = c_V\eta,$$

$$c_V = \frac{i}{2}\frac{R}{M}, \qquad \lambda = \frac{i}{2}\frac{R}{M}\eta, \qquad i = 5.$$

Ответ $\lambda = 7{,}42$ мВт/(м · К).

2.43 Азот находится под давлением 100 кПа при температуре 290 К. Определите коэффициенты диффузии D и внутреннего трения η. Эффективный диаметр молекул азота принять равным 0,38 нм.

Ответ $D = 9{,}74\cdot 10^{-6}$ м²/с; $\eta = 1{,}13\cdot 10^{-5}$ кг/(м · с).

2.44 Ниже какого давления можно говорить о вакууме между стенками сосуда Дьюара, если расстояние между стенками сосуда равно 8 мм, а температура 17 °С? Эффективный диаметр молекул воздуха принять равным 0,27 нм.

Дано	*Решение*
$l = 8$ мм $= 8\cdot 10^{-3}$ м $t = 17$ °С, $T = 290$ К $d = 0{,}27$ нм $= 2{,}7\cdot 10^{-10}$ м $p_{\text{вак}}$ — ?	$\langle l\rangle \approx l$, $\quad \langle l\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, $\quad p = nkT$, $p = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2\langle l\rangle}$, $\quad p_{\text{вак}} \leqslant \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 l}$.

Ответ $p_{\text{вак}} \leqslant 1{,}54$ Па.

2.45 Давление разреженного газа в рентгеновской трубке при температуре 17 °С равно 130 мкПа. Можно ли вести разговор о высоком вакууме, если характерный размер l_0 (расстояние между катодом и анодом трубки) составляет 50 мм? Эффективный диаметр молекул воздуха примите равным 0,27 нм.

Дано	*Решение*
$p = 130$ мкПа $= 13\cdot 10^{-5}$ Па $l_0 = 50$ мм $= 5\cdot 10^{-2}$ м $d = 0{,}27$ нм $= 2{,}7\cdot 10^{-10}$ м $t = 17$ °С, $T = 290$ К $\langle l\rangle$ — ?	$\langle l\rangle = \dfrac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}$, $\quad p = nkT$, $\quad \langle l\rangle = \dfrac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}$. **Ответ** $\langle l\rangle = 95{,}1$ м, $\langle l\rangle \gg l_0$. Вакуум высокий.

2.2. Основы термодинамики

2.46 Азот массой $m = 10$ г находится при температуре $T = 290$ К. Определите: 1) среднюю кинетическую энергию одной молекулы азота; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения всех молекул азота. Газ считайте идеальным.

Дано	*Решение*
$m = 10\ \text{г} = 10^{-2}$ кг $T = 290$ К $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль 1) $\langle\varepsilon\rangle$ — ? 2) $\langle E_{\text{вр}}\rangle$ — ?	$\langle\varepsilon\rangle = \frac{i}{2}kT$, $\quad i = 5$, $\langle E_{\text{вр}}\rangle = \langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle N$, $\quad \langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle = i_{\text{вр}}\frac{kT}{2}$, $\quad i_{\text{вр}} = 2$, $N = \frac{mN_{\text{А}}}{M}$, $\quad \langle E_{\text{вр}}\rangle = i_{\text{вр}}\frac{kT}{2}\cdot\frac{mN_{\text{А}}}{M}$.

Ответ 1) $\langle\varepsilon\rangle = 10^{-20}$ Дж; 2) $\langle E_{\text{вр}}\rangle = 860$ Дж.

2.47 Кислород массой $m = 1$ кг находится при температуре $T = 320$ К. Определите: 1) внутреннюю энергию молекул кислорода; 2) среднюю кинетическую энергию вращательного движения молекул кислорода. Газ считайте идеальным.

Дано	*Решение*
$m = 1$ кг $T = 320$ К $M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль 1) U — ? 2) $\langle E_{\text{вр}}\rangle$ — ?	$U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}RT$, $\quad i = 5$, $\quad \langle E_{\text{вр}}\rangle = \langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle \cdot N$, $\langle\varepsilon_{\text{вр}}\rangle = i_{\text{вр}}\frac{kT}{2}$, $\quad N = \frac{mN_{\text{А}}}{M}$, $\langle E_{\text{вр}}\rangle = i_{\text{вр}}\frac{kT}{2}\cdot\frac{mN_{\text{А}}}{M}$, $\quad i_{\text{вр}} = 2$.

Ответ 1) $U = 208$ кДж; 2) $\langle E_{\text{вр}}\rangle = 83{,}1$ кДж.

2.48 В закрытом сосуде находится смесь азота массой $m_1 = 56$ г и кислорода массой $m_2 = 64$ г. Определите изменение внутренней энергии этой смеси, если ее охладили на 20 °С.

Ответ $\Delta U = \left(\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}\right) \cdot \frac{i}{2} R \, \Delta T = 1{,}66$ кДж.

2.49 Считая азот идеальным газом, определите его удельную теплоемкость: 1) для изохорного процесса; 2) для изобарного процесса.

Ответ 1) $c_V = 742$ Дж/(кг · К); 2) $c_p = 1{,}04$ кДж/(кг · К).

2.50 Определите удельные теплоемкости c_V и c_p, если известно, что некоторый газ при нормальных условиях имеет удельный объем $v = 0{,}7$ м³/кг. Что это за газ?

Дано	*Решение*
$v = 0{,}7$ м³/кг $T = 273$ К $p = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па	$v = \frac{V}{m}$, $\quad pV = \frac{m}{M} RT$, $M = \frac{RT}{pv}$, $\quad i = 5$,
c_V — ? c_p — ?	$c_V = \frac{i}{2} \frac{R}{M}$, $\quad c_p = \frac{i+2}{2} \frac{R}{M}$.

Ответ кислород; $c_V = 649$ Дж/(кг · К); $c_p = 909$ Дж/(кг · К).

Связь между молярной C_m и удельной c теплоемкостями газа

$$C_m = cM,$$

где M — молярная масса газа.

2.51 Определите удельные теплоемкости c_V и c_p смеси углекислого газа массой $m_1 = 3$ г и азота массой $m_2 = 4$ г.

Дано

$m_1 = 3$ г $= 3 \cdot 10^{-3}$ кг

$M_1 = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m_2 = 4$ г $= 4 \cdot 10^{-3}$ кг

$M_2 = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

c_V — ?

c_p — ?

Решение

$\Delta Q = c_V m \, \Delta T$, $\quad m = m_1 + m_2$,

$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2$, $\quad \Delta Q_1 = c_{V1} m_1 \, \Delta T$,

$\Delta Q_2 = c_{V2} m_2 \, \Delta T$,

$c_V m \, \Delta T = c_{V1} m_1 \, \Delta T + c_{V2} m_2 \, \Delta T$,

$$c_V = \frac{c_{V1} m_1 + c_{V2} m_2}{m_1 + m_2},$$

$$c_{V1} = \frac{i_1}{2} \frac{R}{M_1}, \qquad c_{V2} = \frac{i_2}{2} \frac{R}{M_2},$$

$$\boxed{i_1 = 6} \qquad \boxed{i_2 = 5}$$

$$c_V = \frac{R}{2} \left(\frac{i_1 m_1}{M_1} + \frac{i_2 m_2}{M_2} \right) \cdot \frac{1}{m_1 + m_2}, \qquad c_p = \frac{c_{p1} m_1 + c_{p2} m_2}{m_1 + m_2},$$

$$c_{p1} = \frac{i_1 + 2}{2} \frac{R}{M_1}, \qquad c_{p2} = \frac{i_2 + 2}{2} \frac{R}{M_2},$$

$$c_p = \frac{R}{2} \left(\frac{(i_1 + 2) m_1}{M_1} + \frac{(i_2 + 2) m_2}{M_2} \right) \cdot \frac{1}{m_1 + m_2}.$$

Ответ $c_V = 667$ Дж/(кг · К); $\quad c_p = 917$ Дж/(кг · К).

Молярная теплоемкость

при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{i}{2} R,$$

$$C_p = \frac{i+2}{2} R, \qquad C_p = C_V + R.$$

2.52 Определите показатель адиабаты γ для смеси газов, содержащей гелий массой $m_1 = 8$ г и водород массой $m_2 = 2$ г.

Дано	*Решение*
$m_1 = 8\ \text{г} = 8 \cdot 10^{-3}$ кг $M_1 = 4 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $m_2 = 2\ \text{г} = 2 \cdot 10^{-3}$ кг $M_2 = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль γ — ?	$\gamma = \dfrac{c_p}{c_V}$, $c_p = \dfrac{c_{p1}m_1 + c_{p2}m_2}{m_1 + m_2}$, $c_V = \dfrac{c_{V1}m_1 + c_{V2}m_2}{m_1 + m_2}$, (см. задачу 2.51)

$$c_{V1} = \frac{i_1}{2}\frac{R}{M_1}, \qquad c_{V2} = \frac{i_2}{2}\frac{R}{M_2}, \qquad \boxed{i_1 = 3} \qquad \boxed{i_2 = 5}$$

$$c_{p1} = \frac{i_1 + 2}{2}\frac{R}{M_1}, \qquad c_{p2} = \frac{i_2 + 2}{2}\frac{R}{M_2},$$

$$\gamma = \left(\frac{i_1 + 2}{2}\frac{R}{M_1}m_1 + \frac{i_2 + 2}{2}\frac{R}{M_2}m_2\right) \Bigg/ \left(\frac{i_1}{2}\frac{R}{M_1}m_1 + \frac{i_2}{2}\frac{R}{M_2}m_2\right) =$$

$$= \frac{(i_1 + 2)\dfrac{m_1}{M_1} + (i_2 + 2)\dfrac{m_2}{M_2}}{i_1\dfrac{m_1}{M_1} + i_2\dfrac{m_2}{M_2}}.$$

Ответ $\gamma = 1{,}55$.

2.53 Применяя первое начало термодинамики и уравнение состояния идеального газа, покажите, что разность удельных теплоемкостей $c_p - c_V = R/M$.

Ответ $c_p - c_V = R/M$.

2.54 Кислород массой 32 г находится в закрытом сосуде под давлением 0,1 МПа при температуре 290 К. После нагревания давление в сосуде повысилось в 4 раза. Определите: 1) объем сосуда; 2) температуру, до которой газ нагрели; 3) количество теплоты, сообщенное газом.

Ответ 1) $V = 2{,}41 \cdot 10^{-2}$ м^3; 2) $T = 1{,}16$ кК; 3) $Q = 18{,}1$ кДж.

2.55 Определите количество теплоты, сообщенное газу, если в процессе изохорного нагревания кислорода объемом $V = 20$ л его давление изменилось на $\Delta p = 100$ кПа.

Дано	Решение
$V = 20$ л $= 2 \cdot 10^{-2}$ м^3 $\Delta p = 100$ кПа $= 10^5$ Па	$Q = \Delta U + A$, $\quad A = p\,\Delta V\big\|_{V=\text{const}} = 0$,
Q — ?	$Q = \Delta U$, $\quad \Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\,\Delta T$,

$$p_1V = \frac{m}{M}RT_1, \qquad p_2V = \frac{m}{M}RT_2,$$

$$p_2V - p_1V = \frac{m}{M}RT_2 - \frac{m}{M}RT_1,$$

$$\Delta pV = \frac{m}{M}R\,\Delta T, \qquad Q = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R\,\Delta T = \frac{i}{2}V\,\Delta p \cdot \qquad \boxed{i=5}$$

Ответ $Q = 5$ кДж.

2.56 Двухатомный идеальный газ ($\nu = 2$ моль) нагревают при постоянном объеме до температуры 289 К. Определите количество теплоты, которое необходимо сообщить газу, чтобы увеличить его давление в $n = 3$ раза.

Ответ $Q = \frac{i}{2}\nu R(n-1)T_1 = 24$ кДж.

2.57 При изобарном нагревании некоторого идеального газа ($\nu = 2$ моль) на $\Delta T = 90$ К ему было сообщено количество теплоты 5,25 кДж. Определите: 1) работу, совершаемую газом; 2) изменение внутренней энергии газа; 3) величину $\gamma = c_p/c_V$.

Ответ 1) $A = 1{,}5$ кДж; 2) $\Delta U = 0{,}6$ кДж; 3) $\gamma = 1{,}4$.

2.58 Азот массой $m = 280$ г расширяется в результате изобарного процесса при давлении $p = 1$ МПа. Определите: 1) работу расширения; 2) конечный объем газа, если на расширение затрачена теплота $Q = 5$ кДж, а начальная температура азота $T_1 = 290$ К.

Дано	Решение
$m = 280$ г $= 0{,}28$ кг $M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $p = \text{const}$ $p = 1$ МПа $= 10^6$ Па $Q = 5$ кДж $= 5 \cdot 10^3$ Дж $T_1 = 290$ К 1) A — ? 2) V_2 — ?	$A = \frac{m}{M}R(T_2 - T_1)$, $\quad Q = \frac{m}{M}C_p(T_2 - T_1)$, $\frac{A}{Q} = \frac{R}{C_p}$, $C_p = \frac{i+2}{2}R$, $\quad \boxed{i = 5}$ $A = \frac{QR \cdot 2}{(i+2)R} = \frac{2Q}{i+2}$,

$$A = p(V_2 - V_1), \qquad pV_1 = \frac{m}{M}RT_1,$$

$$V_2 = \frac{A}{p} + V_1 = \frac{1}{p}\left(A + \frac{m}{M}RT_1\right).$$

Ответ 1) $A = 1{,}43$ кДж; 2) $V_2 = 0{,}026$ м³.

2.59 Кислород объемом 1 л находится под давлением 1 МПа. Определите, какое количество теплоты необходимо сообщить газу, чтобы: 1) увеличить его объем вдвое в результате изобарного процесса; 2) увеличить его давление вдвое в результате изохорного процесса.

Дано

$V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$p_1 = 1$ МПа $= 10^6$ Па

1) $p_1 = \text{const}$

$V_2 = 2V_1$

2) $V_1 = \text{const}$

$p_2 = 2p_1$

---

1) Q_1 — ?

2) Q_2 — ?

Решение

$\boxed{p_1 = \text{const}}$

$$Q_1 = \frac{m}{M} C_p \, \Delta T,$$

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \qquad p_1 V_2 = \frac{m}{M} R T_2,$$

$$p_1 \, \Delta V = \frac{m}{M} R \, \Delta T, \qquad \Delta V = V_2 - V_1,$$

$$Q_1 = \frac{p_1 \, \Delta V}{R} \cdot C_p = \frac{p_1 \, \Delta V}{R} \cdot \frac{(i+2)R}{2} = \frac{(i+2)}{2} p_1 \, \Delta V,$$

$\boxed{i = 5}$

$\boxed{V_1 = \text{const}}$

$$Q_2 = \frac{m}{M} C_V \, \Delta T,$$

$$p_1 V_1 = \frac{m}{M} R T_1, \qquad p_2 V_1 = \frac{m}{M} R T_2,$$

$$V_1 \, \Delta p = \frac{m}{M} R \, \Delta T, \qquad \Delta p = p_2 - p_1,$$

$$Q_2 = \frac{V_1 \, \Delta p}{R} \cdot C_V = \frac{V_1 \, \Delta p}{R} \cdot \frac{i}{2} R = \frac{i}{2} V_1 \, \Delta p.$$

$\boxed{i = 5}$

Ответ 1) $Q_1 = 3{,}5$ кДж; 2) $Q_2 = 2{,}5$ кДж.

2.60 Некоторый газ массой $m = 5$ г расширяется изотермически от объема V_1 до объема $V_2 = 2V_1$. Работа расширения $A = 1$ кДж. Определите среднюю квадратичную скорость молекул газа.

Ответ $\langle v_{\text{кв}} \rangle = 930$ м/с.

2.61 Азот массой $m = 14$ г сжимают изотермически при температуре $T = 300$ К от давления $p_1 = 100$ кПа до давления $p_2 = 500$ кПа. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу сжатия; 3) количество выделившейся теплоты.

Ответ 1) $\Delta U = 0$; 2) $A = -2{,}01$ кДж; 3) $Q = 2{,}01$ кДж.

2.62 Некоторый газ массой 1 кг находится при температуре $T = 300$ К и под давлением $p_1 = 0{,}5$ МПа. В результате изотермического сжатия давление газа увеличилось в два раза. Работа, затраченная на сжатие, $A = -432$ кДж. Определите: 1) какой это газ; 2) первоначальный удельный объем газа.

Дано

$m = 1$ кг

$T = 300$ К

$p_1 = 0{,}5$ МПа $= 5 \cdot 10^5$ Па

$p_2 = 2p_1$

$A = -432$ кДж $=$

$= -4{,}32 \cdot 10^5$ Дж

1) газ — ?

2) v_1 — ?

Решение

$\mathrm{d}A = p\,\mathrm{d}V$, $\qquad pV = \dfrac{m}{M}RT$,

$\mathrm{d}A = \dfrac{mRT}{MV}\mathrm{d}V$, $\qquad A = \displaystyle\int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT}{M}\frac{\mathrm{d}V}{V} = \frac{mRT}{M}\ln\frac{V_2}{V_1}$,

$p_1V_1 = p_2V_2$, $\qquad A = \dfrac{mRT}{M}\ln\dfrac{p_1}{p_2}$,

$M = \dfrac{mRT}{A}\ln\dfrac{p_1}{p_2}$, $\qquad v_1 = \dfrac{V_1}{m}$,

$V_1 = \dfrac{mRT}{Mp_1}$, $\qquad v_1 = \dfrac{RT}{Mp_1}$.

Ответ 1) гелий; 2) $v_1 = 1{,}25$ м³/кг.

2.63 Азот массой $m = 50$ г находится при температуре $T_1 = 280$ К. В результате изохорного охлаждения его давление уменьшилось в $n = 2$ раза, а затем в результате изобарного расширения температура газа в конечном состоянии стала равной первоначальной. Определите: 1) работу, совершенную газом; 2) изменение внутренней энергии газа.

Ответ 1) $A = 2{,}08$ кДж; 2) $\Delta U = 0$.

2.64 Работа расширения некоторого двухатомного идеального газа составляет $A = 2$ кДж. Определите количество подведенной к газу теплоты, если процесс протекал: 1) изотермически; 2) изобарно.

Дано

$A = 2$ кДж $= 2 \cdot 10^3$ Дж

$i = 5$

1) $T = \text{const}$

2) $p = \text{const}$

1) Q_1 — ?

2) Q_2 — ?

Решение

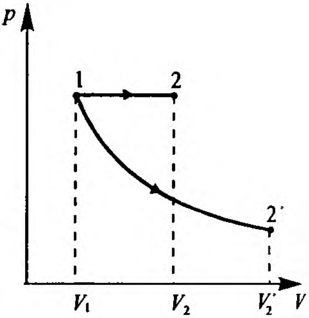
$Q_1 = \Delta U + A$,

$T = \text{const}$,

$\Delta U = 0$, $\quad Q_1 = A$,

$p = \text{const}$, $\quad A = p\,\Delta V$,

$$p\,\Delta V = \frac{m}{M} R\,\Delta T,$$



$$A = \frac{m}{M} R\,\Delta T, \qquad \Delta T = \frac{MA}{mR}, \qquad \Delta U = \frac{m}{M} C_V\,\Delta T = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R \cdot \frac{MA}{mR} = \frac{iA}{2},$$

$$Q_2 = \Delta U + A = \frac{i}{2} A + A = A\left(\frac{i}{2} + 1\right).$$

Ответ 1) $Q_1 = 2$ кДж; 2) $Q_2 = 7$ кДж.

2.65 При адиабатном расширении кислорода ($\nu = 2$ моль), находящегося при нормальных условиях, его объем увеличился в $n = 3$ раза. Определите: 1) изменение внутренней энергии газа; 2) работу расширения газа.

Дано

$\nu = 2$ моль

$T_1 = 273$ К

$V_2 = nV_1$

$n = 3$

1) ΔU — ?

2) A — ?

Решение

$Q = \Delta U + A$, $\qquad Q = 0$, $\qquad \Delta U = -A$,

$\Delta U = \nu C_V\,\Delta T$, $\qquad C_V = \frac{i}{2} R$, $\qquad i = 5$,

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}, \quad \gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i} = \frac{7}{5}, \quad T_2 = T_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1},$$

$$\Delta U = \nu\frac{i}{2} R(T_2 - T_1) = \nu\frac{i}{2} RT_1\left[\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right], \quad A = -\Delta U.$$

Ответ 1) $\Delta U = -4{,}03$ кДж; 2) $A = 4{,}03$ кДж.

2.66 Азот массой $m = 1$ кг занимает при температуре $T_1 = 300$ К объем $V_1 = 0{,}5$ м^3. В результате адиабатного сжатия давление газа увеличилось в 3 раза. Определите: 1) конечный объем газа; 2) его конечную температуру; 3) изменение внутренней энергии газа.

Ответ

1) $V_2 = V_1\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1}{\gamma}} = 0{,}228$ м^3; 2) $T_2 = T_1\left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 411$ К;

3) $\Delta U = \dfrac{m}{M}\cdot\dfrac{i}{2}R(T_2 - T_1) = 82{,}4$ кДж.

2.67 Азот, находившийся при температуре 400 К, подвергли адиабатному расширению, в результате которого его объем увеличился в $n = 5$ раз, а внутренняя энергия уменьшилась на 4 кДж. Определите массу азота.

Дано

$M = 28\cdot 10^{-3}$ кг/моль
$i = 5$
$T_1 = 400$ К
$V_2 = nV_1$
$n = 5$
$\Delta U = -4$ кДж $=$
$= -4\cdot 10^3$ Дж

m — ?

Решение

$\boxed{Q = 0}$ $\quad A = -\Delta U$.

$$A = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma - 1}\right],$$

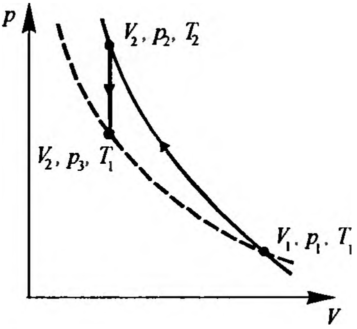
$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4, \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{n},$$

$$-\Delta U = \frac{m}{M}\frac{RT_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma - 1}\right],$$

$$m = -\frac{M(\gamma - 1)\,\Delta U}{RT_1\left[1 - \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\gamma - 1}\right]}.$$

Ответ $m = 28$ г.

2.68 Двухатомный идеальный газ занимает объем $V_1 = 1$ л и находится под давлением $p_1 = 0{,}1$ МПа. После адиабатного сжатия газ характеризуется объемом V_2' и давлением p_2. В результате последующего изохорного процесса газ охлаждается до первоначальной температуры, а его давление $p_3 = 0{,}2$ МПа. Определите: 1) объем V_2; 2) давление p_2. Начертите график этих процессов.

Дано	*Решение*
$V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3 $i = 5$ $p_1 = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па $p_3 = 0{,}2$ МПа $= 2 \cdot 10^5$ Па 1) V_2 — ? 2) p_2 — ?	

$$p_1V_1 = p_3V_2, \qquad V_2 = \frac{p_1V_1}{p_3}, \qquad p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma},$$

$$\gamma = \frac{i+2}{i} = 1{,}4, \qquad p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma}.$$

Ответ 1) $V_2 = 0{,}5$ л; 2) $p_2 = 264$ кПа.

Работа в случае адиабатного процесса

$$A = \frac{m}{M}C_V(T_1 - T_2)$$

или

$$A = \frac{RT_1}{\gamma - 1}\frac{m}{M}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right] = \frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right],$$

где T_1, T_2 и V_1, V_2 — соответственно начальные и конечные температура и объем газа.

2.69 Кислород, занимающий при давлении $p_1 = 1$ МПа объем $V_1 = 5$ л, расширяется в $n = 3$ раза. Определите конечное давление и работу, совершенную газом. Рассмотрите следующие процессы: 1) изобарный; 2) изотермический; 3) адиабатный.

Дано

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$i = 5$

$p_1 = 1$ МПа $= 10^6$ Па

$V_1 = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3

$V = nV_1$

$n = 3$

1) $p = \text{const}$

2) $T = \text{const}$

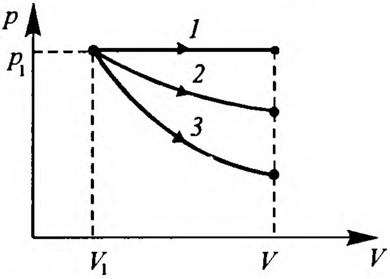
3) $Q = 0$

p — ?

A — ?

Решение

$Q = \Delta U + A,$



$A = p\,\Delta V,$

$\boxed{p = \text{const}}$

$\boxed{p = p_1}$

$A = p_1\,\Delta V = p_1(V - V_1) = p_1V_1(n-1),$

$\boxed{T = \text{const}}$ $\quad p_1V_1 = pV, \quad p = \dfrac{p_1V_1}{V},$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p_1V_1\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = p_1V_1\ln\frac{V}{V_1},$$

$\boxed{Q = 0}$ $\quad A = -\Delta U, \quad pV^{\gamma} = \text{const},$

$p = p_1\left(\dfrac{V_1}{V}\right)^{\gamma}, \quad \gamma = \dfrac{i+2}{i} = 1{,}4, \quad p = p_1 n^{-\gamma},$

$\Delta U = \dfrac{m}{M}C_V(T - T_1), \quad A = \dfrac{m}{M}\dfrac{i}{2}R(T_1 - T), \quad p_1V_1 = \dfrac{m}{M}RT_1,$

$pV = \dfrac{m}{M}RT, \quad A = \dfrac{i}{2}(p_1V_1 - pV).$

Ответ

1) $p = 1$ МПа, $A = 10$ кДж;

2) $p = 0{,}33$ МПа, $A = 5{,}5$ кДж;

3) $p = 0{,}21$ МПа, $A = 4{,}63$ кДж.

2.70

Кислород массой 10 г, находящийся при температуре 370 К, подвергли адиабатному расширению, в результате которого его давление уменьшилось в $n = 4$ раза. В результате последующего изотермического процесса газ сжимается до первоначального давления. Определите: 1) температуру газа в конце процесса; 2) количество теплоты, отданное газом; 3) приращение внутренней энергии газа; 4) работу, совершенную газом.

Дано

$m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг

$M = 32\cdot 10^{-3}$ кг/моль

$i = 5$

$T_1 = 370$ К

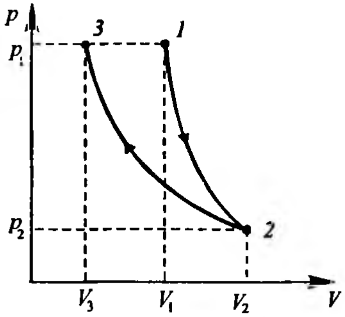
$\dfrac{p_1}{p_2} = n$

$n = 4$

1) T_2 — ? 2) Q — ?

3) ΔU — ? 4) A — ?

Решение



$$p_1V_1^{\gamma} = p_2V_2^{\gamma},$$

$$\frac{p_1V_1}{T_1} = \frac{p_2V_2}{T_2},$$

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1}\frac{V_2}{V_1}T_1,$$

$$T_2 = \frac{1}{n}\sqrt[\gamma]{n}\cdot T_1,$$

$$\boxed{Q = -Q_{13}} \qquad Q_{13} = Q_{12} + Q_{23},$$

$$\boxed{Q_{12} = 0} \qquad Q_{23} = A_{23} = \frac{m}{M}RT_2\ln\frac{p_2}{p_1},$$

$$Q = -Q_{23} = -\frac{m}{M}RT_2\ln\frac{1}{n}, \qquad \Delta U = \Delta U_{12} + \Delta U_{23}, \qquad \Delta U_{12} = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1),$$

$$\boxed{\Delta U_{23} = 0} \qquad \Delta U = \frac{m}{M}\frac{i}{2}R(T_2 - T_1), \qquad A = A_{12} + A_{23}, \qquad A_{12} = -\Delta U_{12} = -\Delta U_{13},$$

$$A = -\Delta U_{13} + Q_{23} = -\Delta U_{13} + Q_{13}.$$

Ответ 1) $T_2 = 249$ К; 2) $Q = 896$ Дж; 3) $\Delta U = -786$ Дж; 4) $A = -110$ Дж.

2.71

Идеальный двухатомный газ, занимающий объем $V_1 = 2$ л, подвергли адиабатному расширению. При этом его объем возрос в 5 раз. Затем газ подвергли изобарному сжатию до начального объема. В результате изохорного нагревания он был возвращен в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите термический КПД цикла.

Ответ $\eta = 34{,}1\%$.

2.72 Идеальный двухатомный газ ($\nu = 3$ моль), занимающий объем $V_1 = 5$ л и находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа, подвергли изохорному нагреванию до $T_2 = 500$ К. После этого газ подвергли изотермическому расширению до начального давления, а затем он в результате изобарного сжатия возвращен в первоначальное состояние. Постройте график цикла и определите термический КПД цикла.

Дано

$\nu = 3$ моль

$i = 5$

$V_1 = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3

$p_1 = 1$ МПа $= 10^6$ Па

$T_2 = 500$ К

η — ?

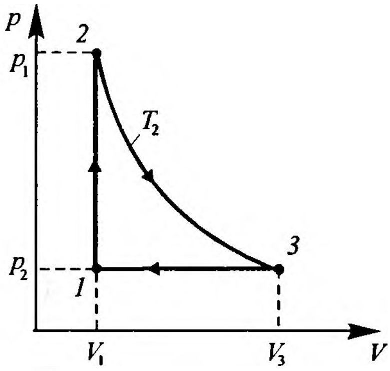
Решение

$\boxed{1 \to 2}$

$\boxed{V_1 = \text{const}}$

$\boxed{A_{12} = 0}$

$\boxed{Q_{12} = \Delta U_{12}}$



$$\Delta U_{12} = \nu\frac{i}{2}R(T_2 - T_1), \qquad p_1V_1 = \nu RT_1,$$

$$T_1 = \frac{p_1V_1}{\nu R}, \qquad Q_{12} = \nu\frac{i}{2}R\left(T_2 - \frac{p_1V_1}{\nu R}\right);$$

$\boxed{2 \to 3}$ $\boxed{T_2 = \text{const}}$ $\boxed{\Delta U_{23} = 0}$ $\boxed{Q_{23} = A_{23}}$

$$A_{23} = \nu RT_2 \ln\frac{V_3}{V_2}, \qquad V_2 = V_1, \qquad p_3 = p_1,$$

$$p_3V_3 = \nu RT_3, \qquad V_3 = \frac{\nu RT_3}{p_3} = \frac{\nu RT_2}{p_1}, \qquad Q_{23} = \nu RT_2 \ln\frac{V_3}{V_1};$$

$\boxed{3 \to 1}$ $\boxed{p_1 = \text{const}}$

$$Q_{31} = \nu\frac{i+2}{2}R(T_1 - T_2), \qquad \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

$$Q_1 = |Q_{12} + Q_{23}|, \qquad Q_2 = |Q_{31}|.$$

Ответ $\eta = 13{,}3\%$.

2.73 Рабочее тело — идеальный газ — теплового двигателя совершает цикл, состоящий из последовательных процессов: изобарного, адиабатного и изотермического. В результате изобарного процесса газ нагревается от $T_1 = 300$ К до $T_2 = 600$ К. Определите термический КПД теплового двигателя.

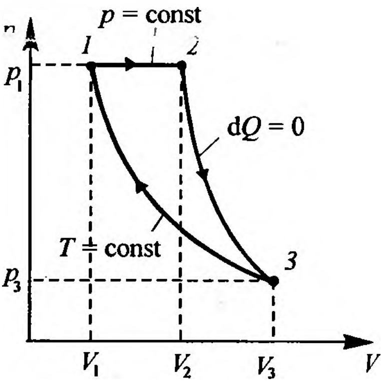
Дано

$T_1 = 300$ К

$T_2 = 600$ К

η — ?

Решение



$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}},$$

$\boxed{p = \text{const}}$ $\qquad \dfrac{V_2}{V_1} = \dfrac{T_2}{T_1}$,

$\boxed{dQ = 0}$ $\qquad T_2 V_2^{\gamma-1} = T_3 V_3^{\gamma-1}$,

$\gamma = \dfrac{i+2}{i}$, $\qquad \boxed{T_1 = T_3}$ $\qquad Q_{12} = \nu C_p R(T_2 - T_1) = \nu \dfrac{i+2}{2} R(T_2 - T_1)$,

$$Q_{31} = \nu R T_1 \ln\frac{V_3}{V_1} = \nu R T_1 \ln\frac{V_3 T_2}{V_2 T_1} = \nu R T_1 \ln\left[\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \cdot \frac{T_2}{T_1}\right] =$$

$$= \nu R T_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = \nu R T_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{i+2}{2}} = \nu R T_1 \frac{i+2}{2} \ln\frac{T_2}{T_1},$$

$$\eta = \frac{(T_2 - T_1) - T_1 \ln\dfrac{T_2}{T_1}}{T_2 - T_1}.$$

Ответ $\eta = 30{,}7\%$.

2.74 Азот массой 500 г, находящийся под давлением $p_1 = 1$ МПа при температуре $t_1 = 127$ °С, подвергли изотермическому расширению, в результате которого давление газа уменьшилось в $n = 3$ раза. После этого газ подвергли адиабатному сжатию до начального давления, а затем он был изобарно сжат до начального объема. Постройте график цикла и определите работу, совершенную газом за цикл.

Ответ $A = -11{,}5$ кДж.

2.75 Идеальный газ, совершающий цикл Карно, 70% количества теплоты, полученного от нагревателя, отдает холодильнику. Количество теплоты, получаемое от нагревателя, равно 5 кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) работу, совершенную при полном цикле.

Дано	*Решение*
$Q_2 = 0{,}7Q_1$ $Q_1 = 5$ кДж $= 5 \cdot 10^3$ Дж 1) η — ? 2) A — ?	$\eta = \dfrac{A}{Q_1} = \dfrac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$, $A = \eta Q_1$.

Ответ 1) $\eta = 30\%$; 2) $A = 1{,}5$ кДж.

2.76 Идеальный газ совершает цикл Карно. Газ получил от нагревателя количество теплоты 5,5 кДж и совершил работу 1,1 кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) отношение температур нагревателя и холодильника.

Ответ 1) $\eta = 20\%$; 2) $\dfrac{T_1}{T_2} = 1{,}25$.

2.77 Идеальный газ совершает цикл Карно, термический КПД которого равен 0,4. Определите работу изотермического сжатия газа, если работа изотермического расширения составляет 400 Дж.

Дано

$\eta = 0{,}4$

$A_{12} = 400$ Дж

A_{34} — ?

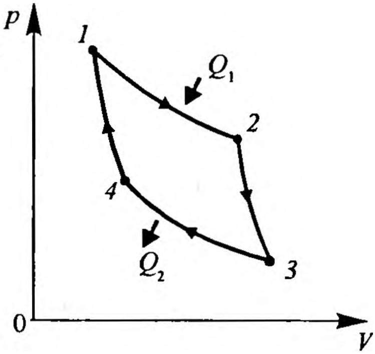
Решение

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1},$$

$$A = A_{12} + A_{34},$$

$$A_{12} + A_{34} = \eta A_{12},$$

$$A_{34} = (\eta - 1)A_{12}.$$



Ответ $A_{34} = -240$ Дж.

2.78 Идеальный газ совершает цикл Карно. Температура нагревателя $T_1 = 500$ К, холодильника $T_2 = 300$ К. Работа изотермического расширения газа составляет 2 кДж. Определите: 1) термический КПД цикла; 2) количество теплоты, отданное газом при изотермическом сжатии холодильнику.

Дано

$T_1 = 500$ К

$T_2 = 300$ К

$A_{12} = 2$ кДж $= 2 \cdot 10^3$ Дж

1) η — ?

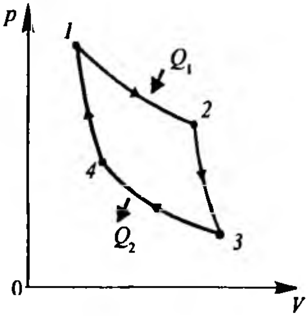
2) Q_2 — ?

Решение

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

$$\frac{Q_2}{Q_1} = \frac{T_2}{T_1}, \qquad \boxed{Q_1 = A_{12}}$$

$$Q_2 = Q_1 \frac{T_2}{T_1} = A_{12} \frac{T_2}{T_1}.$$



Ответ 1) $\eta = 40\%$; 2) $Q_2 = 1{,}2$ кДж.

2.79 Многоатомный идеальный газ совершает цикл Карно, при этом в процессе адиабатного расширения объем газа увеличивается в $n = 4$ раза. Определите термический КПД цикла.

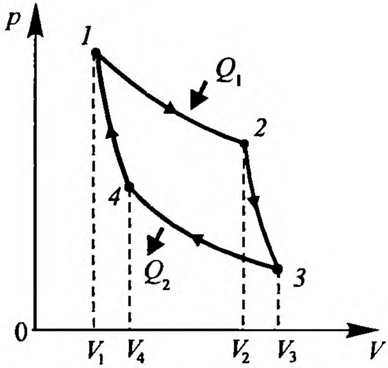
Дано

$V_3 = nV_2$

$n = 4$

η — ?

Решение



$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \qquad T_1 V_2^{\gamma-1} = T_2 V_3^{\gamma-1},$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1}, \qquad \gamma = \frac{i+2}{i}, \qquad \boxed{i = 6} \qquad \boxed{\gamma = 1{,}3\dot{3}}$$

$$\eta = 1 - \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma-1} = 1 - \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma-1}.$$

Ответ $\eta = 37\%$.

2.80 Во сколько раз необходимо увеличить объем ($\nu = 5$ моль) идеального газа при изотермическом расширении, если его энтропия увеличилась на $\Delta S = 57{,}6$ Дж/К?

Ответ $n = e^{\frac{\Delta S}{\nu R}} = 4$.

2.81 При нагревании двухатомного идеального газа ($\nu = 2$ моль) его термодинамическая температура увеличилась в $n = 2$ раза. Определите изменение энтропии, если нагревание происходит: 1) изохорно; 2) изобарно.

Дано

$i = 5$

$\nu = 2$ моль

$n = \dfrac{T_2}{T_1} = 2$

1) $V = \text{const}$

2) $p = \text{const}$

ΔS_1 — ?

ΔS_2 — ?

Решение

$\boxed{V = \text{const}}$ $\quad \mathrm{d}Q = \nu C_V\,\mathrm{d}T, \qquad C_V = \dfrac{i}{2}R,$

$$\Delta S_1 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_V \frac{\mathrm{d}T}{T} = \nu C_V \ln\frac{T_2}{T_1},$$

$$\Delta S_1 = \nu\frac{i}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu\frac{i}{2}R\ln n,$$

$\boxed{p = \text{const}}$ $\quad \mathrm{d}Q = \nu C_p\,\mathrm{d}T, \qquad C_p = \dfrac{i+2}{2}R,$

$$\Delta S_2 = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \nu C_p \frac{\mathrm{d}T}{T} = \nu C_p \ln\frac{T_2}{T_1},$$

$$\Delta S_2 = \nu\frac{i+2}{2}R\ln\frac{T_2}{T_1} = \nu\frac{i+2}{2}R\ln n.$$

Ответ 1) $\Delta S_1 = 28{,}8$ Дж/К; 2) $\Delta S_2 = 40{,}3$ Дж/К.

2.82 Идеальный газ ($\nu = 2$ моль) сначала изобарно нагрели, так что объем газа увеличился в $n_1 = 2$ раза, а затем изохорно охладили, так что давление его уменьшилось в $n = 2$ раза. Определите приращение энтропии в ходе указанных процессов.

Ответ $\Delta S = 11{,}5$ Дж/К.

2.83 Азот массой 28 г адиабатно расширили в $n = 2$ раза, а затем изобарно сжали до начального объема. Определите изменение энтропии газа в ходе указанных процессов.

Дано

$M = 28 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

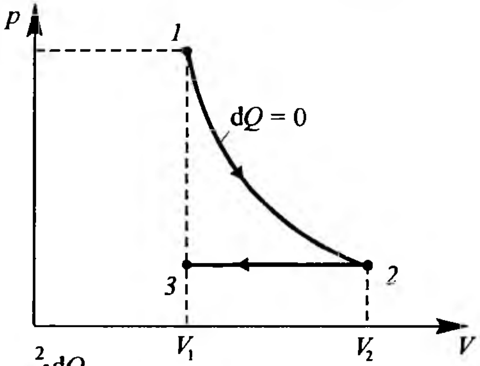
$m = 28$ г $= 28 \cdot 10^{-3}$ кг

$i = 5$

$n = \dfrac{V_2}{V_1} = 2$

ΔS — ?

Решение



$$\Delta S = \Delta S_{12} + \Delta S_{23}, \qquad \Delta S_{12} = \int_1^2 \frac{dQ_{12}}{T},$$

$$dQ_{12} = 0, \qquad \Delta S_{12} = 0,$$

$$\Delta S_{23} = \int_2^3 \frac{m}{M}\frac{C_p\,dT}{T} = \frac{m}{M}C_p\int_{T_2}^{T_3}\frac{dT}{T} = \frac{m}{M}C_p \ln\frac{T_3}{T_2},$$

$\boxed{p = \text{const}}$ $\quad \dfrac{T_3}{T_2} = \dfrac{V_3}{V_2} = \dfrac{V_1}{V_2} = \dfrac{1}{n},$

$$C_p = \frac{i+2}{2}R, \qquad \Delta S = \Delta S_{23} = \frac{m}{M}\frac{i+2}{2}R\ln\frac{1}{n}.$$

Ответ $\Delta S = -20{,}2$ Дж/К.

• •

Изменение энтропии при равновесном переходе из состояния 1 в состояние 2

$$\Delta S_{1\to 2} = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_1^2 \frac{dU + dA}{T}.$$

2.3. Реальные газы, жидкости и твердые тела

2.84 Кислород ($\nu = 10$ моль) находится в сосуде объемом $V = 5$ л. Определите: 1) внутреннее давление газа; 2) собственный объем молекул. Поправки a и b принять равными соответственно 0,136 Н · м^4/моль^2 и $3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Дано

$\nu = 10$ моль

$V = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м^3

$a = 0{,}136$ Н · м^4/моль^2

$b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль

1) p' — ?

2) V' — ?

Решение

$$p' = \frac{\nu^2 a}{V^2}, \qquad \nu b = 4V',$$

$$V' = \frac{\nu b}{4}.$$

Ответ 1) $p' = 544$ кПа; 2) $V' = 79{,}3$ см^3.

2.85 Углекислый газ массой 6,6 кг при давлении 0,1 МПа занимает объем 3,75 м^3. Определите температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки a и b примите равными соответственно 0,361 Н · м^4/моль^2 и $4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль.

Дано

$M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m = 6{,}6$ кг

$p = 0{,}1$ МПа $= 10^5$ Па

$V = 3{,}75$ м^3

$a = 0{,}361$ Н · м^4/моль^2

$b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль

1) T_1 — ?

2) T_2 — ?

Решение

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT_1, \qquad \nu = \frac{m}{M},$$

$$T_1 = \frac{M\left(p + \frac{m^2 a}{M^2 V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M} b\right)}{mR}, \qquad pV = \frac{m}{M} RT_2,$$

$$T_2 = \frac{MpV}{mR}.$$

Ответ 1) $T_1 = 302$ К; 2) $T_2 = 301$ К.

2.86 Углекислый газ массой 2,2 кг находится при температуре 290 К в сосуде вместимостью 30 л. Определите давление газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки *a* и *b* примите равными соответственно 0,361 Н · м⁴/моль² и 4,28 · 10⁻⁵ м³/моль.

Ответ 1) $p_1 = 3{,}32$ МПа; 2) $p_2 = 4{,}02$ МПа.

2.87 Плотность азота $\rho = 140$ кг/м³, его давление $p = 10$ МПа. Определите температуру газа, если: 1) газ реальный; 2) газ идеальный. Поправки *a* и *b* примите равными соответственно 0,135 Н · м⁴/моль² и 3,86 · 10⁻⁵ м³/моль.

Ответ 1) $T_1 = 260$ К; 2) $T_2 = 241$ К.

2.88 Анализируя уравнение состояния реальных газов, определите величины поправок *a* и *b* для азота. Критические давление и температура азота соответственно равны 3,39 МПа и 126 К.

Дано	*Решение*
$T_к = 126$ К $p_к = 3{,}39$ МПа $= 3{,}39 \cdot 10^6$ Па	$\left(p + \dfrac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT$, $pV^3 - (\nu RT + p\nu b)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0$, V_1, V_2, V_3 — корни уравнения.
a — ? b — ?	

$\boxed{p = p_к,\ T = T_к,\ V_1 = V_2 = V_3 = V_к}$ $p_к(V - V_к)^3 = 0$,

$$p_кV^3 - 3p_кV_кV^2 + 3p_кV_к^2V - p_кV_к^3 = 0,$$

$$p_кV^3 - (\nu RT_к + p_к\nu b)V^2 + \nu^2 aV - \nu^3 ab = 0, \quad 3p_кV_к = \nu RT_к + p_к\nu b,$$

$$3p_кV_к^2 = \nu^2 a, \quad p_кV_к^3 = \nu^3 ab, \quad \frac{V_к}{3} = \nu b, \quad 3p_к \cdot (3\nu b)^2 = \nu^2 a, \quad a = 27p_кb^2,$$

$$3p_к \cdot 3\nu b = \nu RT_к + p_к\nu b, \quad 8p_к\nu b = \nu RT_к, \quad b = \frac{RT_к}{8p_к}, \quad a = \frac{27R^2T_к^2}{64p_к}.$$

Ответ $a = 0{,}136$ Н · м⁴/моль²; $b = 3{,}86 \cdot 10^{-5}$ м³/моль.

2.89 Кислород массой 100 г расширяется от объема 5 л до объема 10 л. Определите работу межмолекулярных сил притяжения при этом расширении. Поправку a примите равной 0,136 Н · м⁴/моль².

Дано

$M = 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$m = 100$ г $= 0{,}1$ кг
$V_1 = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м³
$V_2 = 10$ л $= 10^{-2}$ м³
$a = 0{,}136$ Н · м⁴/моль²

A — ?

Решение

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{\nu} - b\right) = RT, \quad \nu = \frac{m}{M}, \quad \mathrm{d}A = \frac{\nu^2 a}{V^2}\,\mathrm{d}V,$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} \frac{m^2}{M^2} a \frac{\mathrm{d}V}{V^2} = \frac{m^2}{M^2} a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Ответ $A = 133$ Дж.

2.90 Некоторый газ ($\nu = 0{,}25$ кмоль) занимает объем $V_1 = 1$ м³. При расширении газа до объема $V_2 = 1{,}2$ м³ была совершена работа против сил межмолекулярного притяжения, равная 1,42 кДж. Определите поправку a, входящую в уравнение Ван-дер-Ваальса.

Ответ $a = 0{,}136$ Н · м⁴/моль².

2.91 Азот ($\nu = 3$ моль) расширяется в вакуум, в результате чего объем газа увеличивается от $V_1 = 1$ л до $V_2 = 5$ л. Какое количество теплоты Q необходимо сообщить газу, чтобы его температура осталась неизменной? Поправку a примите равной 0,135 Н · м⁴/моль².

Дано

$\nu = 3$ моль
$V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м³
$V_2 = 5$ л $= 5 \cdot 10^{-3}$ м³
$a = 0{,}135$ Н · м⁴/моль²

Q — ?

Решение

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}A, \quad \boxed{\mathrm{d}U = 0} \quad \mathrm{d}A = p'\,\mathrm{d}V = \frac{\nu^2 a}{V^2}\,\mathrm{d}V,$$

$$Q = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu^2 a}{V^2}\,\mathrm{d}V = \nu^2 a \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Ответ $Q = 972$ Дж.

2.92 Углекислый газ массой 88 г занимает при температуре 290 К объем 1000 см^3. Определите внутреннюю энергию газа, если: 1) газ идеальный; 2) газ реальный. Поправку *a* примите равной 0,361 Н · м^4/моль^2.

Дано

$m = 88$ г $= 88 \cdot 10^{-3}$ кг

$M = 44 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$T = 290$ К

$V = 1000$ см^3 $= 10^{-3}$ м^3

$a = 0{,}361$ Н · м^4/моль^2

$i = 6$

1) U_1 — ?

2) U_2 — ?

Решение

$$U_1 = \frac{m}{M} C_V T, \qquad C_V = \frac{i}{2} R,$$

$$U_2 = \frac{m}{M}\left(C_V T - \frac{a}{V_m}\right), \qquad V_m = \frac{V}{\nu} = \frac{M}{m} V,$$

$$U_2 = U_1 - \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V}.$$

Ответ 1) $U_1 = 14{,}5$ кДж; 2) $U_2 = 13$ кДж.

2.93 Кислород ($\nu = 2$ моль) занимает объем $V_1 = 1$ л. Определите изменение температуры кислорода, если он адиабатно расширяется в вакуум до объема $V_2 = 10$ л. Поправку *a* примите равной 0,136 Н · м^4/моль^2.

Дано

$i = 5$

$\nu = 2$ моль

$V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3

$V_2 = 10$ л $= 10^{-2}$ м^3

$Q = 0$

$a = 0{,}136$ Н · м^4/моль^2

$T_2 - T_1$ — ?

Решение

$$Q = \Delta U + A, \quad \boxed{Q = 0, \ A = 0} \quad \Delta U = U_2 - U_1 = 0,$$

$$U_2 = U_1, \quad U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1}\right), \quad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2}\right),$$

$$C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1} = C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2}, \qquad T_2 - T_1 = -\frac{a\nu}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right),$$

$$T_2 - T_1 = -\frac{2a\nu}{iR}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Ответ $T_2 - T_1 = -11{,}8$ К.

2.94 Азот ($\nu = 2$ моль) адиабатно расширяется в вакуум. Температура газа при этом уменьшается на 1 К. Определите работу, совершаемую газом против межмолекулярных сил притяжения.

Дано

$\nu = 2$ моль

$i = 5$

$\Delta T = -1$ К

A_1 — ?

Решение

$Q = \Delta U + A$, $\boxed{Q = 0}$ $\boxed{A = 0}$

$\Delta U = U_2 - U_1 = 0$, $\boxed{U_1 = U_2}$

$$U_1 = \nu\left(C_V T_1 - \frac{a\nu}{V_1}\right), \qquad U_2 = \nu\left(C_V T_2 - \frac{a\nu}{V_2}\right),$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = -\frac{a\nu}{C_V}\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right), \quad \frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} = -\frac{C_V\,\Delta T}{\nu a}, \quad \mathrm{d}A = p'\,\mathrm{d}V, \quad p' = \frac{\nu^2 a}{V^2},$$

$$A_1 = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu^2 a}{V^2}\,\mathrm{d}V = \nu^2 a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right) = -\nu\,\Delta T C_V = -\frac{\nu i}{2} R\,\Delta T.$$

Ответ

$A_1 = 83{,}1$ Дж.

2.95 Кислород ($\nu = 1$ моль) (реальный газ), занимавший при $T_1 = 400$ К объем $V_1 = 1$ л, расширяется изотермически до $V_2 = 2V_1$. Определите: 1) работу при расширении; 2) изменение внутренней энергии газа. Поправки a и b примите равными соответственно 0,136 Н · м^4/моль^2 и 3,17 · 10^{-5} м^3/моль.

Дано

$\nu = 1$ моль

$T = 400$ К $= \mathrm{const}$

$V_1 = 1$ л $= 10^{-3}$ м^3

$V_2 = 2V_1$

$a = 0{,}136$ Н · м^4/моль^2

$b = 3{,}17 \cdot 10^{-5}$ м^3/моль

1) A — ?

2) ΔU — ?

Решение

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V^2}\right)(V - \nu b) = \nu RT, \qquad p = \frac{\nu RT}{V - \nu b} - \frac{\nu^2 a}{V^2},$$

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \nu RT \ln\frac{V_2 - \nu b}{V_1 - \nu b} + \nu^2 a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right),$$

$$U_1 = \nu\left(C_V T - \frac{a\nu}{V_1}\right), \qquad U_2 = \nu\left(C_V T - \frac{a\nu}{V_2}\right),$$

$$\Delta U = U_2 - U_1 = a\nu^2\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right).$$

Ответ 1) $A = 2{,}29$ кДж; 2) $\Delta U = 68$ Дж.

2.96 Покажите, что эффект Джоуля — Томсона будет всегда отрицательным, если дросселируется газ, для которого силами притяжения молекул можно пренебречь.

Дано	*Решение*
$a = 0$ $(T_2 - T_1) > 0$ — ?	$U_1 + p_1V_1 = U_2 + p_2V_2$,

$$U_1 = \nu C_V T_1 - \frac{a\nu^2}{V_1}, \qquad U_2 = \nu C_V T_2 - \frac{a\nu^2}{V_2},$$

$$\boxed{a = 0} \quad U_1 = \nu C_V T_1, \qquad U_2 = \nu C_V T_2,$$

$$\left(p + \frac{\nu^2 a}{V_1^2}\right)(V_1 - \nu b) = \nu R T_1, \qquad \left(p + \frac{\nu^2 a}{V_2^2}\right)(V_2 - \nu b) = \nu R T_2 .$$

$$\boxed{a = 0} \quad p_1V_1 = \nu R T_1 + p_1 \nu b, \qquad p_2V_2 = \nu R T_2 + p_2 \nu b,$$

$$\nu C_V T_1 + \nu R T_1 + p_1 \nu b = \nu C_V T_2 + \nu R T_2 + p_2 \nu b,$$

$$\nu T_1 (C_V + R) + p_1 \nu b = \nu T_2 (C_{V_2} + R) + p_2 \nu b,$$

$$(T_2 - T_1)\nu(c_V + R) = \nu b(p_1 - p_2),$$

$$T_2 - T_1 = \frac{b(p_1 - p_2)}{C_V + R}, \qquad \boxed{p_1 >> p_2} \qquad (T_2 - T_1) > 0 .$$

Ответ $(T_2 - T_1) > 0$, эффект Джоуля — Томсона отрицательный.

2.97 Покажите, что эффект Джоуля — Томсона будет всегда положительным, если дросселируется газ, для которого можно пренебречь собственным объемом молекул.

Ответ

$$T_2 - T_1 = \frac{2a\left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right)}{C_V + R} < 0 \quad (V_2 >> V_1).$$

2.98 При определении силы поверхностного натяжения капельным методом число капель глицерина, вытекающего из капилляра, составляет $n = 50$. Общая масса глицерина $m = 1$ г, а диаметр шейки капли в момент отрыва $d = 1$ мм. Определите поверхностное натяжение σ глицерина.

Дано	*Решение*
$n = 50$ $m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг $d = 1$ мм $= 10^{-3}$ м σ — ?	$\sigma = \frac{F}{l}$, $\quad F = \frac{m}{n} g$, $\quad l = \pi d$, $\sigma = \frac{mg}{n\pi d}$.

Ответ $\sigma = 62{,}5$ мН/м.

2.99 Определите радиус R капли спирта, вытекающей из узкой вертикальной трубки радиусом $r = 1$ мм. Считайте, что в момент отрыва капля сферическая. Поверхностное натяжение спирта $\sigma = 22$ мН/м, а его плотность $\rho = 0{,}8$ г/см^3.

Ответ $R = 1{,}61$ мм.

2.100 Считая процесс образования мыльного пузыря изотермическим, определите работу A, которую надо совершить, чтобы увеличить его размер с $d_1 = 6$ мм до $d_2 = 60$ мм. Поверхностное натяжение мыльного раствора примите равным 40 мН/м.

Дано	*Решение*
$T = \text{const}$ $d_1 = 6$ мм $= 6 \cdot 10^{-3}$ м $d_2 = 60$ мм $= 6 \cdot 10^{-2}$ м $\sigma = 40$ мН/м $= 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м A — ?	$\sigma = \frac{\Delta E}{\Delta S}$, $\quad \Delta E = A$, $\quad \Delta S = 2S_2 - 2S_1$, $S_2 = \pi d_2^2$, $\quad S_1 = \pi d_1^2$, $\boxed{T = \text{const}}$ $\quad \sigma = \text{const}$, $A = \sigma \cdot 2\pi(d_2^2 - d_1^2)$.

Ответ $A = 896$ мкДж.

2.101 Две капли воды радиусом $r = 1$ мм каждая слились в одну большую каплю. Считая процесс изотермическим, определите уменьшение поверхностной энергии при этом слиянии, если поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м.

Дано

$r = 1$ мм $= 10^{-3}$ м

$\sigma = 73$ мН/м $=$
$= 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м

$T = \text{const}$

ΔE — ?

Решение

$\boxed{T = \text{const}}$ $\quad \sigma = \text{const}$,

$S_1 = 4\pi r^2, \qquad V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3,$

$2V_1 = \frac{8}{3}\pi r^3, \qquad V = \frac{4}{3}\pi R^3.$

$$V = 2V_1 = \frac{8}{3}\pi r^3, \qquad R = \sqrt[3]{2} \cdot r, \qquad S = 4\pi R^2 = 4\pi\sqrt[3]{4} \cdot r^2,$$

$$\Delta S = 2S_1 - S = 8\pi r^2 - 4\pi\sqrt[3]{4} \cdot r^2 = 4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4}),$$

$$\Delta E = \sigma\,\Delta S = \sigma \cdot 4\pi r^2(2 - \sqrt[3]{4}).$$

Ответ $\Delta E = 378$ нДж.

2.102 Давление воздуха внутри мыльного пузыря на $\Delta p = 200$ Па больше атмосферного. Определите диаметр d пузыря. Поверхностное натяжение мыльного раствора $\sigma = 40$ мН/м.

Дано

$\Delta p = 200$ Па

$\sigma = 40$ мН/м $= 4 \cdot 10^{-2}$ Н/м

d — ?

Решение

$$\Delta p = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r} = \frac{8\sigma}{d},$$

$$d = \frac{8\sigma}{\Delta p}.$$

Ответ $d = 1{,}6$ мм.

2.103 Воздушный пузырек диаметром $d = 0{,}02$ мм находится на глубине $h = 25$ см под поверхностью воды. Определите давление воздуха в этом пузырьке. Атмосферное давление примите нормальным. Поверхностное натяжение воды $\sigma = 73$ мН/м, а ее плотность $\rho = 1$ г/см³.

Дано	*Решение*
$d = 0{,}02$ мм $= 2 \cdot 10^{-5}$ м $h = 25$ см $= 0{,}25$ м $p_0 = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па $\sigma = 73$ мН/м $=$ $= 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м $\rho = 1$ г/см³ $= 10^3$ кг/м³ p — ?	$p = p_0 + p_1 + \Delta p, \qquad p_1 = \rho g h,$ $\Delta p = \dfrac{2\sigma}{r} = \dfrac{4\sigma}{d},$ $p = p_0 + \rho g h + \dfrac{4\sigma}{d}.$

Ответ $p = 118$ кПа.

2.104 Ртуть массой 3 г помещена между двумя параллельными стеклянными пластинками. Определите силу, которую необходимо приложить, чтобы расплющить каплю до толщины $d = 0{,}1$ мм. Ртуть стекло не смачивает. Плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см³, а ее поверхностное натяжение $\sigma = 0{,}5$ Н/м.

Ответ $F = 2{,}2$ Н.

2.105 Вертикальный стеклянный капилляр погружен в воду. Определите радиус кривизны мениска, если высота столба воды в трубке $h = 20$ мм. Плотность воды $\rho = 1$ г/см³, поверхностное натяжение $\sigma = 73$ мН/м.

Дано	*Решение*
$h = 20$ мм $= 2 \cdot 10^{-2}$ м $\rho = 1$ г/см³ $= 10^3$ кг/м³ $\sigma = 73$ мН/м $=$ $= 73 \cdot 10^{-3}$ Н/м R — ?	$h = \dfrac{2\sigma \cos\vartheta}{\rho g R}, \quad \boxed{\vartheta = 0} \quad \boxed{\cos\vartheta = 1} \quad R = \dfrac{2\sigma}{\rho g h}.$

Ответ $R = 744$ мкм.

2.106 Капилляр, внутренний радиус которого 0,5 мм, опущен в жидкость. Определите массу жидкости, поднявшейся в капилляре, если ее поверхностное натяжение равно 60 мН/м.

Дано	*Решение*
$r = 0{,}5$ мм $= 5\cdot10^{-4}$ м $\sigma = 60$ мН/м $= 6\cdot10^{-2}$ Н/м m —?	$P = F, \qquad P = mg,$ $F = \sigma l, \qquad l = 2\pi r,$ $m = \dfrac{2\pi r\sigma}{g}.$

Ответ $m = 1{,}92\cdot10^{-5}$ кг.

2.107 В стеклянном капилляре диаметром $d = 100$ мкм вода поднимается на высоту $h = 30$ см. Определите поверхностное натяжение σ воды, если ее плотность $\rho = 1$ г/см³.

Дано	*Решение*
$d = 100$ мкм $= 10^{-4}$ м $h = 30$ см $= 0{,}3$ м $\rho = 1$ г/см³ $= 10^3$ кг/м³ σ — ?	$h = \dfrac{2\sigma\cos\vartheta}{\rho g r}, \qquad \boxed{\vartheta = 0} \qquad \cos\vartheta = 1,$ $\sigma = \dfrac{\rho g r h}{2}, \qquad r = \dfrac{d}{2}, \qquad \sigma = \dfrac{\rho g h d}{4}.$

Ответ $\sigma = 73{,}6$ мН/м.

● ●

Поверхностное натяжение

$$\sigma = F/l \quad \text{или} \quad \sigma = \Delta E/\Delta S,$$

где F — сила поверхностного натяжения, действующая на контур l, ограничивающий поверхность жидкости; ΔE — поверхностная энергия, связанная с площадью ΔS поверхности плёнки.

2.108 Широкое колено U-образного манометра имеет диаметр $d_1 = 2$ мм, узкое — $d_2 = 1$ мм. Определите разность Δh уровней ртути в обоих коленах, если поверхностное натяжение ртути $\sigma = 0{,}5$ Н/м, плотность ртути $\rho = 13{,}6$ г/см³, а краевой угол $\vartheta = 138°$.

Дано	*Решение*
$d_1 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м $d_2 = 1$ мм $= 10^{-3}$ м $\sigma = 0{,}5$ Н/м $\rho = 13{,}6$ г/см³ $=$ $= 13{,}6 \cdot 10^3$ кг/м³ $\vartheta = 138°$ Δh — ?	$h_1 = \dfrac{2\sigma \cos\vartheta}{\rho g r_1}$, $h_2 = \dfrac{2\sigma \cos\vartheta}{\rho g r_2}$, $r_1 = \dfrac{d_1}{2}$, $r_2 = \dfrac{d_2}{2}$, $\Delta h = \lvert h_2 \rvert - \lvert h_1 \rvert$,

$$\Delta h = \left| \frac{4\sigma \cos\vartheta}{\rho g} \left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1} \right) \right|.$$

Ответ $\Delta h = 5{,}6$ мм.

2.109 Изобразите элементарную ячейку ионной кубической объемноцентрированной решетки хлористого цезия (CsCl) и определите соответствующее этой решетке координационное число.

Ответ Координационное число равно 8.

2.110 Изобразите элементарную ячейку ионной кубической решетки поваренной соли (NaCl) и определите соответствующее этой решетке координационное число.

Ответ Координационное число равно 6.

2.111 Определите наименьшее расстояние между центрами ионов натрия и хлора в кристаллах NaCl (две одинаковые гранецентрированные кубические решетки, вложенные одна в другую). Плотность поваренной соли $\rho = 2{,}2$ г/см³.

Дано	*Решение*
$\rho = 2{,}2$ г/см³ $=$ $= 2{,}2 \cdot 10^3$ кг/м³ $M = 58{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль a — ?	$V_m = 2N_A V_1$, $\quad V_m = \dfrac{M}{\rho}$, $V_1 = a^3$, $\quad a = \sqrt[3]{\dfrac{M}{2N_A\rho}}$.

Ответ $a = 0{,}28$ нм.

2.112 Используя закон Дюлонга и Пти, определите удельную теплоемкость: 1) натрия; 2) алюминия.

Дано	*Решение*
1) $M_{Na} = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль 2) $M_{Al} = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль 1) $c_{V\,Na}$ — ? 2) $c_{V\,Al}$ — ?	$c_V = \dfrac{C_V}{M}$, $\quad C_V = 3R$, $c_V = \dfrac{3R}{M}$.

Ответ 1) $c_{V\,Na} = 1{,}08$ кДж/(кг · К); 2) $c_{V\,Al} = 0{,}924$ кДж/(кг · К).

[illegible] Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определите, во сколько раз удельная теплоемкость железа больше удельной теплоемкости золота.

Ответ $n = 3{,}52$.

2.114 Для нагревания металлического шарика массой 10 г от 20 до 50 °С затратили количество теплоты, равное 62,8 Дж. Пользуясь законом Дюлонга и Пти, определите материал шарика.

Дано

$m = 10\ \text{г} = 10^{-2}$ кг

$t_1 = 20$ °С

$t_2 = 50$ °С

$Q = 62{,}8$ Дж

$R = 8{,}31$ Дж/(моль · К)

M — ?

Решение

$$C_V = 3R, \qquad c_V = \frac{C_V}{M},$$

$$Q = c_V m(t_2 - t_1), \qquad t_2 - t_1 = \Delta t,$$

$$Q = \frac{3R}{M} m\,\Delta t, \qquad M = \frac{3Rm(t_2 - t_1)}{Q}.$$

Ответ $M = 0{,}119$ кг/моль, олово.

2.115 Изменение энтропии при плавлении 1 моль льда составило 25 Дж/К. Определите, на сколько изменится температура плавления льда при увеличении внешнего давления на 1 МПа? Плотность льда $\rho_1 = 0{,}9$ г/см³, плотность воды $\rho_2 = 1$ г/см³.

Дано

$\nu = 1$ моль

$M = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\Delta S = 25$ Дж/К

$\Delta p = 1\ \text{МПа} = 10^6$ Па

$\rho_1 = 0{,}9\ \text{г/см}^3 =$

$= 9 \cdot 10^2\ \text{кг/м}^3$

$\rho_2 = 1\ \text{г/см}^3 = 10^3\ \text{кг/м}^3$

ΔT — ?

Решение

$$\frac{\Delta p}{\Delta T} = \frac{L}{T(V_2 - V_1)}, \qquad \Delta Q = L, \qquad \Delta S = \frac{\Delta Q}{T},$$

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1}, \qquad V_2 = \frac{m}{\rho_2}, \qquad m = \nu M,$$

$$\Delta T = \frac{T}{L}(V_2 - V_1)\,\Delta p = \frac{\Delta p}{\Delta S}\left(\frac{\nu M}{\rho_2} - \frac{\nu M}{\rho_1}\right),$$

$$\Delta T = \frac{\nu M\,\Delta p}{\Delta S}\left(\frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1}\right).$$

Ответ $\Delta T = -0{,}08$ К.

3. Электричество и магнетизм

3.1. Электростатика

3.1 Сила гравитационного притяжения двух водяных одинаково заряженных капель радиусами 0,1 мм уравновешивается кулоновской силой отталкивания. Определите заряд капель. Плотность воды равна 1 г/см³.

Ответ $Q = 0{,}36$ аКл.

3.2 Два заряженных шарика, подвешенных на нитях одинаковой длины, опускаются в керосин плотностью 0,8 г/см³. Какой должна быть плотность материала шариков, чтобы угол расхождения нитей в воздухе и в керосине был один и тот же? Диэлектрическая проницаемость керосина $\varepsilon = 2$.

Дано

$\rho_к = 0{,}8$ г/см³ $= 8 \cdot 10^2$ кг/м³

α

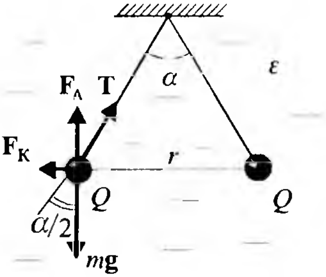
$\varepsilon = 2$

ρ — ?

Решение

$F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha/2$, $\quad F_к = (mg - F_A)\,\mathrm{tg}\,\alpha/2$,

$$F = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},$$



$$F_к = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2},$$

$F_A = \rho_к V g$,

$mg = \rho V g$,

$$\frac{F}{mg} = \frac{F_к}{mg - F_A}, \qquad \rho = \frac{\varepsilon\rho_к}{\varepsilon - 1}.$$

Ответ $\rho = 1{,}6$ г/см³.

3.3

В вершинах равностороннего треугольника находятся одинаковые положительные заряды $Q = 2$ нКл. Какой отрицательный заряд Q_1 необходимо поместить в центр треугольника, чтобы сила притяжения с его стороны уравновесила силы отталкивания положительных зарядов?

Дано

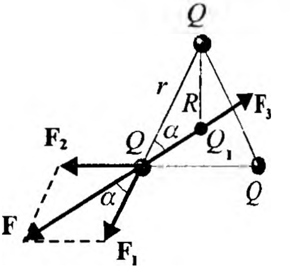
$Q = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл

Q_1 — ?

Решение

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 = 0,$$

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2},$$



$$F_3 = \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}, \qquad \alpha = 30°, \qquad \frac{r}{2R} = \cos\alpha.$$

$$F = 2F_1\cos\alpha = \frac{2Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\alpha, \qquad F_3 = \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{QQ_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot 4\cos^2\alpha, \qquad \mathbf{F} = -\mathbf{F}_3,$$

$$F = -F_3, \qquad Q_1 = \frac{Q}{2\cos\alpha}.$$

Ответ $Q_1 = 1{,}15$ нКл.

3.4

Свинцовый шарик ($\rho = 11{,}3$ г/см³) диаметром 0,5 см помещен в глицерин ($\rho = 1{,}26$ г/см³). Определите заряд шарика, если в однородном электростатическом поле шарик оказался взвешенным в глицерине. Электростатическое поле направлено вертикально вверх, и его напряженность $E = 4$ кВ/см.

Дано

$\rho = 11{,}3$ г/см³ $=$
$= 11{,}3 \cdot 10^3$ кг/м³
$d = 0{,}5$ см $= 5 \cdot 10^{-3}$ м
$\rho_1 = 1{,}26$ г/см³ $=$
$= 1{,}26 \cdot 10^3$ кг/м³
$E = 4$ кВ/см $= 4 \cdot 10^5$ В/м

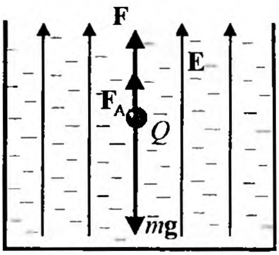
Q — ?

Решение

$$\mathbf{F} + \mathbf{F}_A = m\mathbf{g}, \quad F = QE, \quad F_A = \rho_1\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 g,$$

$$mg = \rho\frac{4}{3}\pi\left(\frac{d}{2}\right)^3 g,$$

$$Q = \frac{\pi g d^3(\rho - \rho_1)}{6E}.$$



Ответ $Q = 16{,}1$ нКл.

3.5 Два точечных заряда $Q_1 = 4$ нКл и $Q_2 = -2$ нКл находятся друг от друга на расстоянии 60 см. Определите напряженность E поля в точке, лежащей посередине между зарядами. Чему равна напряженность, если второй заряд положительный?

Дано

$Q_1 = 4$ нКл

$Q_2 = -2$ нКл

$l = 60$ см

$\mathbf{E}_1$ — ?

$\mathbf{E}_2$ — ?

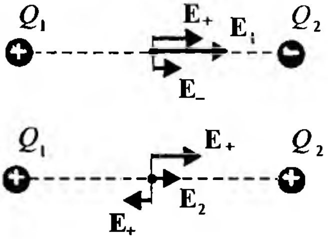
Решение

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_-,$$

$$E_1 = E_+ + E_-,$$

$$E_+ = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1|}{(l/2)^2},$$

$$E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_2|}{(l/2)^2},$$



$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{l^2}\left(|Q_1| + |Q_2|\right), \quad E_2 = E_+ - E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{l^2}\left(|Q_1| - |Q_2|\right).$$

Ответ $E_1 = 0{,}6$ кВ/м; $E_2 = 0{,}2$ кВ/м.

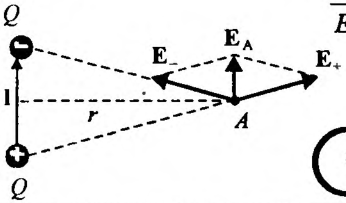
3.6 Определите напряженность поля, создаваемого диполем с электрическим моментом $p = 1$ нКл · м на расстоянии $r = 25$ см от центра диполя в направлении, перпендикулярном оси диполя.

Дано

$p = 1$ нКл · м $= 10^{-9}$ Кл · м

$r = 25$ см $= 0{,}25$ м

E_A — ?



Решение

$$E_+ = E_- = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{\left(r^2 + \dfrac{l^2}{4}\right)} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2},$$

$$\frac{E_A}{E_+} = \frac{l}{\sqrt{r^2 + \dfrac{l^2}{4}}} \approx \frac{l}{r}, \qquad E_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ql}{r^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{p}{r^3}.$$

Ответ $E_A = 576$ В/м.

[illegible] Определите напряженность электростатического поля в точке A, расположенной вдоль прямой, соединяющей заряды $Q_1 = 10$ нКл и $Q_2 = -8$ нКл и находящейся на расстоянии $r = 8$ см от отрицательного заряда. Расстояние между зарядами $l = 20$ см.

Дано

$Q_1 = 10$ нКл $= 10^{-8}$ Кл

$Q_2 = -8$ нКл $= -8 \cdot 10^{-9}$ Кл

$r = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м

$l = 20$ см $= 0{,}2$ м

E — ?

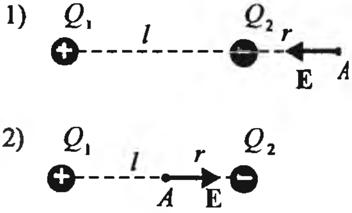
Решение

1) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$,

$E = E_2 - E_1$,

$$E_1 = \frac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 (l + r)^2},$$

$$E_2 = \frac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$



2) $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$, $E = E_1 + E_2$, $E_1 = \dfrac{|Q_1|}{4\pi\varepsilon_0 (l - r)^2}$, $E_2 = \dfrac{|Q_2|}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

Ответ 1) $E = 10{,}1$ кВ/м; 2) $E = 17{,}5$ кВ/м.

[illegible] На некотором расстоянии от бесконечной равномерно заряженной плоскости с поверхностной плотностью $\sigma = 0{,}1$ нКл/см² расположена круглая пластинка. Нормаль к плоскости пластинки составляет с линиями напряженности угол 30°. Определите поток Φ_E вектора напряженности через эту пластинку, если ее радиус r равен 15 см.

Дано

$\sigma = 0{,}1$ нКл/см²

$\beta = 30°$

$r = 0{,}15$ м

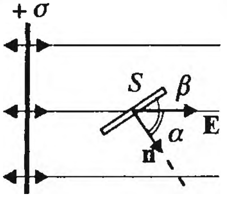
$\varepsilon = 1$

Φ_E — ?

Решение

$\Phi_E = ES\cos\alpha$, $E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$, $S = \pi r^2$,

$$\Phi_E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\pi r^2 \cos\alpha.$$



Ответ $\Phi_E = 3{,}46$ кВ · м.

3.9 Определите поток Φ_E вектора напряженности электростатического поля через сферическую поверхность, охватывающую точечные заряды $Q_1 = 5$ нКл и $Q_2 = -2$ нКл.

Ответ $\Phi_E = 339$ В · м.

3.10 Расстояние l между зарядами $Q = \pm 2$ нКл равно 20 см. Определите напряженность E поля, созданного этими зарядами в точке, находящейся на расстоянии $r_1 = 15$ см от первого и $r = 10$ см от второго заряда.

Ответ $E = 2{,}14$ кВ/м.

3.11 В вершинах квадрата со стороной 5 см находятся одинаковые положительные заряды $Q = 2$ нКл. Определите напряженность электростатического поля: 1) в центре квадрата; 2) в середине одной из сторон квадрата.

Дано

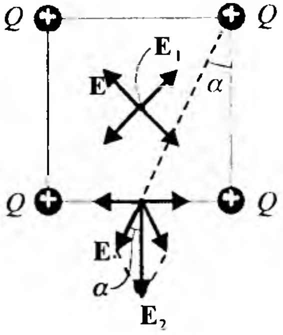
$a = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$Q = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл

1) E_1 — ?

2) E_2 — ?

Решение



1) $E_1 = 0$;

2) $E_2 = 2E\cos\alpha$,

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\left[a^2 + \frac{a^2}{4}\right]} = \frac{Q}{5\pi\varepsilon_0 a^2},$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \qquad E_2 = 2 \cdot \frac{Q}{5\pi\varepsilon_0 a^2} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{4Q}{5\sqrt{5}\pi\varepsilon_0 a^2}.$$

Ответ 1) $E_1 = 0$; 2) $E_2 = 10{,}3$ кВ/м.

3.12

Кольцо радиусом $r = 5$ см из тонкой проволоки равномерно заряжено с линейной плотностью $\tau = 14$ нКл/м. Определите напряженность поля на оси, проходящей через центр кольца, в точке, удаленной на расстоянии $a = 10$ см от центра кольца.

Дано

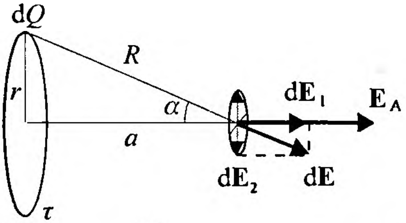
$r = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$\tau = 14$ нКл/м $=$
$= 1{,}4 \cdot 10^{-8}$ Кл/м

$a = 10$ см $= 0{,}1$ м

E_A — ?

Решение



$$Q = \int \mathrm{d}Q = \tau \cdot 2\pi r, \qquad \mathrm{d}E = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0(\sqrt{a^2 + r^2}\,)^2}, \qquad \mathrm{d}E_1 = \mathrm{d}E\cos\alpha,$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{R}, \qquad \mathrm{d}E_1 = \frac{a\,\mathrm{d}Q}{(a^2 + r^2)^{3/2}}, \qquad \mathrm{d}E_2 = \mathrm{d}E\sin\alpha, \qquad \sum \mathrm{d}E_2 = 0,$$

$$E_A = \sum \mathrm{d}E_1 = \int_0^Q \frac{a\,\mathrm{d}Q}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{2\pi r a \tau}{4\pi\varepsilon_0(a^2 + r^2)^{3/2}}.$$

Ответ $E_A = 2{,}83$ кВ/м.

3.13

Определите поверхностную плотность заряда, создающего вблизи поверхности Земли напряженность $E = 200$ В/м.

Дано

$E = 200$ В/м
$\varepsilon = 1$

σ — ?

Решение

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad \sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E.$$

Ответ $\sigma = 1{,}77$ нКл/м^2.

3.14 Под действием электростатического поля равномерно заряженной бесконечной плоскости точечный заряд $Q = 1$ нКл переместился вдоль силовой линии на расстояние $r = 1$ см; при этом совершена работа 5 мкДж. Определите поверхностную плотность заряда на плоскости.

Ответ $\sigma = 8{,}85$ мкКл/м².

3.15 Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно одноименными зарядами с поверхностной плотностью соответственно $\sigma_1 = 2$ нКл/м² и $\sigma_2 = 4$ нКл/м². Определите напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. Постройте график изменения напряженности вдоль линии, перпендикулярной плоскостям.

Ответ 1) 113 В/м; 2) 339 В/м.

● ●

Основные физические постоянные

Элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Масса покоя электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

Удельный заряд электрона $e/m_e = 1{,}76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

$$1/(4\pi\varepsilon_0) = 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$$

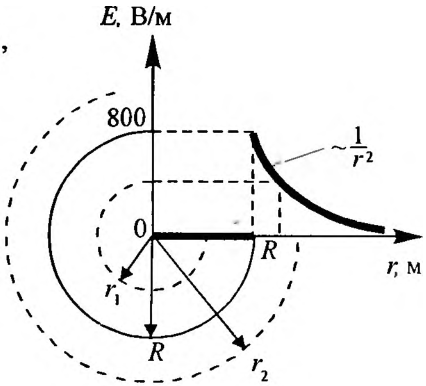
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

3.16 Электростатическое поле создается двумя бесконечными параллельными плоскостями, заряженными равномерно разноименными зарядами с поверхностной плотностью $\sigma_1 = 1$ нКл/м² и $\sigma_2 = 2$ нКл/м². Определите напряженность электростатического поля: 1) между плоскостями; 2) за пределами плоскостей. Постройте график изменения напряженности поля вдоль линии, перпендикулярной плоскостям.

Ответ 1) $E_1 = 169$ В/м; 2) $E_2 = 56{,}5$ В/м.

3.17 На металлической сфере радиусом 15 см находится заряд $Q = 2$ нКл. Определите напряженность E электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1 = 10$ см от центра сферы; 2) на поверхности сферы; 3) на расстоянии $r_2 = 20$ см от центра сферы. Постройте график зависимости $E(r)$.

Дано	***Решение***
$R = 15$ см $= 0{,}15$ м $Q = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл $r_1 = 10$ см $= 0{,}1$ м $r_2 = 20$ см $= 0{,}2$ м	$\oint\limits_S E_n\, ds = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$,
E_1, E_2, E_3 — ? $E(r)$ — ?	



$\boxed{r_1 < R}$ $Q = 0$, $E_1 = 0$,

$\boxed{r = R}$ $E_2 \cdot 4\pi R^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, $E_2 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$,

$\boxed{r_2 > R}$ $E_3 \cdot 4\pi r_2^2 = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$, $E_3 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2}$.

Ответ $E_1 = 0$, $E_2 = 800$ В/м, $E_3 = 450$ В/м.

3.18

Поле создано двумя равномерно заряженными концентрическими сферами радиусами $R_1 = 5$ см и $R_2 = 8$ см. Заряды сфер соответственно равны $Q_1 = 2$ нКл и $Q_2 = -1$ нКл. Определите напряженность электростатического поля в точках, лежащих от центра сфер на расстояниях: 1) $r_1 = 3$ см; 2) $r_2 = 6$ см; 3) $r_3 = 10$ см. Постройте график зависимости $E(r)$.

Дано

$R_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$R_2 = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м

$Q_1 = 2$ нКл $= 2 \cdot 10^{-9}$ Кл

$Q_2 = -1$ нКл $= -10^{-9}$ Кл

$r_1 = 3$ см $= 3 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 6$ см $= 6 \cdot 10^{-2}$ м

$r_3 = 10$ см $= 0{,}1$ м

E_1, E_2, E_3 — ?

$E(r)$ — ?

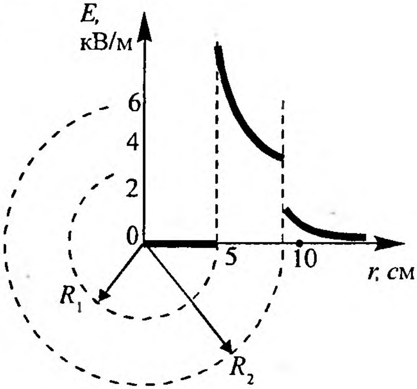
Решение

$$\oint_S E_n \, ds = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

$$E_1 = 0,$$

$$E_2 = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0 r_2^2},$$

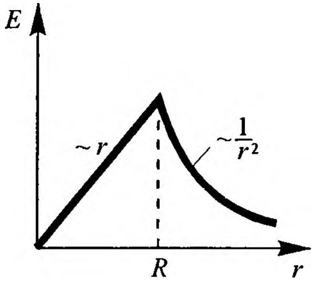
$$E_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}.$$



Ответ $E_1 = 0$, $E_2 = 5$ кВ/м, $E_3 = 0{,}9$ кВ/м.

3.19

Шар радиусом $R = 10$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определите напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1 = 5$ см от центра шара; 2) на расстоянии $r_2 = 15$ см от центра шара. Постройте зависимость $E(r)$.



Ответ $E_1 = 18{,}8$ В/м, $E_2 = 16{,}7$ В/м.

3.20 Фарфоровый шар радиусом $R = 10$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 15$ нКл/м³. Определите напряженность электростатического поля: 1) на расстоянии $r_1 = 5$ см от центра шара; 2) на поверхности шара; 3) на расстоянии $r_2 = 15$ см от центра шара. Постройте график зависимости $E(r)$. Диэлектрическая проницаемость фарфора $\varepsilon = 5$.

Дано

$R = 10$ см $= 0{,}1$ м

$\rho = 15$ нКл/м³ $=$

$= 1{,}5 \cdot 10^{-8}$ Кл/м³

$\varepsilon = 5$

$r_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 15$ см $= 0{,}15$ м

1) E_1 — ?

2) E_R — ?

3) E_2 — ?

4) $E(r)$ — ?

Решение

$$\oint\limits_S D_\text{n}\,\text{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \rho\,\text{d}V,$$

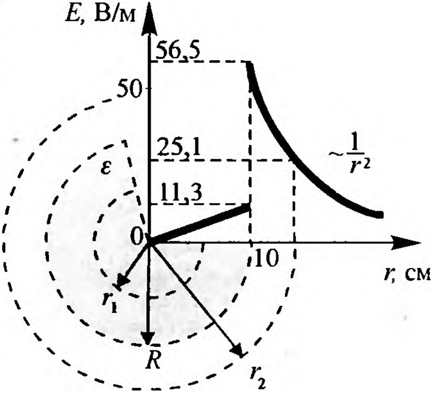
$\boxed{r_1 < R}$ $\quad D_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \rho\frac{4}{3}\pi r_1^3, \qquad D_1 = \frac{\rho r_1}{3},$

$$D_1 = \varepsilon_0\varepsilon E_1, \qquad E_1 = \frac{D_1}{\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon_0\varepsilon},$$

$\boxed{r = R}$ $\quad D_R \cdot 4\pi R^2 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3, \qquad D_R = \frac{\rho R}{3},$

$$D_R = \varepsilon_0\varepsilon E_R,$$

$$E_R = \frac{\rho R}{3\varepsilon\varepsilon_0},$$



$\boxed{r_2 > R}$ $\quad D_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \rho\frac{4}{3}\pi R^3,$

$$D_2 = \frac{\rho R^3}{3r_2^2}, \qquad D_2 = \varepsilon_0 E_2,$$

$$E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}.$$

Ответ 1) $E_1 = 5{,}65$ В/м;

2) $E_R = 11{,}3$ В/м (для $r \leqslant R$); $E_R = 56{,}5$ В/м (для $r \geqslant R$);

3) $E_2 = 25{,}1$ В/м; 4) см. рисунок.

3.21 Длинный прямой провод, расположенный в вакууме, несет заряд, равномерно распределенный по всей длине провода с линейной плотностью 2 нКл/м. Определите напряженность E электростатического поля на расстоянии $r = 1$ м от провода.

Ответ $E = \dfrac{\tau}{2\pi r\varepsilon_0} = 36$ В/м.

3.22 Внутренний цилиндрический проводник длинного прямолинейного коаксиального провода радиусом $R_1 = 1{,}5$ мм заряжен с линейной плотностью $\tau_1 = 0{,}20$ нКл/м. Внешний цилиндрический проводник этого провода радиусом $R_2 = 3$ мм заряжен с линейной плотностью $\tau_2 = -0{,}15$ нКл/м. Пространство между проводниками заполнено резиной ($\varepsilon = 3$). Определите напряженность электростатического поля в точках, лежащих от оси провода на расстояниях: 1) $r_1 = 1$ мм; 2) $r_2 = 2$ мм; 3) $r_3 = 5$ мм.

Дано

$R_1 = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$R_2 = 3$ мм $= 3 \cdot 10^{-3}$ м

$\tau_1 = 0{,}2$ нКл/м $=$
$= 2 \cdot 10^{-10}$ Кл/м

$\tau_2 = -0{,}15$ нКл/м $=$
$= -1{,}5 \cdot 10^{-10}$ Кл/м

$\varepsilon = 3$

$r_1 = 1$ мм $= 10^{-3}$ м

$r_2 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м

$r_3 = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м

1) E_1 — ?
2) E_2 — ?
3) E_3 — ?

Решение

$E_1 = 0$,

$$E_2 = \frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_2},$$

$$E_3 = \left.\frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r_3}\right|_{\varepsilon=1} = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\pi\varepsilon_0 r_3}.$$

Ответ 1) $E_1 = 0$;
2) $E_2 = 800$ В/м;
3) $E_3 = 180$ В/м.

3.23 Электростатическое поле создается положительно заряженной с постоянной поверхностной плотностью $\sigma = 10$ нКл/м² бесконечной плоскостью. Какую работу надо совершить для того, чтобы перенести электрон вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 2$ см до $r_2 = 1$ см?

Дано

$\sigma = 10$ нКл/м² $= 10^{-8}$ Кл/м²

$r_1 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 1$ см $= 10^{-2}$ м

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

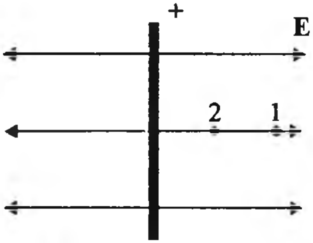
A — ?

Решение

$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}r$,

$F = -eE$,

$E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$,



$$A = \int_{r_1}^{r_2} F\,\mathrm{d}r = -\frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\mathrm{d}r = \frac{e\sigma}{2\varepsilon_0}(r_1 - r_2).$$

Ответ $A = 9 \cdot 10^{-19}$ Дж.

3.24 Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью с постоянной линейной плотностью $\tau = 1$ нКл/см. Какую скорость приобретет электрон, приблизившись под действием внешних сил вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 1{,}5$ см до $r_2 = 1$ см?

Дано

$\tau = 1$ нКл/см $= 10^{-7}$ Кл/м

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$r_1 = 1{,}5$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 1$ см $= 10^{-2}$ м

v — ?

Решение

$A = T = \dfrac{mv^2}{2}$, $\quad v = \sqrt{\dfrac{2A}{m}}$, $\quad E = \dfrac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$,

$F = -eE = -\dfrac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}$, $\quad \mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}r$,

$$A = \int_{r_1}^{r_2} F\,\mathrm{d}r = -\frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{e\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2},$$

$$v = \sqrt{\frac{e\tau}{\pi\varepsilon_0 m}\ln\frac{r_1}{r_2}}.$$

Ответ $v = 16$ Мм/с.

3.25 Одинаковые заряды $Q = 100$ нКл расположены в вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см. Определите потенциальную энергию этой системы.

Дано

$Q = 100$ нКл $= 10^{-7}$ Кл

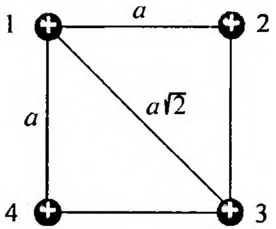
$a = 10$ см $= 0{,}1$ м

U — ?

Решение

$U = U_{12} + U_{13} + U_{14} + U_{23} + U_{24} + U_{34}$,

$$U_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a},$$



$U_{14} = U_{23} = U_{34} = U_{12}$,
$$U_{13} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a\sqrt{2}},$$

$U_{24} = U_{13}$,
$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4Q^2}{a} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Q^2}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{a}(4+\sqrt{2}).$$

Ответ $U = 4{,}87$ мДж.

3.26 В боровской модели атома водорода электрон движется по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ пм, в центре которой находится протон. Определите: 1) скорость электрона на орбите; 2) потенциальную энергию электрона в поле ядра, выразив ее в электрон-вольтах.

Дано

$r = 52{,}8$ пм $= 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

v — ?

U — ?

Решение

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2},$$

$$v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mr}}, \qquad U = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r}.$$

Ответ $v = 2{,}19$ Мм/с, $U = -27{,}3$ эВ.

3.27 Кольцо радиусом $r = 5$ см из тонкой проволоки несет равномерно распределенный заряд $Q = 10$ нКл. Определите потенциал φ электростатического поля: 1) в центре кольца; 2) на оси, проходящей через центр кольца, в точке, удаленной на расстояние $a = 10$ см от центра кольца.

Дано

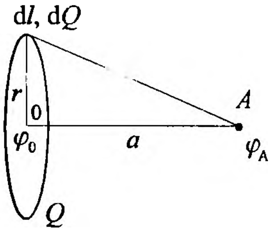
$r = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м
$Q = 10$ нКл $= 10^{-8}$ Кл
$a = 10$ см $= 0{,}1$ м

φ_0 — ?
φ_A — ?

Решение

$$d\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dQ}{r},$$

$$\varphi_0 = \int_0^Q \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$



$$\varphi_A = \int_0^Q \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + a^2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2 + a^2}}.$$

Ответ $\varphi_0 = 1800$ В, $\varphi_A = 805$ В.

3.28 На кольце с внутренним радиусом 80 см и внешним — 1 м равномерно распределен заряд 10 нКл. Определите потенциал в центре кольца.

Ответ $\varphi = 100$ В.

3.29 Металлический шар радиусом 5 см несет заряд $Q = 10$ нКл. Определите потенциал φ электростатического поля: 1) на поверхности шара; 2) на расстоянии $a = 2$ см от его поверхности. Постройте график зависимости $\varphi(r)$.

Ответ 1) $\varphi_1 = 1{,}8$ кВ; 2) $\varphi_2 = 1{,}29$ кВ.

3.30

Полый шар несет на себе равномерно распределенный заряд. Определите радиус шара, если потенциал в центре шара равен $\varphi_1 = 200$ В, а в точке, лежащей от его центра на расстоянии $r = 50$ см, $\varphi_2 = 40$ В.

Дано

$\varphi_1 = 200$ В

$\varphi_2 = 40$ В

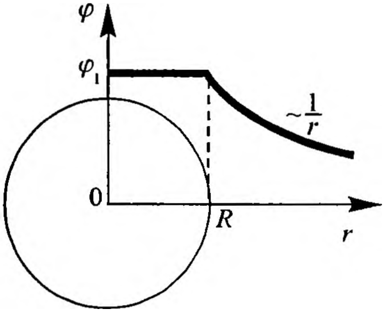
$r = 50$ см $= 0{,}5$ м

R — ?

Решение

$$\varphi_1 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

$$\varphi_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$



$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{r}{R}, \qquad R = \frac{\varphi_2}{\varphi_1}\cdot r.$$

Ответ $R = 10$ см.

3.31

Электростатическое поле создается положительным точечным зарядом. Определите числовое значение и направление градиента потенциала этого поля, если на расстоянии $r = 10$ см от заряда потенциал равен $\varphi = 100$ В.

Дано

$r = 10$ см $= 0{,}1$ м

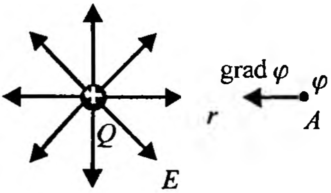
$\varphi = 100$ В

$\operatorname{grad}\varphi$ — ?

Решение

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi,$$

$$|\operatorname{grad}\varphi| = E,$$



$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}, \qquad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad E = \frac{\varphi}{r}, \qquad |\operatorname{grad}\varphi| = \frac{\varphi}{r}.$$

Ответ $\operatorname{grad}\varphi = 1$ кВ/м, направлен к заряду.

3.32 Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, заряженной равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = 5$ нКл/м². Определите числовое значение и направление градиента потенциала этого поля.

Дано

$\sigma = 5$ нКл/м² $=$
$= 5 \cdot 10^{-9}$ Кл/м²

$\operatorname{grad}\varphi$ — ?

Решение

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \qquad E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}, \qquad |\operatorname{grad}\varphi| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Ответ $\operatorname{grad}\varphi = 282$ В/м, направлен к плоскости.

3.33 Электростатическое поле создается бесконечной прямой нитью, заряженной равномерно с линейной плотностью $\tau = 50$ пКл/см. Определите числовое значение и направление градиента потенциала в точке на расстоянии $r = 0{,}5$ м от нити.

Ответ $\operatorname{grad}\varphi = 180$ В/м, направлен к нити.

3.34 Определите линейную плотность бесконечно длинной заряженной нити, если работа сил поля по перемещению заряда $Q = 1$ нКл с расстояния $r_1 = 5$ см до $r_2 = 2$ см в направлении, перпендикулярном нити, равна 50 мкДж.

Дано

$Q = 1$ нКл $= 10^{-9}$ Кл

$r_1 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м

$A = 50$ мкДж $= 5 \cdot 10^{-5}$ Дж

τ — ?

Решение

$$\mathrm{d}A = Q\,\mathrm{d}\varphi,$$

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0 r}, \qquad \mathrm{d}\varphi = -E\,\mathrm{d}r, \qquad A = -Q\int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r,$$

$$A = -Q\int_{r_1}^{r_2} \frac{\tau\,\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{Q\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_1}{r_2},$$

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0 A}{Q\ln\frac{r_1}{r_2}}.$$

Ответ $\tau = 3{,}03$ мкКл/м.

3.35 Электростатическое поле создается положительно заряженной бесконечной нитью. Протон, двигаясь от нити под действием поля вдоль линии напряженности с расстояния $r_1 = 1$ см до $r_2 = 5$ см, изменил свою скорость от 1 до 10 Мм/с. Определите линейную плотность заряда нити.

Ответ $\tau = 17{,}8$ мкКл/м.

3.36 Электростатическое поле создается бесконечной плоскостью, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м². Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $x_1 = 20$ см и $x_2 = 50$ см от плоскости.

Дано	*Решение*
$\sigma = 1$ нКл/м² $= 10^{-9}$ Кл/м² $x_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м $x_2 = 50$ см $= 0{,}5$ м $\varphi_1 - \varphi_2$ — ?	$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E\,\mathrm{d}x\,, \qquad E = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,,$ $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{x_1}^{x_2} E\,\mathrm{d}x = \int_{x_1}^{x_2} \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\,\mathrm{d}x = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}(x_2 - x_1)\,.$

Ответ $\varphi_1 - \varphi_2 = 16{,}9$ В.

3.37 Определите поверхностную плотность зарядов на пластинах плоского слюдяного ($\varepsilon = 7$) конденсатора, заряженного до разности потенциалов $U = 200$ В, если расстояние между его пластинами равно $d = 0{,}5$ мм.

Дано	*Решение*
$\varepsilon = 7$ $U = 200$ В $d = 0{,}5$ мм $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м σ — ?	$D = \varepsilon_0 \varepsilon E\,, \qquad D = \sigma\,, \qquad E = \dfrac{U}{d}\,, \qquad \sigma = \dfrac{\varepsilon_0 \varepsilon U}{d}\,.$ **Ответ** $\sigma = 24{,}8$ мкКл/м².

3.38 Электростатическое поле создается равномерно заряженной сферической поверхностью радиусом $R = 10$ см с общим зарядом $Q = 15$ нКл. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 15$ см от поверхности сферы.

Ответ $\Delta\varphi = 360$ В.

3.39 Электростатическое поле создается сферой радиусом $R = 5$ см, равномерно заряженной с поверхностной плотностью $\sigma = 1$ нКл/м². Определите разность потенциалов между двумя точками поля, лежащими на расстояниях $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см от центра сферы.

Дано	Решение
$R = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $\sigma = 1$ нКл/м² $= 10^{-9}$ Кл/м² $r_1 = 10$ см $= 0{,}1$ м $r_2 = 15$ см $= 0{,}15$ м $\varphi_1 - \varphi_2$ — ?	$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E\,\mathrm{d}r$, $\quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$, $\quad Q = \sigma \cdot 4\pi R^2$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\sigma R^2\,\mathrm{d}r}{\varepsilon_0 r^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Big\|_{r_1}^{r_2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

Ответ $\varphi_1 - \varphi_2 = 0{,}94$ В.

3.40 Электростатическое поле создается равномерно заряженным шаром радиусом $R = 1$ м с общим зарядом $Q = 50$ нКл. Определите разность потенциалов для точек, лежащих от центра шара на расстояниях: 1) $r_1 = 1{,}5$ м и $r_2 = 2$ м; 2) $r_1' = 0{,}3$ м и $r_2' = 0{,}8$ м.

Ответ 1) $\Delta\varphi_1 = 75$ В; 2) $\Delta\varphi_2 = 124$ В.

3.41 Электростатическое поле создается шаром радиусом $R = 8$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 10$ см и $r_2 = 15$ см от центра шара.

Ответ $\Delta\varphi = 0{,}64$ В.

3.42 Электростатическое поле создается шаром радиусом $R = 10$ см, равномерно заряженным с объемной плотностью $\rho = 20$ нКл/м³. Определите разность потенциалов между точками, лежащими внутри шара на расстояниях $r_1 = 2$ см и $r_2 = 8$ см от его центра.

Дано

$R = 10$ см $= 0{,}1$ м

$\rho = 20$ нКл/м³ $=$

$= 2 \cdot 10^{-8}$ Кл/м³

$r_1 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м

$\varphi_1 - \varphi_2$ — ?

Решение

$$\oint_S E_n \, dS = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

$$r < R, \qquad E_n = E,$$

$$E \cdot 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3,$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E \, dr,$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} dr = \frac{\rho(r_2^2 - r_1^2)}{3\varepsilon_0 \cdot 2} = \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(r_2^2 - r_1^2).$$

Ответ $\varphi_1 - \varphi_2 = 2{,}26$ В.

3.43 Электростатическое поле создается бесконечным цилиндром радиусом 8 мм, равномерно заряженным с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Определите разность потенциалов между двумя точками этого поля, лежащими на расстоянии $r_1 = 2$ мм и $r_2 = 7$ мм от поверхности этого цилиндра.

Дано

$R = 8$ мм $= 8 \cdot 10^{-3}$ м

$\tau = 10$ нКл/м $= 10^{-8}$ Кл/м

$r_1 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м

$r_2 = 7$ мм $= 7 \cdot 10^{-3}$ м

$\varphi_1 - \varphi_2$ — ?

Решение

$$E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\tau}{r},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int\limits_{R+r_1}^{R+r_2} E\,\mathrm{d}r = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{R+r_1}^{R+r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+r_2}{R+r_1},$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R+r_2}{R+r_1}.$$

Ответ $\varphi_1 - \varphi_2 = 73$ В.

3.44 В однородное электростатическое поле напряженностью $E_0 = 700$ В/м перпендикулярно полю помещается бесконечная плоскопараллельная стеклянная пластина ($\varepsilon = 7$). Определите: 1) напряженность электростатического поля внутри пластины; 2) электрическое смещение внутри пластины; 3) поляризованность стекла; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

Дано

$E_0 = 700$ В/м

$\varepsilon = 7$

E — ?

D — ?

P — ?

σ' — ?

Решение

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}, \qquad D = \varepsilon\varepsilon_0 E,$$

$$D = \varepsilon_0 E + P, \qquad P = D - \varepsilon_0 E,$$

$$\sigma' = P.$$

Ответ

1) $E = 100$ В/м; 2) $D = 6{,}19$ нКл/м^2;

3) $P = 5{,}31$ нКл/м^2; 4) $\sigma' = 5{,}31$ нКл/м^2.

3.45 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). Расстояние между пластинами $d = 8{,}85$ мм. Какую разность потенциалов необходимо подать на пластины, чтобы поверхностная плотность связанных зарядов на парафине составляла 0,1 нКл/см²?

Ответ $\Delta\varphi = 1$ кВ.

3.46 Расстояние между пластинами плоского конденсатора составляет $d = 5$ мм. После зарядки конденсатора до разности потенциалов $U = 500$ В между пластинами конденсатора вдвинули стеклянную пластинку ($\varepsilon = 7$). Определите: 1) диэлектрическую восприимчивость стекла; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на стеклянной пластинке.

Дано	***Решение***
$d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м $U = 500$ В $\varepsilon = 7$	$\varkappa = \varepsilon - 1, \qquad E_0 = \dfrac{U}{d},$
1) $\varkappa$ — ? 2) σ' — ?	$E = \dfrac{E_0}{\varepsilon} = \dfrac{U}{\varepsilon d},$

$$\sigma' = P = \varkappa\,\varepsilon_0 E = \frac{\varkappa\varepsilon_0 U}{\varepsilon d}.$$

Ответ 1) $\varkappa = 6$; 2) $\sigma' = 759$ нКл/м².

3.47 Определите поверхностную плотность связанных зарядов на слюдяной пластинке ($\varepsilon = 7$) толщиной $d = 1$ мм, служащей изолятором плоского конденсатора, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 300$ В.

Ответ $\sigma' = 15{,}9$ мкКл/м².

3.48 Между пластинами плоского конденсатора помещено два слоя диэлектрика — слюдяная пластинка ($\varepsilon_1 = 7$) толщиной $d_1 = 1$ мм и парафин ($\varepsilon_2 = 2$) толщиной $d_2 = 0{,}5$ мм. Определите: 1) напряженность электростатических полей в слоях диэлектрика; 2) электрическое смещение, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 500$ В.

Дано

$d_1 = 1$ мм $= 10^{-3}$ м

$\varepsilon_1 = 7$

$d_2 = 0{,}5$ мм $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$\varepsilon_2 = 2$

$U = 500$ В

1) E_1, E_2 — ?

2) D — ?

Решение

$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_2, \qquad \frac{E_1}{E_2} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1},$$

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \qquad E_1 = \frac{\varepsilon_2 U}{\varepsilon_2 d_1 + \varepsilon_1 d_2},$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_1 E_1}{\varepsilon_2}, \qquad D = \varepsilon_0 \varepsilon_1 E_1 .$$

Ответ 1) $E_1 = 182$ кВ/м, $E_2 = 637$ кВ/м; 2) $D = 11{,}3$ мкКл/м².

3.49 Расстояние между пластинами плоского конденсатора составляет $d = 1$ см, разность потенциалов $U = 200$ В. Определите поверхностную плотность σ' связанных зарядов эбонитовой пластинки ($\varepsilon = 3$), помещенной на нижнюю пластину конденсатора. Толщина пластины $d_2 = 8$ мм.

Дано

$d = 1$ см

$U = 200$ В

$d_2 = 8$ мм

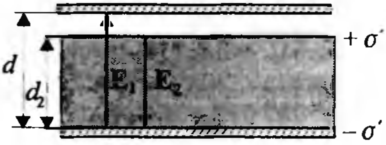
$\varepsilon = 3$

σ' — ?

Решение

$$d_1 = d - d_2,$$

$$\begin{cases} U = E_1 d_1 + E_2 d_2, \\ E_2 = E_1 / \varepsilon, \end{cases}$$



$$E_2 = \frac{U}{\varepsilon(d - d_2) + d_2},$$

$$\sigma' = P = \varkappa \varepsilon_0 E_2 = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 U}{\varepsilon(d - d_2) + d_2}.$$

Ответ $\sigma' = 253$ нКл/м².

3.50 Свободные заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho = 5$ нКл/м³ по шару радиусом $R = 10$ см из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon = 5$. Определите напряженность электростатического поля на расстояниях $r_1 = 5$ см и $r_2 = 15$ см от центра шара.

Дано

$\rho = 5$ нКл/м³

$R = 10$ см

$\varepsilon = 5$

$r_1 = 5$ см

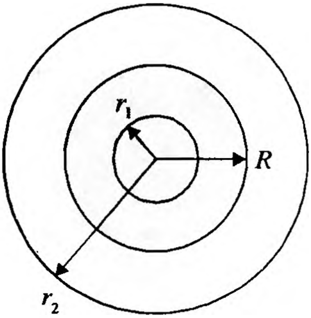
$r_2 = 15$ см

E_1 — ?

E_2 — ?

Решение

$$\oint\limits_S D_n\,\mathrm{d}S = \int\limits_V \rho\,\mathrm{d}V,$$



$\boxed{r_1 < R}$

$$D_1 \cdot 4\pi r_1^2 = \frac{4}{3}\pi r_1^3 \rho,$$

$$D_1 = \frac{\rho r_1}{3},$$

$$D_1 = \varepsilon_0 \varepsilon E_1, \qquad E_1 = \frac{\rho r_1}{3\varepsilon\varepsilon_0},$$

$\boxed{r_2 > R}$ $D_2 \cdot 4\pi r_2^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$, $\qquad D_2 = \frac{\rho R^3}{3 r_2^2}$,

$D_2 = \varepsilon_0 E_2$, $\qquad E_2 = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r_2^2}$.

Ответ $E_1 = 1{,}88$ В/м; $\quad E_2 = 8{,}37$ В/м.

3.51 Расстояние между пластинами плоского конденсатора $d = 5$ мм, разность потенциалов $U = 1{,}2$ кВ. Определите: 1) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 2) поверхностную плотность связанных зарядов на диэлектрике, если известно, что диэлектрическая восприимчивость диэлектрика, заполняющего пространство между пластинами, $\varkappa = 1$.

Ответ 1) $\sigma = 4{,}24$ мкКл/м²; $\quad$ 2) $\sigma' = 2{,}12$ мкКл/м².

3.52 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon = 7$). Расстояние между пластинами $d = 5$ мм, разность потенциалов $U = 1$ кВ. Определите: 1) напряженность поля в стекле; 2) поверхностную плотность заряда на пластинах конденсатора; 3) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле.

Дано	*Решение*
$\varepsilon = 7$ $d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м $U = 1$ кВ $= 10^3$ В 1) E — ? 2) σ — ? 3) σ' — ?	$U = Ed, \qquad E = \frac{U}{d},$ $E = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}, \qquad \sigma = \varepsilon\varepsilon_0 E,$ $\sigma' = P = D - \varepsilon_0 E = \varepsilon\varepsilon_0 E - \varepsilon_0 E = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E.$

Ответ 1) $E = 200$ кВ/м; 2) $\sigma = 12{,}4$ мкКл/м^2; 3) $\sigma' = 10{,}6$ мкКл/м^2.

3.53 Определите расстояние между пластинами плоского конденсатора, если между ними приложена разность потенциалов $U = 150$ В, причем площадь каждой пластины $S = 100$ см^2, ее заряд $Q = 10$ нКл. Диэлектриком служит слюда ($\varepsilon = 7$).

Дано	*Решение*
$U = 150$ В $S = 100$ см$^2 = 10^{-2}$ м^2 $Q = 10$ нКл $= 10^{-8}$ Кл $\varepsilon = 7$ d — ?	$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \qquad C = \frac{Q}{U},$ $\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} = \frac{Q}{U}, \qquad d = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{Q}.$

Ответ $d = 9{,}29$ мм.

3.54 К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь пластин $S = 200$ см², расстояние между ними $d = 1{,}5$ мм. После отключения конденсатора от источника напряжения в пространство между пластинами внесли парафин ($\varepsilon = 2$). Определите разность потенциалов U_2 между пластинами после внесения диэлектрика. Определите также емкости конденсатора C_1 и C_2 до и после внесения диэлектрика.

Дано

$U_1 = 500$ В

$S = 200$ см² $= 2 \cdot 10^{-2}$ м²

$d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$\varepsilon = 2$

U_2 — ?

C_1 — ?

C_2 — ?

Решение

$$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}, \quad \sigma = \frac{Q}{S} = \text{const}, \quad E_1 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0},$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad U_1 = E_1 d, \quad U_2 = E_2 d, \quad U_2 = \frac{U_1}{\varepsilon},$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \quad C_2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d} = \varepsilon C_1.$$

Ответ $U_2 = 250$ В, $C_1 = 118$ пФ, $C_2 = 236$ пФ.

3.55 Решите предыдущую задачу для случая, когда парафин вносится в пространство между пластинами при включенном источнике питания.

Дано

$U_1 = 500$ В

$S = 200$ см² $= 2 \cdot 10^{-2}$ м²

$d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$\varepsilon = 2$

U_2 — ?

C_1 — ?

C_2 — ?

Решение

$$U_1 = U_2 = U = \text{const},$$

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}.$$

Ответ $U_2 = 500$ В. $C_1 = 118$ пФ, $C_2 = 236$ пФ.

3.56 Определите емкость коаксиального кабеля длиной 10 м, если радиус его центральной жилы $r_1 = 1$ см, радиус оболочки $r_2 = 1,5$ см, а изоляционным материалом служит резина ($\varepsilon = 2,5$).

Дано

$l = 10$ м

$r_1 = 1$ см $= 10^{-2}$ м

$r_2 = 1,5$ см $= 1,5 \cdot 10^{-2}$ м

$\varepsilon = 2,5$

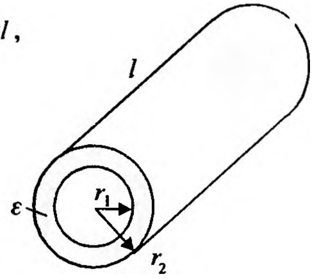
C — ?

Решение

$$C = \frac{Q}{U}, \qquad Q = \tau l,$$

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon\varepsilon_0} \ln\frac{r_2}{r_1},$$

$$C = \frac{2\pi\varepsilon\varepsilon_0 l}{\ln\frac{r_2}{r_1}}.$$



Ответ $C = 3,43$ нФ.

3.57 Определите напряженность электростатического поля на расстоянии $d = 1$ см от оси коаксиального кабеля, если радиус его центральной жилы $r_1 = 0,5$ см, а радиус оболочки $r_2 = 1,5$ см. Разность потенциалов между центральной жилой и оболочкой $U = 1$ кВ.

Дано

$d = 1$ см $= 10^{-2}$ м

$r_1 = 0,5$ см $= 0,5 \cdot 10^{-2}$ м

$r_2 = 1,5$ см $= 1,5 \cdot 10^{-2}$ м

$U = 1$ кВ $= 10^3$ В

E — ?

Решение

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon d}, \qquad \tau = \frac{Q}{l}, \qquad C = \frac{Q}{U} = \frac{\tau l}{U} = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon l}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

$$\tau = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon U}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}, \qquad E = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon U}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \cdot 2\pi\varepsilon_0\varepsilon d} = \frac{U}{d\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}.$$

Ответ $E = 91$ кВ/м.

3.58 Сферический конденсатор состоит из двух концентрических сфер радиусами $r_1 = 5$ см и $r_2 = 5{,}5$ см. Пространство между обкладками конденсатора заполнено маслом ($\varepsilon = 2{,}2$). Определите: 1) емкость этого конденсатора; 2) шар какого радиуса, помещенный в масло, обладает такой же емкостью.

Ответ 1) $C = 135$ пФ; 2) $r = 0{,}55$ м.

3.59 Определите напряженность электростатического поля на расстоянии $x = 2$ см от центра воздушного сферического конденсатора, образованного двумя шарами (внутренний радиус $r_1 = 1$ см, внешний — $r_2 = 3$ см), между которыми приложена разность потенциалов $U = 1$ кВ.

Дано

$x = 2\ \text{см} = 2 \cdot 10^{-2}$ м

$r_1 = 1\ \text{см} = 10^{-2}$ м

$r_2 = 3\ \text{см} = 3 \cdot 10^{-2}$ м

$U = 1\ \text{кВ} = 10^3$ В

E — ?

Решение

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{x^2}, \qquad Q = CU,$$

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1},$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}U\frac{1}{x^2} = \frac{U}{x^2}\cdot\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}.$$

Ответ $E = 37{,}5$ кВ/м.

3.60 Два плоских воздушных конденсатора одинаковой емкости соединены параллельно и заряжены до разности потенциалов $U = 300$ В. Определите разность потенциалов этой системы, если пространство между пластинами одного из конденсаторов заполнено слюдой ($\varepsilon = 7$).

Ответ $U_1 = 75$ В.

3.61 Разность потенциалов между точками A и B $U = 9$ В. Емкость конденсаторов соответственно равна $C_1 = 3$ мкФ и $C_2 = 6$ мкФ. Определите: 1) заряды Q_1 и Q_2; 2) разность потенциалов U_1 и U_2 на обкладках каждого конденсатора.

Дано

$U = 9$ В

$C_1 = 3$ мкФ $= 3 \cdot 10^{-6}$ Ф

$C_2 = 6$ мкФ $= 6 \cdot 10^{-6}$ Ф

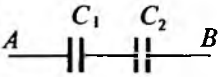
Q_1, Q_2 — ?

U_1, U_2 — ?

Решение

$U = U_1 + U_2$,

$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}$,



$C_1 = \dfrac{Q}{U_1}$, $\qquad C_2 = \dfrac{Q}{U_2}$,

$C_1 U_1 = C_2 U_2$, $\qquad U_2 = \dfrac{C_1}{C_2} U_1$,

$U = U_1 + \dfrac{C_1}{C_2} U_1$, $\qquad U_1 = \dfrac{UC_2}{C_1 + C_2}$, $\qquad U_2 = U - U_1$, $\qquad Q_1 = Q_2 = C_1 U_1$.

Ответ $U_1 = 6$ В, $U_2 = 3$ В, $Q_1 = Q_2 = 18$ мкКл.

3.62 Емкость батареи конденсаторов, образованной двумя последовательно соединенными конденсаторами, $C = 100$ пФ, а заряд $Q = 20$ нКл. Определите емкость второго конденсатора, а также разность потенциалов на обкладках каждого конденсатора, если $C_1 = 200$ пФ.

Дано

$C = 100$ пФ $= 10^{-10}$ Ф

$Q = 20$ нКл $= 2 \cdot 10^{-8}$ Кл

$C_1 = 200$ пФ $= 2 \cdot 10^{-10}$ Ф

C_2 — ?

U_1 — ?

U_2 — ?

Решение

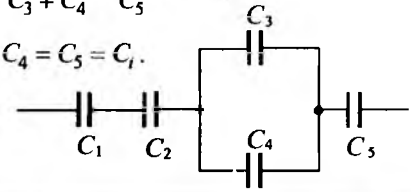
$Q_1 = Q_2 = Q = \text{const}$, $\qquad \dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$,

$C_2 = \dfrac{CC_1}{C_1 - C}$, $\qquad U_1 = \dfrac{Q}{C_1}$, $\qquad U_2 = \dfrac{Q}{C_2}$.

Ответ $C_2 = 200$ пФ, $U_1 = 100$ В, $U_2 = 100$ В.

3.63 Определите емкость C батареи конденсаторов, изображенной на рисунке. Емкость каждого конденсатора $C_i = 1$ мкФ.

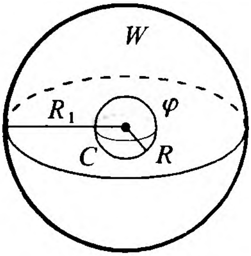
Дано	Решение
$C_i = 1$ мкФ	$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} + \frac{1}{C_5}$,
C — ?	$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_i$.



Ответ $C = 0{,}286$ мкФ.

3.64 Уединенная металлическая сфера электроемкостью $C = 4$ пФ заряжена до потенциала $\varphi = 1$ кВ. Определите энергию поля, заключенную в сферическом слое между сферой и концентрической с ней сферической поверхностью, радиус которой в 4 раза больше радиуса уединенной сферы.

Дано	Решение
$C = 4$ пФ $= 4 \cdot 10^{-12}$ Ф $\varphi = 1$ кВ $= 10^3$ В $R_1 = 4R$	$C = 4\pi\varepsilon_0 R, \quad R = \frac{C}{4\pi\varepsilon_0}$, $E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad Q = C\varphi$,
W — ?	



$$w = \left.\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}\right|_{\varepsilon=1} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}, \qquad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r,$$

$$W = \int w\,\mathrm{d}V = \int \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}\,\mathrm{d}V = \int_R^{R_1} \frac{\varepsilon_0 C^2 \varphi^2 \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r}{(4\pi)^2 \varepsilon_0^2 r^4 \cdot 2} = \frac{C^2\varphi^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_R^{R_1} \frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{C^2\varphi^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_R^{R_1} =$$

$$= \frac{C^2\varphi^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R_1}\right) = \frac{C^2\varphi^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{4R}\right) = \frac{C^2\varphi^2}{8\pi\varepsilon_0}\,\frac{3 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{4C} = \frac{3C\varphi^2}{8}.$$

Ответ $W = 1{,}5$ мкДж.

3.65 Две концентрические проводящие сферы радиусами $R_1 = 20$ см и $R_2 = 50$ см заряжены соответственно одинаковыми зарядами $Q = 100$ нКл. Определите энергию электростатического поля, заключенного между этими сферами.

Дано

$R_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м

$R_2 = 50$ см $= 0{,}5$ м

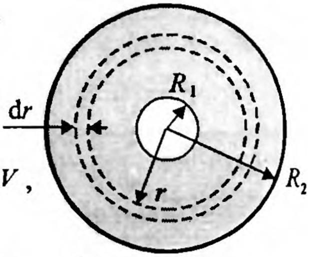
$Q = 100$ нКл $= 10^{-7}$ Кл

W — ?

Решение

$$w = \left.\frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}\right|_{\varepsilon=1} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2},$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \quad W = \int w\,\mathrm{d}V,$$



$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r, \qquad W = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\varepsilon_0 Q^2 \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r}{2\cdot(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Ответ $W = 135$ мкДж.

3.66 Сплошной эбонитовый шар ($\varepsilon = 3$) радиусом $R = 5$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определите энергию электростатического поля, заключенную внутри шара.

Дано

$\varepsilon = 3$

$R = 5$ см

$\rho = 10$ нКл/м³ $= 10^{-8}$ Кл/м³

W — ?

Решение

$$\mathrm{d}W = w\,\mathrm{d}V, \quad w = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}, \quad E = \frac{D}{\varepsilon\varepsilon_0}, \quad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r,$$

$$\oint_S D_n\,\mathrm{d}S = \int_V \rho\,\mathrm{d}V, \quad D\cdot 4\pi r^2 = \rho\frac{4}{3}\pi r^3, \quad D = \frac{\rho r}{3},$$

$$w = \frac{D^2}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\rho^2 r^2}{18\varepsilon_0\varepsilon}, \qquad W = \int w\,\mathrm{d}V = \int_0^R w\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{\rho^2\cdot 4\pi}{18\varepsilon_0\varepsilon}\int_0^R r^4\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{2\pi\rho^2}{9\varepsilon_0\varepsilon}\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R = \frac{2\pi\rho^2}{45\varepsilon_0\varepsilon}R^5.$$

Ответ $W = 0{,}164$ пДж.

3.67 Сплошной шар из диэлектрика радиусом $R = 5$ см заряжен равномерно с объемной плотностью $\rho = 10$ нКл/м³. Определите энергию электростатического поля, заключенную в окружающем шар пространстве.

Ответ $W = 2{,}46$ пДж.

3.68 Шар, погруженный в масло ($\varepsilon = 2{,}2$), имеет поверхностную плотность заряда $\sigma = 1$ мкКл/м² и потенциал $\varphi = 500$ В. Определите: 1) радиус шара; 2) заряд шара; 3) емкость шара; 4) энергию шара.

Дано

$\varepsilon = 2{,}2$

$\sigma = 1$ мкКл/м² $= 10^{-6}$ Кл/м²

$\varphi = 500$ В

1) R — ?   2) Q — ?

3) C — ?

4) W — ?

Решение

$$Q = \sigma S = \sigma \cdot 4\pi R^2, \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}\frac{Q}{R} = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0\varepsilon},$$

$$R = \frac{\varepsilon_0\varepsilon\varphi}{\sigma}, \qquad C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon R, \qquad W = \frac{Q\varphi}{2}.$$

Ответ 1) $R = 9{,}74$ мм; 2) $Q = 1{,}19$ нКл; 3) $C = 2{,}38$ пФ; 4) $W = 0{,}3$ мкДж.

3.69 В однородное электростатическое поле напряженностью $E_0 = 700$ В/м перпендикулярно полю поместили стеклянную пластинку ($\varepsilon = 7$) толщиной $d = 1{,}5$ мм и площадью 200 см². Определите: 1) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле; 2) энергию электростатического поля, сосредоточенную в пластине.

Дано

$E_0 = 700$ В/м

$\varepsilon = 7$

$d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$S = 200$ см² $= 2 \cdot 10^{-2}$ м²

σ' — ?

W — ?

Решение

$$E = \frac{E_0}{\varepsilon}, \quad D = \varepsilon_0\varepsilon E, \quad D = \varepsilon_0 E + P,$$

$$\sigma' = P = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1)E_0}{\varepsilon},$$

$$W = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}\cdot Sd = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2\varepsilon}\cdot Sd.$$

Ответ $\sigma' = 5{,}31$ нКл/м²; $W = 9{,}29$ пДж.

3.70 Плоский воздушный конденсатор емкостью $C = 10$ пФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 500$ В. После отключения конденсатора от источника напряжения расстояние между пластинами конденсатора было увеличено в 3 раза. Определите: 1) разность потенциалов на обкладках конденсатора после их раздвижения; 2) работу внешних сил по раздвижению пластин.

Ответ 1) $U_2 = 1{,}5$ кВ; 2) $A = 2{,}5$ мкДж.

3.71 К пластинам плоского воздушного конденсатора приложена разность потенциалов $U_1 = 500$ В. Площадь пластин $S = 200$ см², расстояние между ними $d_1 = 1{,}5$ мм. Пластины раздвинули до расстояния $d_2 = 15$ мм. Найдите энергию W_1 и W_2 конденсатора до и после раздвижения пластин, если источник напряжения перед раздвижением: 1) отключался; 2) не отключался.

Дано

$U_1 = 500$ В

$S = 200$ см² $= 2 \cdot 10^{-2}$ м²

$d_1 = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$d_2 = 15$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

1) $Q = \text{const}$

2) $U = \text{const}$

---

1) W_1, W_2 — ?

2) W_1, W_2 — ?

Решение

$$C_1 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1}, \qquad C_2 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_2},$$

1) $\boxed{Q = \text{const}}$ $\qquad C_1 U_1 = C_2 U_2,$

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_1},$$

$$W_2 = \frac{C_2 U_2^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S d_2^2 U_1^2}{2 d_2 d_1^2} = W_1 \frac{d_2}{d_1};$$

2) $\boxed{U = \text{const}}$ $\qquad Q_1 = C_1 U_1, \qquad Q_2 = C_2 U_1,$

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d_1}, \qquad W_2 = \frac{C_2 U_1^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2 d_1}{2 d_2 d_1} = W_1 \frac{d_1}{d_2}.$$

Ответ 1) $W_1 = 14{,}8$ мкДж, $W_2 = 148$ мкДж;
2) $W_1 = 14{,}8$ мкДж, $W_2 = 1{,}48$ мкДж.

3.72 Разность потенциалов между пластинами плоского конденсатора $U = 100$ В. Площадь каждой пластины $S = 200$ см², расстояние между пластинами $d = 0{,}5$ мм, пространство между ними заполнено парафином ($\varepsilon = 2$). Определите силу притяжения пластин друг к другу.

Дано

$U = 100$ В
$S = 200$ см² $= 2 \cdot 10^{-2}$ м²
$d = 0{,}5$ мм $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$\varepsilon = 2$

F — ?

Решение

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S}, \qquad Q = CU,$$

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \qquad F = \left(\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U}{d}\right)^2 \frac{1}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S U^2}{2d^2}.$$

Ответ $F = 7{,}08$ мН.

3.73 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено слюдой ($\varepsilon = 7$). Площадь пластин конденсатора составляет 50 см². Определите поверхностную плотность связанных зарядов на слюде, если пластины конденсатора притягивают друг друга с силой 1 мН.

Дано

$\varepsilon = 7$
$S = 50$ см² $= 5 \cdot 10^{-3}$ м²
$F = 1$ мН $= 10^{-3}$ Н

σ' — ?

Решение

$$Q = \sigma S, \qquad |F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0 \varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0 \varepsilon},$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\varepsilon_0 \varepsilon F}{S}}, \qquad E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \varepsilon} = \sqrt{\frac{2F}{\varepsilon_0 \varepsilon S}},$$

$$\sigma' = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E = (\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2F\varepsilon_0}{\varepsilon S}}.$$

Ответ $\sigma' = 4{,}27$ мкКл/м².

3.74 Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено стеклом ($\varepsilon = 7$). Когда конденсатор присоединили к источнику напряжения, давление пластин на стекло оказалось равным 1 Па. Определите: 1) поверхностную плотность зарядов на пластинах конденсатора; 2) электрическое смещение; 3) напряженность электростатического поля в стекле; 4) поверхностную плотность связанных зарядов на стекле; 5) объемную плотность энергии электростатического поля в стекле.

Дано	*Решение*
$\varepsilon = 7$ $p = 1$ Н/м^2	$|F| = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \dfrac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon}$, $\quad p = \dfrac{|F|}{S} = \dfrac{\sigma^2}{2\varepsilon_0\varepsilon}$,
1) σ — ? 2) D – ? 3) E – ? 4) σ' – ? 5) w — ?	1) $\sigma = \sqrt{2\varepsilon_0\varepsilon p}$, 2) $D = \sigma$, 3) $E = \dfrac{D}{\varepsilon_0\varepsilon}$, 4) $\sigma' = \varkappa\varepsilon_0 E = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)E$, 5) $w = \dfrac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}$.

Ответ

1) $\sigma = 11{,}1$ мкКл/м^2;
2) $D = 11{,}1$ мкКл/м^2;
3) $E = 179$ кВ/м;
4) $\sigma' = 9{,}5$ мкКл/м^2;
5) $w = 0{,}992$ Дж/м^3.

Сила притяжения между двумя разноименно заряженными обкладками конденсатора

$$|F| = \frac{Q^2}{2\varepsilon_0\varepsilon S} = \frac{\sigma^2 S}{2\varepsilon_0\varepsilon} = \frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2 S}{2}.$$

3.2. Постоянный электрический ток

3.75 Сила тока в проводнике равномерно нарастает от $I_0 = 0$ до $I = 2$ А в течение времени $\tau = 5$ с. Определите заряд, прошедший по проводнику.

Дано	Решение
$I_0 = 0$ $I = 2$ А $\tau = 5$ с	$\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$, $\qquad I = kt$, $k = \dfrac{I - I_0}{\tau} = \dfrac{I}{\tau}$, $\qquad \mathrm{d}Q = kt\,\mathrm{d}t$,
Q — ?	$Q = \displaystyle\int_0^\tau kt\,\mathrm{d}t = \dfrac{k\tau^2}{2} = \dfrac{I\tau}{2}$.

Ответ $Q = 5$ Кл.

3.76 Определите плотность тока, если за 2 с через проводник сечением 1,6 мм² прошло $2 \cdot 10^{19}$ электронов.

Дано	Решение
$t = 2$ с $S = 1{,}6$ мм² $= 1{,}6 \cdot 10^{-6}$ м² $N = 2 \cdot 10^{19}$	$j = \dfrac{I}{S}$, $\qquad I = \dfrac{Q}{t}$, $Q = Ne$, $\qquad j = \dfrac{Ne}{St}$.
j — ?	

Ответ $j = 1$ А/мм².

● ●

Плотность тока в проводнике

$$\mathbf{j} = ne\langle \mathbf{v} \rangle,$$

где $\langle \mathbf{v} \rangle$ — скорость упорядоченного движения зарядов в проводнике; n — концентрация зарядов.

3.77 По медному проводнику сечением 0,8 мм^2 течет ток 80 мА. Найдите среднюю скорость упорядоченного движения электронов вдоль проводника, предполагая, что на каждый атом меди приходится один свободный электрон. Плотность меди $\rho = 8{,}9$ г/см^3.

Дано

$S = 0{,}8$ мм^2 $= 0{,}8 \cdot 10^{-6}$ м^2
$I = 80$ мА $= 8 \cdot 10^{-2}$ А
$n = n'$
$\rho = 8{,}9$ г/см^3 $=$
$= 8{,}9 \cdot 10^3$ кг/м^3
$M = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл
$N_А = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$

$\langle v \rangle$ – ?

Решение

$$j = \frac{I}{S}, \qquad j = ne\langle v \rangle,$$

$$n = n' = \frac{N_А}{V_m} = \frac{N_А \rho}{M},$$

$$\frac{I}{S} = \frac{N_А \rho}{M} \cdot e\langle v \rangle,$$

$$\langle v \rangle = \frac{MI}{N_А \rho e S}.$$

Ответ $\langle v \rangle = 7{,}4$ мкм/с.

3.78 Определите суммарный импульс электронов в прямом проводе длиной $l = 500$ м, по которому течет ток $I = 20$ А.

Дано

$l = 500$ м
$I = 20$ А
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

p — ?

Решение

$$p = Nm\langle v \rangle, \qquad j = ne\langle v \rangle, \qquad n = \frac{N}{V},$$

$$j = \frac{I}{S}, \qquad V = Sl, \qquad \frac{I}{S} = \frac{N}{Sl} e\langle v \rangle,$$

$$\langle v \rangle = \frac{Il}{Ne}, \qquad p = Nm\langle v \rangle = \frac{mIl}{e}.$$

Ответ $p = 5{,}69 \cdot 10^{-8}$ кг · м/с.

3.79

Определите общее сопротивление между точками A и B цепи, представленной на рисунке, если $R_1 = 1$ Ом, $R_2 = 3$ Ом, $R_3 = R_4 = R_6 = 2$ Ом, $R_5 = 4$ Ом.

Дано

$R_1 = 1$ Ом

$R_2 = 3$ Ом

$R_3 = R_4 = R_6 = 2$ Ом

$R_5 = 4$ Ом

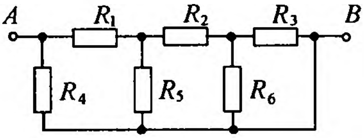
R — ?

Решение

Рисунок б) — эквивалентная схема.

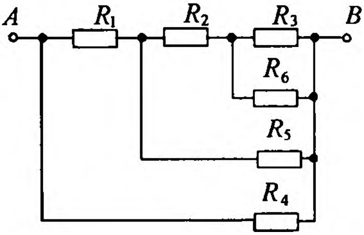
$$R_{36} = \frac{R_3 R_6}{R_3 + R_6}, \qquad R_{236} = R_2 + R_{36},$$

а)



$$R_{2365} = \frac{R_{236} R_5}{R_{236} + R_5}, \qquad R_{12365} = R_1 + R_{2365},$$

б)



$$R = \frac{R_{12365} R_4}{R_{12365} + R_4}.$$

Ответ $R = 1{,}2$ Ом.

3.80

Определите сопротивление проволочного каркаса, имеющего форму куба, если он включен в цепь между точками A и B. Сопротивление каждого ребра каркаса $r = 3$ Ом.

Дано

$r = 3$ Ом

R — ?

Решение

а)

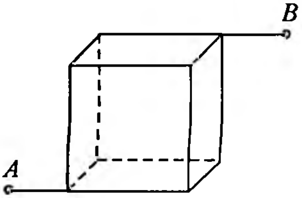
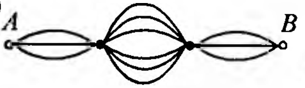


Рисунок б) — эквивалентная схема.

$$R = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5r}{6}.$$

б)



Ответ $R = 2{,}5$ Ом.

3.81 Вольтметр, включенный в сеть последовательно с сопротивлением R_1, показал напряжение $U_1 = 198$ В, а при включении последовательно с сопротивлением $R_2 = 2R_1$ показал $U_2 = 180$ В. Определите сопротивление R_1 и напряжение в сети, если сопротивление вольтметра $r = 900$ Ом.

Дано

$U_1 = 198$ В

$U_2 = 180$ В

$r = 900$ Ом

$R_2 = 2R_1$

R_1 — ?

U — ?

Решение

$$\boxed{U = \text{const}} \qquad I_1 = \frac{U}{R_1 + r}, \qquad I_2 = \frac{U}{R_2 + r},$$

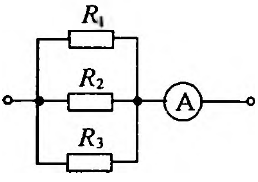
$$U_1 = I_1 r = \frac{Ur}{R_1 + r}, \qquad U_2 = I_2 r = \frac{Ur}{R_2 + r},$$

$$U_1(R_1 + r) = U_2(R_2 + r), \quad U_1(R_1 + r) = U_2(2R_1 + r),$$

$$R_1 = \frac{(U_1 - U_2)r}{2U_2 - U_1}, \qquad U = \frac{U_1(R_1 + r)}{r} = U_1\left(\frac{R_1}{r} + 1\right).$$

Ответ $R_1 = 100$ Ом, $U = 220$ В.

3.82 В цепи на рисунке амперметр показывает силу тока $I = 1{,}5$ А. Сила тока через сопротивление R_1 равна $I_1 = 0{,}5$ А. Сопротивление $R_2 = 2$ Ом, $R_3 = 6$ Ом. Определите сопротивление R_1, а также силу токов I_2 и I_3, протекающих через сопротивление R_2 и R_3.



Дано

$I = 1{,}5$ А

$I_1 = 0{,}5$ А

$R_2 = 2$ Ом

$R_3 = 6$ Ом

R_1 — ?

I_2 — ?

I_3 — ?

Решение

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad U = \text{const},$$

$$I_1 R_1 = (I_2 + I_3)\frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}, \qquad I_2 + I_3 = I - I_1,$$

$$R_1 = \frac{(I - I_1)R_2 R_3}{I_1(R_2 + R_3)}, \quad I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{I_1 R_1}{R_2}, \quad I_3 = \frac{I_1 R_1}{R_3}.$$

Ответ $R_1 = 3$ Ом, $I_2 = 0{,}75$ А, $I_3 = 0{,}25$ А.

3.83 Через лампу накаливания течет ток, равный 0,6 А. Температура вольфрамовой нити диаметром 0,1 мм равна 2200 °С. Ток подводится медным проводом сечением 6 мм². Определите напряженность электрического поля: 1) в вольфраме (удельное сопротивление при 0 °С $\rho_0 = 55$ нОм · м, температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 0{,}0045$ °С$^{-1}$); 2) в меди ($\rho = 17$ нОм · м).

Дано

$I = 0{,}6$ А

$d = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м

$t = 2200$ °С

$S = 6$ мм²

$\rho_0 = 55$ нОм · м $=$
$= 5{,}5 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

$\alpha = 0{,}0045$ °С$^{-1}$

$\rho = 17$ нОм · м $=$
$= 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

1) E_1 — ?   2) E_2 — ?

Решение

$$j = \gamma E = \frac{E}{\rho}.$$

1) $$j_1 = \gamma E_1 = \frac{E_1}{\rho_1}, \qquad \rho_1 = \rho_0(1+\alpha t),$$

$$j_1 = \frac{I}{S_1} = \frac{I}{\pi d^2/4}, \qquad E_1 = j_1\rho_1 = \frac{4I}{\pi d^2}\rho_0(1+\alpha t).$$

2) $$j_2 = \frac{E_2}{\rho}, \qquad j_2 = \frac{I}{S}, \qquad E_2 = \rho j_2 = \frac{I\rho}{S}.$$

Ответ 1) $E_1 = 45{,}8$ В/м; 2) $E_2 = 1{,}7$ мВ/м.

3.84 По алюминиевому проводу сечением $S = 0{,}2$ мм² течет ток $I = 0{,}2$ А. Определите силу, действующую на отдельные свободные электроны со стороны электрического поля. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм · м.

Дано

$S = 0{,}2$ мм² $= 0{,}2 \cdot 10^{-6}$ м²

$I = 0{,}2$ А

$\rho = 26$ нОм · м $=$
$= 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

F — ?

Решение

$$F = eE, \qquad j = \gamma E = \frac{E}{\rho}, \qquad j = \frac{I}{S},$$

$$\frac{I}{S} = \frac{E}{\rho}, \qquad E = \frac{I\rho}{S}, \qquad F = e\frac{I\rho}{S}.$$

Ответ $F = 4{,}16 \cdot 10^{-21}$ Н.

3.85 Электрическая плитка мощностью 1 кВт с нихромовой спиралью предназначена для включения в сеть с напряжением 220 В. Сколько метров проволоки диаметром 0,5 мм надо взять для изготовления спирали, если температура нити равна 900 °С? Удельное сопротивление нихрома при 0 °С $\rho_0 = 1$ мкОм · м, а температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$.

Дано

$P = 1$ кВт $= 10^3$ Вт

$U = 220$ В

$d = 0{,}5$ мм $= 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$t = 900$ °С

$\rho_0 = 1$ мкОм · м $=$

$= 10^{-6}$ Ом · м

$\alpha = 0{,}4 \cdot 10^{-3}$ К$^{-1}$

l — ?

Решение

$$P = \frac{U^2}{R}, \qquad R = \rho\frac{l}{S} = \rho_0(1 + \alpha t)\frac{l}{S},$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad l = \frac{U^2 S}{P\rho} = \frac{U^2 \pi d^2}{4P\rho_0(1 + \alpha t)}.$$

Ответ $l = 6{,}99$ м.

3.86 Два цилиндрических проводника одинаковой длины и одинакового сечения, один из меди, а другой из железа, соединены параллельно. Определить отношение мощностей токов для этих проводников. Удельные сопротивления меди и железа равны соответственно 17 и 98 нОм · м.

Дано

$l_1 = l_2 = l$

$S_1 = S_2 = S$

$\rho_1 = 17$ нОм · м $=$

$= 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

$\rho_2 = 98$ нОм · м $=$

$= 9{,}8 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

$\dfrac{P_1}{P_2}$ — ?

Решение

$$\boxed{U = \text{const}}$$

$$P_1 = \frac{U^2}{R_1}, \qquad R_1 = \rho_1\frac{l}{S},$$

$$P_1 = \frac{U^2 S}{\rho_1 l}, \qquad P_2 = \frac{U^2 S}{\rho_2 l}, \qquad \frac{P_1}{P_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

Ответ $\dfrac{P_1}{P_2} = 5{,}76$.

3.87 Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 120$ Ом равномерно возрастает от $I_0 = 0$ до $I_{\max} = 5$ А за время $\tau = 15$ с. Определите выделившееся за это время в проводнике количество теплоты.

Дано

$R = 120$ Ом
$I_0 = 0$
$I_{\max} = 5$ А
$\tau = 15$ с

Q — ?

Решение

$$dQ = I^2 R\,dt, \qquad I = kt, \qquad k = \frac{I_{\max} - I_0}{\tau},$$

$$Q = \int dQ = \int_0^{\tau} k^2 R t^2\,dt = \frac{1}{3} k^2 R \tau^3.$$

Ответ $Q = 15$ кДж.

3.88 Сила тока в проводнике сопротивлением $R = 100$ Ом равномерно убывает от $I_0 = 10$ А до $I = 0$ за время $\tau = 30$ с. Определите выделившееся за это время в проводнике количество теплоты.

Ответ $Q = 100$ кДж.

3.89 Определите напряженность электрического поля в алюминиевом проводнике объемом $V = 10$ см^3, если при прохождении по нему постоянного тока за время $t = 5$ мин выделилось количество теплоты $Q = 2{,}3$ кДж. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм · м.

Дано

$V = 10$ см^3 $= 10^{-5}$ м^3
$t = 5$ мин $= 300$ с
$Q = 2{,}3$ кДж $= 2{,}3 \cdot 10^3$ Дж
$\rho = 26$ нОм · м $=$
$= 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

E — ?

Решение

$$w = \frac{Q}{Vt}, \qquad w = \frac{E^2}{\rho}, \qquad E = \sqrt{w\rho} = \sqrt{\frac{Q\rho}{Vt}}.$$

Ответ $E = 0{,}141$ В/м.

3.90 Плотность электрического тока в медном проводе равна 10 А/см^2. Определите удельную тепловую мощность тока, если удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм · м.

Ответ $w = 170$ Дж/(м^3 · с).

3.91 Определите ток короткого замыкания источника ЭДС, если при внешнем сопротивлении $R_1 = 50$ Ом ток в цепи $I_1 = 0{,}2$ А, а при $R_2 = 110$ Ом — $I_2 = 0{,}1$ А.

Дано

$R_1 = 50$ Ом

$I_1 = 0{,}2$ А

$R_2 = 110$ Ом

$I_2 = 0{,}1$ А

$I_{кз}$ — ?

Решение

$$I_{кз} = \frac{\mathcal{E}}{r}, \qquad I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + r},$$

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_2 + r}, \qquad I_1(R_1 + r) = I_2(R_2 + r),$$

$$r = \frac{I_2R_2 - I_1R_1}{I_1 - I_2}, \qquad I_{кз}r = I_1(R_1 + r),$$

$$I_{кз} = I_1\left(\frac{R_1}{r} + 1\right) = I_1\left(\frac{R_1(I_1 - I_2)}{I_2R_2 - I_1R_1} + 1\right).$$

Ответ $I_{кз} = 1{,}2$ А.

3.92 В цепь, состоящую из батареи и резистора сопротивлением $R = 8$ Ом, включают вольтметр, сопротивление которого $R_V = 800$ Ом, один раз последовательно резистору, другой раз — параллельно. Определите внутреннее сопротивление батареи, если показания вольтметра в обоих случаях одинаковы.

Ответ $r = 0{,}08$ Ом.

3.93 На рисунке $R_1 = R_2 = R_3 = 100$ Ом. Вольтметр показывает $U_V = 200$ В, сопротивление вольтметра $R_V = 800$ Ом. Определите ЭДС батареи, пренебрегая ее сопротивлением.

Дано

$R_1 = R_2 = R_3 = 100$ Ом

$U_V = 200$ В

$R_V = 800$ Ом

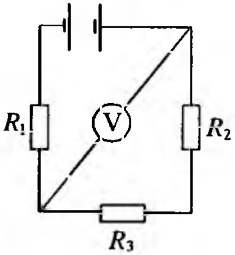
$\mathscr{E}$ — ?

Решение

$$I_V = \frac{U_V}{R_V}, \qquad I_2 = \frac{U_V}{R_2 + R_3},$$

$$I_1 = I_V + I_2,$$

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + \dfrac{R_V(R_2 + R_3)}{R_V + R_2 + R_3}},$$



$$\mathscr{E} = \left(\frac{U_V}{R_V} + \frac{U_V}{R_2 + R_3}\right)\left(R_1 + \frac{R_V(R_2 + R_3)}{R_V + R_2 + R_3}\right).$$

Ответ $\mathscr{E} = 325$ В.

3.94 На рисунке сопротивление потенциометра $R = 2000$ Ом, внутреннее сопротивление вольтметра $R_V = 5000$ Ом, $U_0 = 220$ В. Определите показание вольтметра, если подвижный контакт находится посередине потенциометра.

Дано

$R = 2000$ Ом

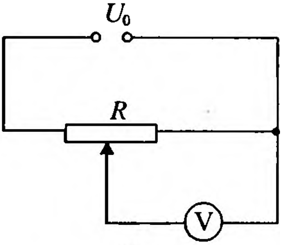
$R_V = 5000$ Ом

$U_0 = 220$ В

$l_1 = l_2 = l/2$

U_V — ?

Решение



$$R_1 = R_2 = \frac{R}{2},$$

$$\frac{R/2}{R_V} = \frac{I_V}{I_0 - I_V},$$

$$I_V = \frac{R/2 \cdot I_0}{R/2 + R_V}, \qquad I_0 = \frac{U_0}{R/2 + \dfrac{R/2 \cdot R_V}{R/2 + R_V}},$$

$$U_V = I_V R_V = \frac{R/2 \cdot U_0 \cdot R_V}{\left(R/2 + \dfrac{R/2 \cdot R_V}{R/2 + R_V}\right)(R/2 + R_V)} = \frac{R_V U_0}{R/2 + 2R_V}.$$

Ответ $U_V = 100$ В.

3.95 Определите ЭДС $\mathscr{E}$ и внутреннее сопротивление r источника тока, если во внешней цепи при силе тока 4 А развивается мощность 10 Вт, а при силе тока 2 А мощность 8 Вт.

Дано

$I_1 = 4$ А

$P_1 = 10$ Вт

$I_2 = 2$ А

$P_2 = 8$ Вт

$\mathscr{E}$ — ?

r — ?

Решение

$P = \mathscr{E} I$, $\qquad \mathscr{E} = I(R + r)$,

$P_1 = \mathscr{E} I_1 - I_1^2 r$, $\qquad r = \dfrac{\mathscr{E} I_1 - P_1}{I_1^2}$, $\qquad P_2 = \mathscr{E} I_2 - I_2^2 r$,

$P_2 = \mathscr{E} I_2 - \dfrac{I_2^2}{I_1^2}(\mathscr{E} I_1 - P_1)$, $\qquad P_2 = \mathscr{E} I_2 - \mathscr{E}\dfrac{I_2^2}{I_1} + P_1\dfrac{I_2^2}{I_1^2}$,

$\mathscr{E} = \left(P_2 - P_1\dfrac{I_2^2}{I_1^2}\right) \Big/ \left(I_2 - \dfrac{I_2^2}{I_1}\right)$, $\qquad r = \dfrac{\mathscr{E}}{I_1} - \dfrac{P_1}{I_1^2}$.

Ответ $\mathscr{E} = 5{,}5$ В; $\quad r = 0{,}75$ Ом.

3.96 Даны четыре элемента с ЭДС $\mathscr{E} = 1{,}5$ В и внутренним сопротивлением $r = 0{,}2$ Ом. Как нужно соединить эти элементы, чтобы получить от собранной батареи наибольшую силу тока во внешней цепи, имеющей сопротивление $R = 0{,}2$ Ом? Определите максимальную силу тока.

Дано

$k = 4$

$\mathscr{E} = 1{,}5$ В

$r = 0{,}2$ Ом

$R = 0{,}2$ Ом

$I_{\max}$ — ?

Решение

$P = n\mathscr{E} I - I^2\dfrac{n}{m}r$ [n и m — соответственно число последовательно и параллельно соединенных элементов], $I = I_{\max}$, $\dfrac{\partial P}{\partial I} = 0$, $\dfrac{\partial P}{\partial I} = n\mathscr{E} - 2I\dfrac{n}{m}r = 0$,

$I = \dfrac{n\mathscr{E}}{R + \dfrac{n}{m}r}$, $\qquad n\mathscr{E} = I\left(R + \dfrac{n}{m}r\right)$,

$IR + I\dfrac{n}{m}r - 2I\dfrac{n}{m}r = 0$,

$\left.\begin{aligned} mR &= nr \\ m + n &= k \end{aligned}\right\}$ $n = 2, m = 2$, $\qquad I_{\max} = \dfrac{n\mathscr{E}}{R + \dfrac{n}{m}r}$.

Ответ $I_{\max} = 7{,}5$ А.

3.97 На рисунке $R_1 = R_2 = 50$ Ом, $R_3 = 100$ Ом, $C = 50$ нФ. Определите ЭДС источника, пренебрегая его внутренним сопротивлением, если заряд на конденсаторе $Q = 2{,}2$ мкКл.

Дано

$R_1 = R_2 = 50$ Ом

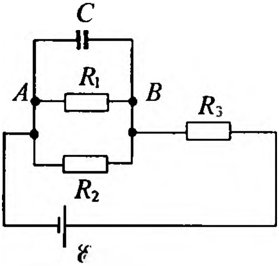
$R_3 = 100$ Ом

$C = 50$ нФ $= 5 \cdot 10^{-8}$ Ф

$Q = 2{,}2$ мкКл $=$
$= 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ Кл

$\mathcal{E}$ — ?

Решение



$$U = U_C = \frac{Q}{C},$$

$$U = I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

$$I = \frac{Q(R_1 + R_2)}{CR_1 R_2}, \qquad U_3 = IR_3 = \frac{Q(R_1 + R_2)R_3}{CR_1 R_2},$$

$$\mathcal{E} = U + U_3 = \frac{Q}{C}\left(1 + \frac{(R_1 + R_2)R_3}{R_1 R_2}\right).$$

Ответ $\mathcal{E} = 220$ В.

3.98 На рисунке $R_1 = R$, $R_2 = 2R$, $R_3 = 3R$, $R_4 = 4R$. Определите заряд на конденсаторе.

Дано

$R_1 = R$

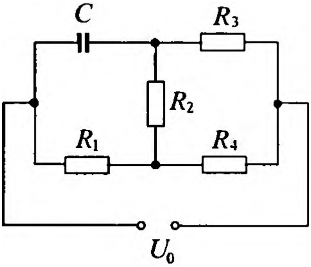
$R_2 = 2R$

$R_3 = 3R$

$R_4 = 4R$

Q — ?

Решение



$$I_0 = I_1 = I_2 + I_4,$$

$$I_2 = I_3,$$

$$R_{23} = R_2 + R_3 = 5R,$$

$$R_{234} = \frac{R_{23}R_4}{R_{23} + R_4} = \frac{20R}{9},$$

$$R_0 = R_1 + R_{234} = R + \frac{20R}{9} = \frac{29R}{9}, \qquad I_0 = \frac{U_0}{R_0} = \frac{9U_0}{29R},$$

$$I_2 R_{23} = I_4 R_4, \qquad I_4 = \frac{5}{4}I_2, \qquad I_2 + I_4 = I_2 + \frac{5}{4}I_2 = \frac{9}{4}I_2 = I_0, \qquad \frac{9}{4}I_2 = \frac{9}{29}\frac{U_0}{R},$$

$$I_2 = \frac{4}{29}\frac{U_0}{R}, \qquad U_C = I_1 R_1 + I_2 R_2 = \frac{17}{29}U_0, \qquad Q = CU_C = \frac{17}{29}U_0 C.$$

Ответ $Q = \frac{17}{29}U_0 C$.

3.99 В плоский конденсатор, расстояние между пластинами которого $d = 5$ мм, вдвигают стеклянную пластину ($\varepsilon = 7$) с постоянной скоростью $\upsilon = 50$ мм/с. Ширина пластины $b = 4{,}5$ мм, ЭДС батареи $\mathscr{E} = 220$ В. Определите силу тока в цепи батареи, подключенной к конденсатору.

Дано

$d = 5\ \text{мм} = 5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}$

$\varepsilon = 7$

$\upsilon = 50\ \text{мм/с} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{м/с}$

$b = 4{,}5\ \text{мм} = 4{,}5 \cdot 10^{-3}\ \text{м}$

$\mathscr{E} = 220\ \text{В}$

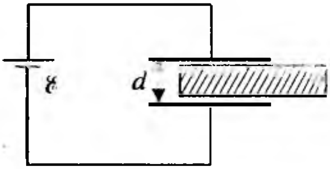
I — ?

Решение

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},$$

$$\mathrm{d}Q = \sigma' \upsilon b\, \mathrm{d}t,$$

$$\sigma' = \varepsilon_0 \varkappa E,$$



$$\varkappa = \varepsilon - 1, \qquad E = \frac{\mathscr{E}}{d}, \qquad \mathrm{d}Q = \varepsilon_o(\varepsilon - 1)\upsilon b\, \mathrm{d}t,$$

$$I = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\frac{\mathscr{E}}{d}\upsilon b.$$

Ответ $I = 526$ пА.

3.100 Два источника тока с ЭДС $\mathscr{E}_1 = 2$ В и $\mathscr{E}_2 = 1{,}5$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 0{,}5$ Ом и $r_2 = 0{,}4$ Ом включены параллельно сопротивлению $R = 2$ Ом. Определите силу тока через это сопротивление.

Дано

$\mathscr{E}_1 = 2$ В

$\mathscr{E}_2 = 1{,}5$ В

$r_1 = 0{,}5$ Ом

$r_2 = 0{,}4$ Ом

$R = 2$ Ом

I — ?

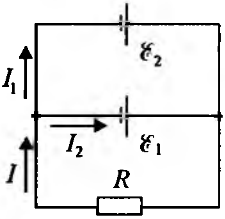
Решение

$$I = I_1 + I_2,$$

$$IR + I_1 r_1 = \mathscr{E}_1,$$

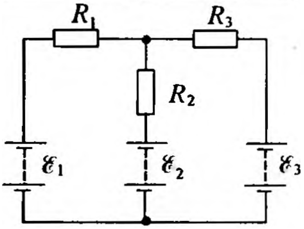
$$IR + I_2 r_2 = \mathscr{E}_2,$$

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{R r_1 + r_1 r_2 + R r_2}.$$



Ответ $I = 0{,}775$ А.

3.101 На рисунке $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3$, $R_1 = 48$ Ом, $R_2 = 24$ Ом, падение напряжения U_2 на сопротивлении R_2 равно 12 В. Пренебрегая внутренним сопротивлением элементов, определите: 1) силу тока во всех участках цепи; 2) сопротивление R_3.



Ответ 1) $I_1 = 0{,}25$ А, $I_2 = 0{,}5$ А, $I_3 = 0{,}75$ А; 2) $R_3 = 16$ Ом.

3.102 На рисунке $\mathscr{E} = 2$ В, $R_1 = 60$ Ом, $R_2 = 40$ Ом, $R_3 = R_4 = 20$ Ом и $R_G = 100$ Ом. Определите силу тока I_G через гальванометр.

Дано

$\mathscr{E} = 2$ В
$R_1 = 60$ Ом
$R_2 = 40$ Ом
$R_3 = R_4 = 20$ Ом
$R_G = 100$ Ом.

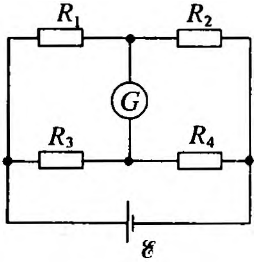
I_G — ?

Решение

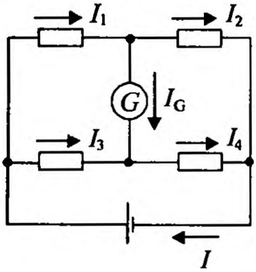
$$\begin{cases} I = I_1 + I_3, \\ I_1 = I_2 + I_G, \\ I_2 + I_4 = I, \\ I_3 + I_G = I_4; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1R_1 + I_2R_2 = \mathscr{E}, \\ I_3R_3 + I_4R_4 = \mathscr{E}, \\ I_1R_1 + I_GR_G + I_4R_4 = \mathscr{E}; \end{cases}$$

а)



б)



$$\begin{cases} 6I_1 + 4I_2 = 0{,}2, \\ 2I_3 + 2I_4 = 0{,}2, \\ 6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 6I_1 + 4(I_1 - I_G) = 0{,}2, \\ 2(I_4 - I_G) + 2I_4 = 0{,}2, \\ 6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2; \end{cases}$$

$$10I_1 - 4I_G = 0{,}2 \rightarrow I_1 = \frac{0{,}2 + 4I_G}{10}, \qquad 4I_4 - 2I_G = 0{,}2 \rightarrow I_4 = \frac{0{,}2 + 2I_G}{4},$$

$$6I_1 + 10I_G + 2I_4 = 0{,}2, \qquad 6\left(\frac{0{,}2 + 4I_G}{10}\right) + 10I_G + 2\left(\frac{0{,}2 + 2I_G}{4}\right) = 0{,}2,$$

$$1{,}2 + 24I_G + 100I_G + 1 + 10I_G = 2, \qquad 134I_G = -0{,}2, \qquad I_G = -1{,}49 \cdot 10^{-3} \text{ А}.$$

Ответ $I_G = 1{,}49$ мА, направлен в сторону, противоположную первоначально выбранной.

3.103 На рисунке $\mathscr{E}_1 = 10$ В, $\mathscr{E}_2 = 20$ В, $\mathscr{E}_3 = 40$ В, а сопротивления $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ Ом. Определите силу токов, протекающих через сопротивления (I) и через источники ЭДС (I'). Внутреннее сопротивление источников ЭДС не учитывать.

Дано

$\mathscr{E}_1 = 10$ В

$\mathscr{E}_2 = 20$ В

$\mathscr{E}_3 = 40$ В

$R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ Ом

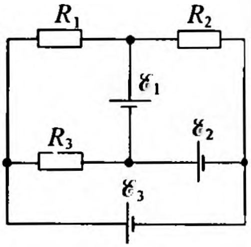
I_1, I_2, I_3 — ?

I'_1, I'_2, I'_3 — ?

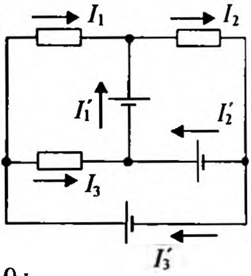
Решение

Выберем направления токов (рисунок б).

а)



б)



$$\begin{cases} I'_3 = I_1 + I_3, \\ I_1 + I'_1 = I_2, \\ I_3 + I'_2 = I'_1, \\ I_2 = I'_2 + I'_3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} I_1 R_3 = \mathscr{E}_3 - \mathscr{E}_2, \\ I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathscr{E}_3, \\ I_2 R_2 = \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_1; \end{cases}$$

$I_3 \cdot 10 = 20$, $\quad I_2 \cdot 10 = 30$, $\quad I_1 \cdot 10 + 3 \cdot 10 = 40$;

$I_3 = 2$ А, $\quad I_2 = 3$ А, $\quad I_1 = 1$ А;

$I'_3 = 3$ А, $\quad I'_2 = 0$, $\quad I'_1 = -2$ А,

I'_1 направлен в сторону, противоположную первоначально выбранной.

Ответ

$I_1 = 1$ А, $\quad I_2 = 3$ А, $\quad I_3 = 2$ А,

$I'_1 = 2$ А, $\quad I'_2 = 0$, $\quad I'_3 = 3$ А.

3.3. Электрический ток в металлах, в вакууме и газах

3.104 Определите минимальную скорость электрона, необходимую для ионизации атома водорода, если потенциал ионизации атома водорода $U_i = 13{,}6$ В.

Дано	Решение
$U_i = 13{,}6$ В $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	$eU_i = \dfrac{mv_{\min}^2}{2}$, $\quad v_{\min} = \sqrt{\dfrac{2eU_i}{m}}$.
$v_{\min}$ — ?	**Ответ** $v_{\min} = 2{,}19$ Мм/с.

3.105 Отношение работ выхода электронов из платины и цезия $A_{\text{Pt}}/A_{\text{Cs}} = 1{,}58$. Определите отношение минимальных скоростей теплового движения электронов, вылетающих из этих металлов.

Ответ $v_{\text{Pt}}/v_{\text{Cs}} = 1{,}26$.

3.106 Работа выхода электрона из металла $A = 2{,}5$ эВ. Определите скорость вылетающего из металла электрона, если он обладает энергией $W = 10^{-18}$ Дж.

Дано	Решение
$A = 2{,}5$ эВ $= 4 \cdot 10^{-19}$ Дж $W = 10^{-18}$ Дж	$\dfrac{mv^2}{2} = W - A$, $\quad v = \sqrt{2(W-A)/m}$.
v — ?	**Ответ** $v = 1{,}15$ Мм/с.

3.107 Термопара железо — константан, постоянная которой $\alpha = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ В/К и сопротивление $R = 15$ Ом, замкнута на гальванометр. Один спай термопары находится в сосуде с тающим льдом, а второй помещен в среду, температура которой не известна. Определите эту температуру, если ток, протекающий через гальванометр, $I = 0{,}2$ мА, а внутреннее сопротивление гальванометра $r = 150$ Ом.

Ответ $T = 896$ К.

3.108 Термопара $\mathcal{E}_\text{т}$ железо—константан и соединенный с нею последовательно гальванометр включены, как показано на рисунке, где $\mathcal{E}$ — батарея с ЭДС, равной 1,5 В. Полное сопротивление потенциометра равно 15 кОм. Холодный спай термопары находится в сосуде с тающим льдом. Постоянная термопары $\alpha = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ В/К. Определите температуру горячего спая термопары, если при сопротивлении $R_{AB} = 150$ Ом сила тока в цепи гальванометра равна нулю. Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Дано

$\mathcal{E} = 1{,}5$ В

$R_{AC} = 15$ кОм $= 1{,}5 \cdot 10^4$ Ом

$\alpha = 5{,}3 \cdot 10^{-5}$ В/К

$T_0 = 273$ К

$R_{AB} = 150$ Ом

$I_G = 0$

T — ?

Решение

$I_G = 0 \rightarrow \mathcal{E}_\text{т} = \varphi_{AB} = IR_{AB}$

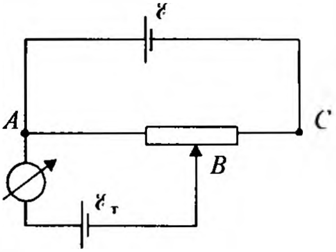
(I – сила тока в потенциометре),

$I = \mathcal{E} / R_{AC}$,

$$\frac{\mathcal{E}_\text{т}}{R_{AB}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{AC}},$$

$\mathcal{E}_\text{т} = \alpha(T - T_0)$,

$$T = \frac{\mathcal{E} R_{AB}}{R_{AC} \cdot \alpha} + T_0.$$



Ответ $T = 556$ К.

3.109 Определите работу выхода электронов из металла, если плотность тока насыщения двухэлектродной лампы при температуре T_1 равна j_1, а при температуре T_2 равна j_2.

Дано	***Решение***
T_1 j_1 T_2 j_2 A — ?	$j_1 = CT_1^2 e^{-A/(kT)}$, $\quad j_2 = CT_2^2 e^{-A/(kT)}$, $j_1/j_2 = (T_1/T_2)^2 e^{\frac{A}{k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)}$, $\frac{A}{k}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right) = \ln\left(\frac{j_1T_2^2}{j_2T_1^2}\right)$, $\quad A = \frac{kT_1T_2\ln\left(\frac{j_1T_2^2}{j_2T_1^2}\right)}{T_1-T_2}$.

Ответ

$$A = \frac{kT_1T_2\ln\left(\frac{j_1T_2^2}{j_2T_1^2}\right)}{T_1-T_2}.$$

3.110 Выведите зависимость скорости изменения плотности термоэлектронного тока насыщения от температуры.

Ответ

$$\frac{\partial j_{\text{нас}}}{\partial T} = C\left(2T + \frac{A}{k}\right)e^{-A/(kT)}.$$

3.111 Ток насыщения при несамостоятельном разряде $I_{\text{нас}} = 6{,}4$ пА. Найдите число пар ионов, создаваемых за 1 с внешним ионизатором.

Дано	***Решение***
$I_{\text{нас}} = 6{,}4$ пА $= 6{,}4\cdot10^{-12}$ А $t = 1$ с N — ?.	$Q = 2Ne$, $\quad I_{\text{нас}} = \frac{Q}{t} = \frac{2Ne}{t}$, $N = \frac{I_{\text{нас}}t}{2e}$.

Ответ $N = 2\cdot10^7$.

3.112 Потенциал ионизации атома водорода $U_i = 13{,}6$ В. Определите температуру, при которой атомы имеют среднюю кинетическую энергию поступательного движения, достаточную для ионизации.

Дано	*Решение*
$U_i = 13{,}6$ В	$eU_i = \frac{3}{2}kT$, $\qquad T = \frac{2eU_i}{3k}$.
T — ?	

Ответ $T = 105$ кК.

3.113 Определите температуру, соответствующую средней кинетической энергии поступательного движения электронов, равной работе выхода из вольфрама, если поверхностный скачок потенциала для вольфрама 4,5 В.

Дано	*Решение*
$\langle\varepsilon\rangle = A$ $\varphi = 4{,}5$ В	$\langle\varepsilon\rangle = \frac{3}{2}kT$, $\qquad A = e\varphi$,
T — ?	$\langle\varepsilon\rangle = A$, $\qquad \frac{3}{2}kT = e\varphi$,

$$T = \frac{2e\varphi}{3kT}.$$

Ответ $T = 34{,}8$ кК.

● ●

Основные физические постоянные

Постоянная Больцмана $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К

Элементарный заряд $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

Масса покоя электрона $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

3.4. Магнитное поле

3.114 В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл помещена квадратная рамка площадью $S = 25$ см². Нормаль к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол 60°. Определите вращающий момент, действующий на рамку, если по ней течет ток $I = 1$ А.

Дано

$B = 0{,}1$ Тл

$S = 25\ \text{см}^2 = 25 \cdot 10^{-4}\ \text{м}^2$

$\alpha = 60°$

$I = 1$ А

M — ?

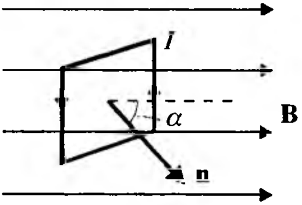
Решение

$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_\text{m}, \mathbf{B}]$,

$M = p_\text{m} B \sin\alpha$,

$p_\text{m} = IS$,

$M = ISB \sin\alpha$.



Ответ $M = 217$ мкН · м.

3.115 В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл находится прямоугольная рамка длиной $a = 8$ см и шириной $b = 5$ см, содержащая $N = 100$ витков тонкой проволоки. Ток в рамке $I = 1$ А, а плоскость рамки параллельна линиям магнитной индукции. Определите: 1) магнитный момент рамки; 2) вращающий момент, действующий на рамку.

Ответ 1) $p_\text{m} = 0{,}4$ А · м²; 2) $M = 0{,}2$ Н · м.

● ●

Основные физические постоянные

Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

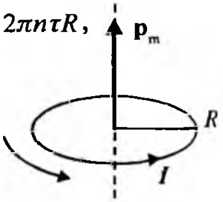
Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м

Масса покоя протона $m_p = 1{,}627 \cdot 10^{-27}$ кг

3.116 В однородном магнитном поле с индукцией $B = 1$ Тл находится квадратная рамка со стороной $a = 10$ см, по которой течет ток $I = 4$ А. Плоскость рамки перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определите работу A, которую необходимо затратить для поворота рамки относительно оси, проходящей через середину ее противоположных сторон: 1) на 90°; 2) на 180°; 3) на 360°.

Ответ 1) $A_1 = 0{,}04$ Дж; 2) $A_2 = 0{,}08$ Дж; 3) $A_3 = 0$.

3.117 Тонкое кольцо массой 10 г и радиусом $R = 8$ см несет заряд, равномерно распределенный с линейной плотностью $\tau = 10$ нКл/м. Кольцо равномерно вращается с частотой $n = 15$ с^{-1} относительно оси, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через ее центр. Определите: 1) магнитный момент p_m кругового тока, создаваемого кольцом; 2) отношение магнитного момента к моменту импульса кольца.

Дано	*Решение*
$m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг $R = 8$ см $= 0{,}08$ м $\tau = 10$ нКл/м $n = 15$ с^{-1} 1) p_m — ? 2) p_m/L — ?	$p_m = IS$, $I = \dfrac{Q}{T} = \dfrac{\tau \cdot 2\pi R}{T} = 2\pi n \tau R$, $S = \pi R^2$, $T = 1/n$, $p_m = 2\pi n \tau R \cdot \pi R^2 = 2\pi^2 n \tau R^3$, $L = m v R$, $v = \omega R = 2\pi n R$, $p_m/L = 2\pi^2 n \tau R^3 / (m \cdot 2\pi n R^2) = \pi \tau R / m$. 

Ответ 1) $p_m = 1{,}52$ нА · м²; 2) $p_m/L = 251$ нКл/кг.

3.118 Принимая, что электрон в атоме водорода движется по круговой орбите, определите отношение магнитного момента p_m эквивалентного кругового тока к моменту импульса L орбитального движения электрона.

Ответ $\dfrac{p_m}{L} = 87{,}8$ ГКл/кг.

3.119 Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого отрезком бесконечно длинного провода, в точке, равноудаленной от концов отрезка и находящейся на расстоянии $R = 4$ см от его середины. Длина отрезка провода $l = 20$ см, а сила тока в проводе $I = 10$ А.

Дано

$R = 4$ см $= 4 \cdot 10^{-2}$ м
$l = 20$ см $= 0{,}2$ м
$I = 10$ А

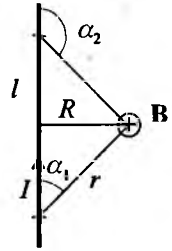
B — ?

Решение

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{l/2}{r},$$

$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1.$$



Ответ $B = 46{,}4$ мкТл.

3.120 Определите индукцию магнитного поля в центре проволочной квадратной рамки со стороной $a = 15$ см, если по рамке течет ток $I = 5$ А.

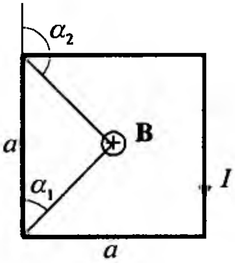
Дано

$a = 15$ см $= 0{,}15$ м
$I = 5$ А

B — ?

Решение

$$\alpha_2 = 180° - \alpha_1$$



$$B = 4B_1,$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{(a/2)}(\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2),$$

$$B = 4 \cdot \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I}{(a/2)} \cdot 2 \cdot \cos\alpha_1.$$

Ответ $B = 37{,}7$ мкТл.

3.121 По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводам, находящимся на расстоянии $R = 10$ см друг от друга в вакууме, текут токи $I_1 = 20$ А и $I_2 = 30$ А одинакового направления. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого токами в точках, лежащих на прямой, соединяющей оба провода, если: 1) точка C лежит на расстоянии $r_1 = 2$ см левее левого провода; 2) точка D лежит на расстоянии $r_2 = 3$ см правее правого провода; 3) точка G лежит на расстоянии $r_3 = 4$ см правее левого провода.

Дано

$I_1 = 20$ А

$I_2 = 30$ А

$R = 10$ см $= 0{,}1$ м

$r_1 = 2$ см $= 0{,}02$ м

$r_2 = 3$ см $= 0{,}03$ м

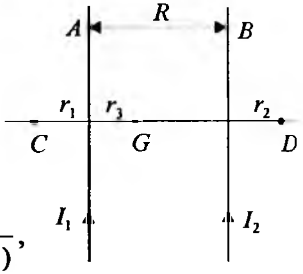
$r_3 = 4$ см $= 0{,}04$ м

1) B_1 — ?

2) B_2 — ?

3) B_3 — ?

Решение



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{r},$$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1}{r_1} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_2}{(R + r_1)},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1}{(R + r_2)} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_2}{r_2},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_1}{r_3} - \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2I_2}{(R - r_3)}.$$

Ответ 1) $B_1 = 0{,}25$ мТл; 2) $B_2 = 0{,}23$ мТл; 3) $B_3 = 0$.

3.122 По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми $d = 20$ см, текут токи $I_1 = 40$ А и $I_2 = 80$ А в одном направлении. Определите магнитную индукцию B в точке A, удаленной от первого проводника на $r_1 = 12$ см и от второго — на $r_2 = 16$ см.

Ответ $B = 120$ мкТл.

3.123 По двум бесконечно длинным прямым параллельным проводникам, расстояние между которыми $d = 15$ см, текут токи $I_1 = 70$ А и $I_2 = 50$ А в противоположных направлениях. Определите магнитную индукцию B в точке A, удаленной на $r_1 = 20$ см от первого и $r_2 = 30$ см от второго проводника.

Дано

$d = 15$ см $= 0{,}15$ м

$I_1 = 70$ А

$I_2 = 50$ А

$r_1 = 20$ см $= 0{,}2$ м

$r_2 = 30$ см $= 0{,}3$ м

B — ?

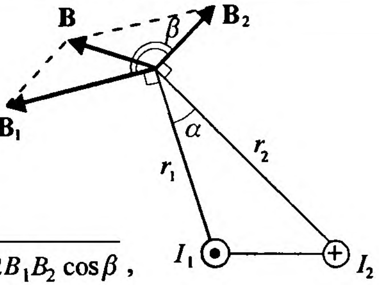
Решение

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_1}{r_1},$$

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{r_2},$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2,$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + 2B_1B_2\cos\beta},$$



$$\beta = 180° - \alpha, \qquad d^2 = r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos\alpha, \qquad \cos\alpha = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2},$$

$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 - 2B_1B_2\cos\alpha} = \frac{\mu_0}{2\pi}\sqrt{\frac{I_1^2}{r_1^2} + \frac{I_2^2}{r_2^2} - \frac{I_1I_2}{r_1^2r_2^2}(r_1^2 + r_2^2 - d^2)}.$$

Ответ $B = 42{,}8$ мкТл.

3.124 Напряженность H магнитного поля в центре кругового витка с магнитным моментом $p_m = 1{,}5$ А · м² равна 150 А/м. Определите: 1) радиус витка; 2) силу тока в витке.

Дано

$H = 150$ А/м

$p_m = 1{,}5$ А · м²

1) R — ?

2) I — ?

Решение

$$\left.\begin{array}{l} H = \dfrac{I}{2R} \\ p_m = IS \\ S = \pi R^2 \end{array}\right\}, \qquad R = \sqrt[3]{\frac{p_m}{2\pi H}}, \qquad I = 2RH.$$

Ответ 1) $R = 11{,}7$ см; 2) $I = 35{,}1$ А.

3.125 Определите магнитную индукцию в центре кругового проволочного витка радиусом $R = 10$ см, по которому течет ток $I = 1$ А.

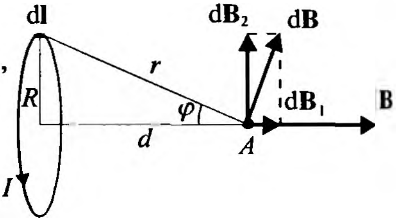
Ответ $B = 6{,}28$ мкТл.

3.126 Определите магнитную индукцию на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 5$ см, по которому течет ток $I = 10$ А, в точке A, расположенной на расстоянии $d = 10$ см от центра кольца.

Дано	*Решение*
$R = 5$ см $= 0{,}05$ м $I = 10$ А $d = 10$ см $= 0{,}1$ м B — ?	$\mathrm{d}B = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}l}{r^2} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{I\,\mathrm{d}l}{(R^2+d^2)}$, $\mathrm{d}B_1 = \mathrm{d}B\sin\varphi$, $\quad \sin\varphi = \dfrac{R}{\sqrt{R^2+d^2}}$,

$$B_1 = \int_0^{2\pi R} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\,\mathrm{d}l}{(R^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\cdot 2\pi R^2}{(R^2+d^2)^{3/2}},$$

$$\mathbf{B}_2 = \sum \mathrm{d}\mathbf{B}_2 = 0, \qquad \mathbf{B} = \mathbf{B}_1.$$



Ответ $B = 11{,}2$ мкТл.

3.127 Определите магнитную индукцию B_A на оси тонкого проволочного кольца радиусом $R = 10$ см, в точке, расположенной на расстоянии $d = 20$ см от центра кольца, если при протекании тока по кольцу в центре кольца $B = 50$ мкТл.

Ответ $B_A = 4{,}47$ мкТл.

3.128 Круговой виток радиусом $R = 15$ см расположен относительно бесконечно длинного провода так, что его плоскость параллельна проводу. Перпендикуляр, восставленный на провод из центра витка, является нормалью к плоскости витка. Сила тока в проводе $I_1 = 1$ А, сила тока в витке $I_2 = 5$ А. Расстояние от центра витка до провода $d = 20$ см. Определите магнитную индукцию в центре витка.

Дано

$R = 15$ см $= 0{,}15$ м

$I_1 = 1$ А

$I_2 = 5$ А

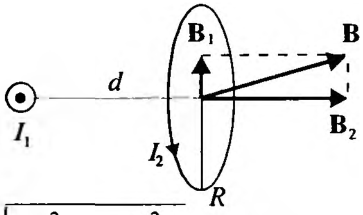
$d = 20$ см $= 0{,}2$ м

B — ?

Решение

$$B_1 = \mu_0 \frac{I_1}{2\pi d},$$

$$B_2 = \mu_0 \frac{I_2}{2R},$$



$$B = \sqrt{B_1^2 + B_2^2} = \mu_0 \sqrt{\frac{I_1^2}{(2\pi d)^2} + \frac{I_2^2}{(2R)^2}}\,.$$

Ответ $B = 21{,}2$ мкТл.

3.129 В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}2$ Тл находится прямой проводник длиной $l = 15$ см, по которому течет ток $I = 5$ А. На проводник действует сила $F = 0{,}13$ Н. Определите угол α между направлениями тока и вектором магнитной индукции.

Дано

$B = 0{,}2$ Тл

$l = 15$ см $= 0{,}15$ м

$I = 5$ А

$F = 0{,}13$ Н

α — ?

Решение

$$\mathbf{F} = I[\mathbf{dl}, \mathbf{B}], \qquad F = IlB\sin\alpha,$$

$$\sin\alpha = \frac{F}{IlB}, \qquad \alpha = \arcsin\frac{F}{IlB}.$$

Ответ $\alpha = 60°$.

3.130 По прямому горизонтально расположенному проводу пропускают ток $I_1 = 10$ А. Под ним на расстоянии $R = 1{,}5$ см находится параллельный ему алюминиевый провод, по которому пропускают ток $I_2 = 1{,}5$ А. Определите, какой должна быть площадь поперечного сечения алюминиевого провода, чтобы он удерживался незакрепленным. Плотность алюминия $\rho = 2{,}7$ г/см^3.

Дано

$I_1 = 10$ А

$R = 1{,}5$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

$I_2 = 1{,}5$ А

$\rho = 2{,}7$ г/см^3 =
$= 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3

S — ?

Решение

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi R}\bigg|_{\mu=1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R}, \qquad \frac{mg}{l} = \frac{\rho V g}{l} = \rho S g.$$

$$F = mg, \qquad \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R} = \rho S g,$$

$$S = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi R \rho g}.$$

Ответ $S = 7{,}55 \cdot 10^{-9}$ м^2.

3.131 Два бесконечных прямолинейных параллельных проводника с одинаковыми токами, текущими в одном направлении, находятся друг от друга на расстоянии R. Чтобы их раздвинуть до расстояния $2R$, на каждый сантиметр длины проводника затрачивается работа $A = 138$ нДж. Определите силу тока в проводниках.

Дано

R

$2R$

$A = 138$ нДж =
$= 1{,}38 \cdot 10^{-7}$ Дж

$l = 1$ см $= 10^{-2}$ м

$I_1 = I_2 = I$

I — ?

Решение

$$\mathrm{d}A = F\,\mathrm{d}x, \qquad F = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2}{2\pi x} l \bigg|_{\mu=1} = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi x},$$

$$A = \int_R^{2R} F\,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I^2 l}{2\pi} \cdot \int_R^{2R} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mu_0 I^2 l \ln 2}{2\pi},$$

$$I = \sqrt{\frac{2\pi A}{\mu_0 l \ln 2}}.$$

Ответ $I = 10$ А.

3.132 Контур из провода, изогнутого в форме квадрата со стороной $a = 0{,}5$ м, расположен в одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 5$ А так, что две его стороны параллельны проводу. Сила тока в контуре $I_1 = 1$ А. Определите силу, действующую на контур, если ближайшая к проводу сторона контура находится на расстоянии $b = 10$ см. Направления токов указаны на рисунке.

Дано

$a = 0{,}5$ м

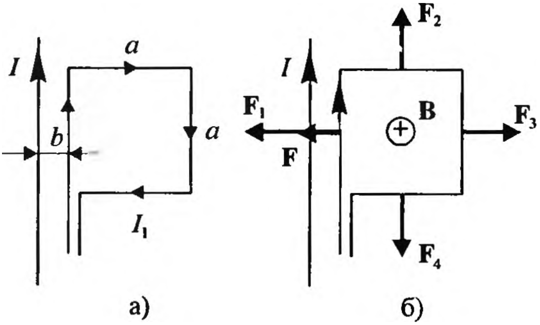
$I = 5$ А

$I_1 = 1$ А

$b = 10$ см $= 0{,}1$ м

F — ?

Решение



$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4,$$

$$\mathbf{F}_2 = -\mathbf{F}_4, \qquad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_3,$$

$$F = F_1 - F_3, \qquad \mu = 1, \qquad F_1 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi b} a, \qquad F_3 = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi (b+a)} a,$$

$$F = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} a \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{b+a} \right) = \frac{\mu_0 I I_1 \cdot a^2}{2\pi (a+b) b}.$$

Ответ $F = 4{,}17$ мкН.

• •

Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})
Г — гига (10^{9})
М — мега (10^{6})
к — кило (10^{3})
д — деци (10^{-1})
с — санти (10^{-2})
м — милли (10^{-3})
мк — микро (10^{-6})
н — нано (10^{-9})
п — пико (10^{-12})
ф — фемто (10^{-15})
а — атто (10^{-18})

3.133 Прямоугольная рамка со сторонами $a = 40$ см и $b = 30$ см расположена в одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 6$ А так, что длинные стороны рамки параллельны проводу. Сила тока в рамке $I_1 = 1$ А. Определите силы, действующие на каждую из сторон рамки, если ближайшая к проводу сторона рамки находится на расстоянии $c = 10$ см, а ток в ней сонаправлен току I.

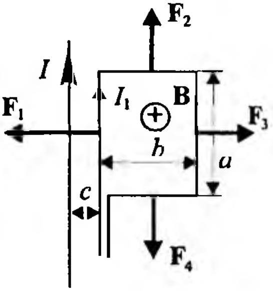
Дано

$a = 40$ см $= 0{,}4$ м
$b = 30$ см $= 0{,}3$ м
$I = 6$ А
$I_1 = 1$ А
$c = 10$ см $= 0{,}1$ м

F_1 — ?
F_2 — ?
F_3 — ?
F_4 — ?

Решение

$$\mathbf{dF} = I[\mathbf{dl}, \mathbf{B}],$$



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r},$$

$$[\mathbf{dl} \hat{,} \mathbf{B}] = \frac{\pi}{2},$$

$$F = \int dF = \int IB\,dl,$$

$$F_1 = \int_0^a I_1 B_1\,dl = \int_0^a I_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi c}\,dl = \frac{\mu_0 I I_1 a}{2\pi c},$$

$$F_2 = \int_c^{c+b} I_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi l}\,dl = \frac{\mu_0 I I_1}{2\pi} \ln\frac{c+b}{c}, \qquad F_3 = \frac{\mu_0 I I_1 a}{2\pi(c+b)}, \qquad F_4 = F_2.$$

Ответ

$F_1 = 4{,}8$ мкН, $F_2 = 1{,}66$ мкН,
$F_3 = 1{,}2$ мкН, $F_4 = 1{,}66$ мкН.

● ●

Закон Ампера

$$\mathbf{dF} = I[\mathbf{dl}, \mathbf{B}],$$

где $\mathbf{dF}$ — сила, действующая на элемент $\mathbf{dl}$ проводника с током I, помещенный в магнитное поле с индукцией $\mathbf{B}$.

3.134 По тонкому проволочному полукольцу радиусом $R = 50$ см течет ток $I = 1$ А. Перпендикулярно плоскости полукольца возбуждено однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}01$ Тл. Найдите силу, растягивающую полукольцо. Действие на полукольцо магнитного поля подводящих проводов и взаимодействие отдельных элементов полукольца не учитывать.

Дано

$R = 50$ см $= 0{,}5$ м

$I = 1$ А

$B = 0{,}01$ Тл

F — ?

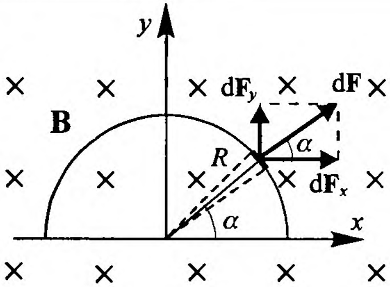
Решение

$\mathrm{d}\mathbf{F} = I[\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{B}]$,

$(\mathrm{d}\mathbf{l}\,\hat{,}\,\mathbf{B}) = \pi/2$,

$\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}l$,

$\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\alpha$,



$\mathrm{d}F = IBR\,\mathrm{d}\alpha$,

$\mathrm{d}F_x = \mathrm{d}F\cos\alpha$, $\mathrm{d}F_y = \mathrm{d}F\sin\alpha$,

$$F_x = \int_0^{\pi} IBR\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = IBR(\sin\alpha)\Big|_0^{\pi} = 0,$$

$$F_y = \int_0^{\pi} IBR\sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = IBR(-\cos\alpha)\Big|_0^{\pi} = 2IBR,$$

$F = F_y = 2IBR$.

Ответ $F = 0{,}01$ Н.

3.135 Применяя закон Ампера для силы взаимодействия двух параллельных токов, выведите числовое значение магнитной постоянной μ_0.

$\mathrm{d}F = \dfrac{\mu_0\mu}{4\pi}\cdot\dfrac{2I_1I_2}{R}\,\mathrm{d}l$, $I_1 = I_2 = 1$ А, $R = 1$ м, $\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l} = 2\cdot10^{-7}$ Н/м,

$\mu = 1$, $\mu_0 = \dfrac{\dfrac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}l}\cdot 4\pi}{2I^2} = 4\pi\cdot10^{-7}$ Н/А² $= 4\pi\cdot10^{-7}$ Гн/м.

3.136 Электрон движется прямолинейно с постоянной скоростью $v = 0{,}2$ Мм/с. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в точке, находящейся на расстоянии $r = 2$ нм от электрона и лежащей на прямой, проходящей через мгновенное положение электрона и составляющей угол $\alpha = 45°$ со скоростью движения электрона.

Дано	*Решение*
$v = 0{,}2$ Мм/с $= 0{,}2 \cdot 10^6$ м/с $r = 2$ нм $= 2 \cdot 10^{-9}$ м $\alpha = 45°$	$\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 \mu Q [\mathbf{v}\,\mathbf{r}]}{4\pi r^3}$, $\mu = 1$, $Q = e$,
B — ?	$B = \dfrac{\mu_0 e v}{4\pi r^2} \sin\alpha$.

Ответ $B = 566$ мкТл.

3.137 Определите напряженность H поля, создаваемого прямолинейно равномерно движущимся со скоростью $v = 5000$ км/с электроном, в точке, находящейся от него на расстоянии $r = 10$ нм и лежащей на перпендикуляре к $\mathbf{v}$, проходящем через мгновенное положение электрона.

Ответ $H = 637$ А/м.

3.138 Согласно теории Бора, электрон в атоме водорода движется вокруг ядра по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ пм. Определите магнитную индукцию B поля, создаваемого электроном в центре круговой орбите.

Дано	*Решение*
$r = 52{,}8$ пм $= 5{,}28 \cdot 10^{-11}$ м	$\mathbf{B} = \dfrac{\mu_0 \mu Q [\mathbf{v}\,\mathbf{r}]}{4\pi r^3}$, $(\widehat{\mathbf{v}, \mathbf{r}}) = \dfrac{\pi}{2}$, $\mu = 1$, $\lvert Q \rvert = e$,
B — ?	

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e v}{r^2}, \qquad \frac{m v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e^2}{r^2}, \qquad v = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r m}},$$

$$B = \frac{\mu_0 e^2}{8\pi r^2 \sqrt{\pi\varepsilon_0 r m}}.$$

Ответ $B = 1{,}25$ Тл.

3.139 Электрон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл по окружности. Определите угловую скорость вращения электрона.

Дано	Решение
$B = 0{,}1$ Тл	$\mathbf{F}_Л = Q[\mathbf{v}\,\mathbf{B}]$, $\quad |Q| = e$,
ω — ?	$\dfrac{mv^2}{r} = evB$, $\quad v = \dfrac{erB}{m}$,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{eB}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{eB}{m}.$$

Ответ $\omega = 1{,}76 \cdot 10^{10}$ рад/с.

3.140 Электрон, обладая скоростью $v = 10$ Мм/с, влетел в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Индукция магнитного поля $B = 0{,}1$ мТл. Определите нормальное и тангенциальное ускорения электрона.

Ответ $a_n = \text{const} = 1{,}76 \cdot 10^{14}$ м/с²; $\quad a_\tau = 0$.

3.141 В однородном магнитном поле перпендикулярно линиям магнитной индукции движется прямой проводник длиной 40 см. Определите силу Лоренца, действующую на свободный электрон проводника, если возникающая на его концах разность потенциалов составляет 10 мкВ.

Ответ $F_Л = 4 \cdot 10^{-24}$ Н.

Модуль силы Ампера

$$\mathrm{d}F = IB\,\mathrm{d}l \sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{dl}$ и $\mathbf{B}$.

3.142 Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ, движется параллельно прямолинейному длинному проводнику на расстоянии $r = 1$ см от него. Определите силу, действующую на электрон, если через проводник пропускать ток $I = 10$ А.

Дано	*Решение*
$U = 0{,}5$ кВ $= 500$ В	$eU = \frac{mv^2}{2}$,
$r = 1$ см $= 10^{-2}$ м	$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}$, $\quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,
$I = 10$ А	
F — ?	

$$F = evB = \frac{\mu_0 e I \sqrt{eU}}{\pi r \sqrt{2m}}.$$

Ответ $F = 4{,}24 \cdot 10^{-16}$ Н.

3.143 Протон, ускоренный разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ, влетая в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по окружности. Определите радиус этой окружности.

Дано	*Решение*
$U = 0{,}5$ кВ $= 500$ В	$QU = \frac{mv^2}{2}$, $\quad v = \sqrt{\frac{2QU}{m}}$,
$Q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл	
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг	$QvB = \frac{mv^2}{R}$, $\quad R = \frac{mv}{QB} = \frac{\sqrt{2mQU}}{QB}$.
$B = 2$ мТл $= 2 \cdot 10^{-3}$ Тл	
R — ?	

Ответ $R = 1{,}61$ м.

3.144 Электрон, влетев в однородное магнитное поле с магнитной индукцией $B = 2$ мТл, движется по круговой орбите радиусом $R = 15$ см. Определите магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока.

Дано

$B = 2$ мТл $= 2 \cdot 10^{-3}$ Тл
$R = 15$ см $= 0{,}15$ м

p_m — ?

Решение

$$p_m = IS, \qquad S = \pi R^2, \qquad I = \frac{e}{T},$$

$$T = \frac{2\pi R}{v}, \qquad evB = \frac{mv^2}{R}, \qquad v = \frac{eBR}{m},$$

$$p_m = \frac{e^2 BR^2}{2m}.$$

Ответ $p_m = 0{,}632$ пА · м².

3.145 Электрон, обладая скоростью $v = 1$ Мм/с, влетает в однородное магнитное поле под углом $\alpha = 60°$ к направлению поля и начинает двигаться по спирали. Напряженность магнитного поля $H = 1{,}5$ кА/м. Определите: 1) шаг спирали; 2) радиус витка спирали.

Дано

$v = 1$ Мм/с $= 10^6$ м/с
$\alpha = 60°$
$H = 1{,}5$ кА/м $=$
$= 1{,}5 \cdot 10^3$ А/м

1) h — ?
2) R — ?

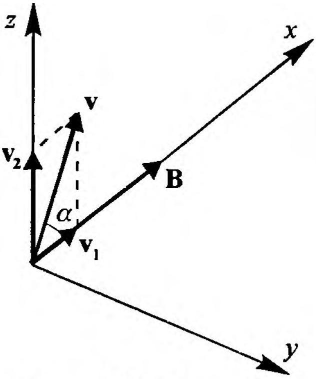
Решение

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2,$$

$$v_1 = v\cos\alpha,$$

$$v_2 = v\sin\alpha,$$

$$T = \frac{2\pi R}{v_2} = \frac{2\pi R}{v\sin\alpha},$$



$$h = v_1 T = v\cos\alpha \frac{2\pi R}{v\sin\alpha} = \frac{2\pi v m\cos\alpha}{e\mu_0 H},$$

$$ev_2 B = \frac{mv_2^2}{R}, \qquad B = \mu_0 H, \qquad R = \frac{v_2 m}{eB} = \frac{v\sin\alpha \cdot m}{e\mu_0 H}.$$

Ответ 1) $h = 9{,}49$ мм; 2) $R = 2{,}62$ мм.

3.146 Электрон движется в однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0{,}2$ мТл по винтовой линии. Определите скорость v электрона, если радиус винтовой линии $R = 3$ см, а шаг $h = 9$ см.

Ответ $v = 1{,}17$ Мм/с.

3.147 Определите, при какой скорости пучок заряженных частиц, двигаясь перпендикулярно скрещенным под прямым углом однородным электрическому ($E = 100$ кВ/м) и магнитному ($B = 50$ мТл) полям, не отклоняется.

Дано	Решение
$E = 100$ кВ/м $= 10^5$ В/м $B = 50$ мТл $= 5 \cdot 10^{-2}$ Тл v — ?	$\mathbf{F}_e = Q\mathbf{E}$, $\quad \mathbf{F}_{\text{Л}} = Q[\mathbf{v}, \mathbf{B}]$, $\quad F_e = F_{\text{Л}}$, $QE = QvB$, $\quad v = \dfrac{E}{B}$.

Ответ $v = 2$ Мм/с.

3.148 В однородное магнитное поле с магнитной индукцией 0,2 Тл перпендикулярно линиям магнитной индукции с постоянной скоростью влетает заряженная частица. В течение 5 мкс включается электрическое поле напряженностью 0,5 кВ/м в направлении, параллельном магнитному полю. Определите шаг винтовой траектории заряженной частицы.

Дано	Решение
$B = 0{,}2$ Тл $t = 5$ мкс $= 5 \cdot 10^{-6}$ с $E = 0{,}5$ кВ/м $= 500$ В/м h — ?	$QvB = \dfrac{mv^2}{R}$, $\quad T = \dfrac{2\pi R}{v} = \dfrac{2\pi m}{QB}$, $\quad F_e = QE$, $F_e t = m v_1$, $\quad v_1 = \dfrac{F_e t}{m} = \dfrac{QEt}{m}$, $\quad h = v_1 T = \dfrac{2\pi E t}{B}$.

Ответ $h = 7{,}85$ см.

3.149 Ионы двух изотопов с массами $m_1 = 6{,}5 \cdot 10^{-26}$ кг и $m_2 = 6{,}8 \cdot 10^{-26}$ кг, ускоренные разностью потенциалов $U = 0{,}5$ кВ, влетают в однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}5$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Принимая заряд каждого иона равным элементарному электрическому заряду, определите, на сколько будут отличаться радиусы траекторий ионов изотопов в магнитном поле.

Дано

$m_1 = 6{,}5 \cdot 10^{-26}$ кг

$m_2 = 6{,}8 \cdot 10^{-26}$ кг

$U = 0{,}5$ кВ

$B = 0{,}5$ Тл

$R_2 - R_1$ — ?

Решение

$$evB = \frac{mv^2}{R}, \qquad R = \frac{mv}{eB},$$

$$eU = \frac{mv^2}{2}, \qquad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}},$$

$$R = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}, \qquad R_2 - R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2U}{e}}\left(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}\right).$$

Ответ $R_2 - R_1 = 0{,}917$ мм.

3.150 Циклотроны позволяют ускорять протоны до энергий 20 МэВ. Определите радиус дуантов циклотрона, если магнитная индукция $B = 2$ Тл.

Дано

$T = 20$ МэВ $= 3{,}2 \cdot 10^{-12}$ Дж

$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

$B = 2$ Тл

R — ?

Решение

$$T = \frac{mv^2}{2}, \qquad v = \sqrt{\frac{2T}{m}},$$

$$evB = \frac{mv^2}{R}, \qquad R = \frac{mv^2}{evB} = \frac{\sqrt{2Tm}}{eB}.$$

Ответ $R \geqslant 32{,}3$ см.

3.151 Определите удельный заряд частиц, ускоренных в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}7$ Тл при частоте ускоряющего напряжения $\nu = 25{,}9$ МГц.

Дано

$B = 1{,}7$ Тл

$\nu = 25{,}9$ МГц $=$
$= 2{,}59 \cdot 10^7$ Гц

$\frac{Q}{m}$ — ?

Решение

$\frac{2\pi R}{v} = \frac{1}{\nu}$ (условие синхронизма),

$$\frac{mv^2}{R} = QvB, \qquad v = 2\pi\nu R,$$

$$\frac{Q}{m} = \frac{v}{RB} = \frac{2\pi\nu R}{RB} = \frac{2\pi\nu}{B}.$$

Ответ $\frac{Q}{m} = 9{,}57 \cdot 10^7$ Кл/кг.

3.152 Протоны ускоряются в циклотроне в однородном магнитном поле с индукцией $B = 1{,}2$ Тл. Максимальный радиус кривизны траектории протонов составляет $R = 40$ см. Определите: 1) кинетическую энергию протонов в конце ускорения; 2) минимальную частоту ускоряющего напряжения, при которой протоны ускоряются до энергий $T = 20$ МэВ.

Дано

$B = 1{,}2$ Тл

$R = 40$ см $= 0{,}4$ м

$T_1 = 20$ МэВ $=$
$= 3{,}2 \cdot 10^{-12}$ Дж

T — ?

ν_1 — ?

Решение

$$evB = \frac{mv^2}{R}, \qquad v = \frac{eBR}{m},$$

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2B^2R^2}{2m}, \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2T_1}{m}},$$

$$v_1 = 2\pi\nu_1 R, \qquad \nu_1 = \frac{1}{2\pi R}\sqrt{\frac{2T_1}{m}}.$$

Ответ $T = 11$ МэВ, $\nu_1 = 24{,}6$ МГц.

3.153

В случае эффекта Холла для натриевого проводника при плотности тока $j = 150$ А/см² и магнитной индукции $B = 2$ Тл напряженность поперечного электрического поля $E_B = 0{,}75$ мВ/м. Определите концентрацию электронов проводимости, а также ее отношение к концентрации атомов в этом проводнике. Плотность натрия $\rho = 0{,}97$ г/см³.

Дано

$j = 150$ А/см² $=$

$= 1{,}5 \cdot 10^6$ А/м²

$B = 2$ Тл

$E_B = 0{,}75$ мВ/м $=$

$= 0{,}75 \cdot 10^{-3}$ В/м

$\rho = 0{,}97$ г/см³ $= 970$ кг/м³

$M = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

n — ?

$\dfrac{n}{n'}$ — ?

Решение

$$eE_B = evB, \qquad v = \frac{E_B}{B},$$

$$j = nev, \qquad n = \frac{j}{ev} = \frac{jB}{eE_B},$$

$$n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A \rho}{M},$$

$$\frac{n}{n'} = \frac{jBM}{eE_B N_A \rho}.$$

Ответ $n = 2{,}5 \cdot 10^{28}$ м⁻³, $n/n' = 0{,}984$.

3.154

Определите постоянную Холла для натрия, если для него отношение концентрации электронов проводимости к концентрации атомов составляет 0,984. Плотность натрия $\rho = 0{,}97$ г/см³.

Дано

$n/n' = 0{,}984$

$\rho = 0{,}97$ г/см³ $= 970$ кг/м³

$M = 23 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

R – ?

Решение

$$R = \frac{1}{en}, \qquad n' = \frac{N_A}{V_m} = \frac{N_A}{M/\rho} = \frac{N_A \rho}{M},$$

$$n = 0{,}984 n', \qquad R = \frac{1}{0{,}984 e n'} = \frac{M}{0{,}984 e N_A \rho}.$$

Ответ $R = 2{,}5 \cdot 10^{-10}$ м³/(А · с).

3.155 Определите, во сколько раз постоянная Холла у меди больше, чем у алюминия, если известно, что в алюминии на один атом в среднем приходится два свободных электрона, а в меди — 0,8 свободных электронов. Плотности меди и алюминия соответственно равны 8,93 и 2,7 г/см³.

Дано

$\rho_{Cu} = 8{,}93$ г/см³ $=$
$= 8{,}93 \cdot 10^3$ кг/м³

$\rho_{Al} = 2{,}7$ г/см³ $=$
$= 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м³

$M_{Cu} = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$M_{Al} = 27 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\left(\frac{n}{n'}\right)_{Cu} = 0{,}8$

$\left(\frac{n}{n'}\right)_{Al} = 2$

$\frac{R_{Cu}}{R_{Al}}$ — ?

Решение

$$R_{Cu} = \frac{1}{en_{Cu}}, \qquad R_{Al} = \frac{1}{en_{Al}},$$

$$n_{Cu} = 0{,}8n'_{Cu}, \qquad n_{Al} = 0{,}8n'_{Al},$$

$$n'_{Cu} = \frac{N_A \rho_{Cu}}{M_{Cu}}, \qquad n'_{Al} = \frac{N_A \rho_{Al}}{M_{Al}},$$

$$\frac{R_{Cu}}{R_{Al}} = \frac{n_{Al}}{n_{Cu}} = \frac{2n'_{Al}}{0{,}8n'_{Cu}},$$

$$\frac{R_{Cu}}{R_{Al}} = \frac{2\rho_{Al} M_{Cu}}{0{,}8\rho_{Cu} M_{Al}}.$$

Ответ $\frac{R_{Cu}}{R_{Al}} = 1{,}78$.

● ●

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = R\frac{IB}{d},$$

где B — магнитная индукция; I — сила тока; d — толщина пластинки; $R = \frac{1}{en}$ — постоянная Холла (n — концентрация электронов).

3.156 Через сечение медной пластинки толщиной $d = 0{,}2$ мм пропускается ток $I = 6$ А. Пластинка помещается в однородное магнитное поле с индукцией $B = 1$ Тл, перпендикулярное ребру пластинки и направлению тока. Считая концентрацию электронов проводимости равной концентрации атомов, определите возникающую в пластинке поперечную (холловскую) разность потенциалов. Плотность меди $\rho = 8{,}93$ г/см³.

Дано

$d = 0{,}2$ мм $= 2 \cdot 10^{-4}$ м

$I = 6$ А

$B = 1$ Тл

$\rho = 8{,}93$ г/см³ $=$

$= 8930$ кг/м³

$n = n'$

$M = 63{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$\Delta\varphi$ — ?

Решение

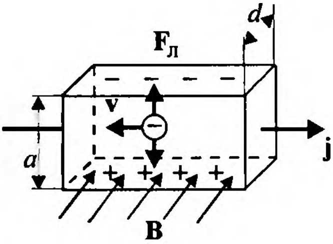
$$eE_B = e\frac{\Delta\varphi}{a} = evB,$$

$$\Delta\varphi = vBa,$$

$$I = jS = nev \cdot ad,$$

$$S = ad,$$

$$\Delta\varphi = \frac{IBa}{nead} = \frac{1}{en}\frac{IB}{d},$$



$$n = n' = \frac{N_А}{V_m} = \frac{\rho N_А}{M}, \qquad \Delta\varphi = \frac{MIB}{e\rho N_А d}.$$

Ответ $\Delta\varphi = 2{,}21$ мкВ.

3.157 Определите циркуляцию вектора магнитной индукции по окружности, через центр которой перпендикулярно ее плоскости проходит бесконечно длинный прямолинейный провод, по которому течет ток $I = 5$ А.

Дано

$I = 5$ А

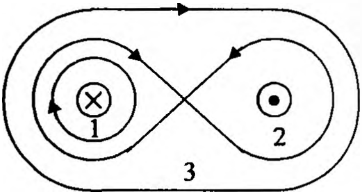
$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l}$ — ?

Решение

$$\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = \oint_L B_l\,dl = \mu_0 I.$$

Ответ $\oint_L \mathbf{B}\,d\mathbf{l} = 6{,}28$ мкТл · м.

3.158 Определите циркуляцию вектора магнитной индукции для замкнутых контуров, изображенных на рисунке, если сила тока в обоих проводниках $I = 2$ А.



Ответ

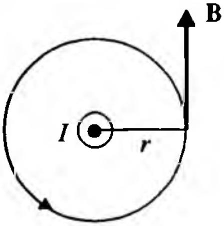
1) $\oint\limits_L \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 2{,}51$ мкТл · м;

2) $\oint\limits_L \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 5{,}02$ мкТл · м;

3) $\oint\limits_L \mathbf{B}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = 0$.

3.159 По прямому бесконечно длинному проводнику течет ток $I = 10$ А. Определите, пользуясь теоремой о циркуляции вектора $\mathbf{B}$, магнитную индукцию B в точке, расположенной на расстоянии $r = 10$ см от проводника.

Дано	Решение
$I = 10$ А $r = 10$ см $= 0{,}1$ м B — ?	$\oint\limits_L B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0 \sum\limits_i I_i$, $B_l = B$, $B \cdot 2\pi r = \mu_0 I$, $B = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$.



Ответ $B = 20$ мкТл.

3.160 Используя теорему о циркуляции вектора **B**, рассчитайте магнитную индукцию поля внутри соленоида (в вакууме), если число витков соленоида равно N и длина соленоида равна l.

3.161

Соленоид длиной $l = 0{,}5$ м содержит $N = 1000$ витков. Определите магнитную индукцию B поля внутри соленоида, если сопротивление его обмотки $R = 120$ Ом, а напряжение на ее концах $U = 60$ В.

Дано	*Решение*
$l = 0{,}5$ м $N = 1000$ $R = 120$ Ом $U = 60$ В B — ?	$\oint_L B_l\,\mathrm{d}l = \mu_0 \sum_i I_i$, $\quad Bl = \mu_0 IN$, $I = \frac{U}{R}$, $\quad B = \frac{\mu_0 UN}{Rl}$.

Ответ $B = 1{,}26$ мТл.

3.162

В соленоиде длиной $l = 0{,}4$ м и диаметром $D = 5$ см создается магнитное поле, напряженность которого $H = 1{,}5$ кА/м. Определите: 1) магнитодвижущую силу F_m; 2) разность потенциалов U на концах обмотки, если для нее используется алюминиевая проволока ($\rho = 26$ нОм · м) диаметром $d = 1$ мм.

Дано	*Решение*
$l = 0{,}4$ м $D = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $H = 1{,}5$ кА/м $= 1{,}5 \cdot 10^3$ А/м $\rho = 26$ нОм · м $=$ $= 26 \cdot 10^{-9}$ Ом · м $d = 1$ мм $= 10^{-3}$ м 1) F_m — ? 2) U — ?	$F_\mathrm{m} = \oint_L \mathbf{H}\,\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_L H_l\,\mathrm{d}l = \sum_i I_i$, $\quad F_\mathrm{m} = Hl$. $\oint_L H_l\,\mathrm{d}l = IN$, $\quad N = \frac{l}{d}$, $\quad R = \frac{\rho l_1}{S}$, $l_1 = 2\pi\frac{D}{2} \cdot N = \pi D\frac{l}{d}$, $\quad S = \frac{\pi d^2}{4}$, $R = \rho\frac{\pi Dl \cdot 4}{d\pi d^2} = \frac{4\rho Dl}{d^3}$, $\quad I = UR$, $\quad Hl = I\frac{l}{d}$.

$I = Hd$, $\quad U = \frac{4\rho DHl}{d^2}$.

Ответ 1) $F_\mathrm{m} = 600$ А; 2) $U = 3{,}12$ В.

3.163

Определите, пользуясь теоремой о циркуляции вектора **B**, индукцию и напряженность магнитного поля на оси тороида без сердечника, по обмотке которого, содержащей 200 витков, протекает ток 2 А. Внешний диаметр тороида равен 60 см, внутренний — 40 см.

Дано

$N = 200$

$I = 2$ А

$D_1 = 60$ см $= 0{,}6$ м

$D_2 = 40$ см $= 0{,}4$ м

B — ?

H — ?

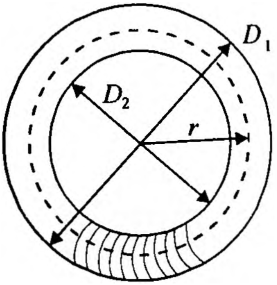
Решение

$$\oint_L B_l \, \mathrm{d}l = \mu_0 \sum_i I_i ,$$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 N I ,$$

$$B = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} ,$$

$$H = \frac{B}{\mu_0} .$$



Ответ $B = 0{,}32$ мТл; $H = 255$ А/м.

3.164

Определите магнитный поток сквозь площадь поперечного сечения катушки (без сердечника), имеющей на каждом сантиметре длины $n = 8$ витков. Радиус соленоида $r = 2$ см, сила тока в нем $I = 2$ А.

Дано

$n = 8$ см$^{-1}$ $= 800$ м$^{-1}$

$r = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м

$I = 2$ А

Φ_1 — ?

Решение

$\Phi_1 = BS$, $S = \pi r^2$,

$B = \mu_0 n I$, $\Phi_1 = \mu_0 n I \pi r^2$.

Ответ $\Phi_1 = 2{,}53$ мкВб.

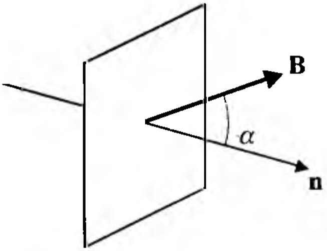
3.165 Внутри соленоида с числом витков $N = 200$ с никелевым сердечником ($\mu = 200$) напряженность однородного магнитного поля $H = 10$ кА/м. Площадь поперечного сечения сердечника $S = 10$ см². Определите: 1) магнитную индукцию поля внутри соленоида; 2) потокосцепление.

Дано	***Решение***
$N = 200$ $\mu = 200$ $H = 10$ кА/м $= 10^4$ А/м $S = 10$ см² $= 10^{-3}$ м²	$B = \mu_0 \mu H$, $\Phi = BSN$.
1) B — ? 2) Φ — ?	

Ответ 1) $B = 2{,}51$ Тл; 2) $\Phi = 0{,}502$ Вб.

3.166 В однородное магнитное поле напряженностью $H = 100$ кА/м помещена квадратная рамка со стороной $a = 10$ см. Плоскость рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha = 60°$. Определите магнитный поток, пронизывающий рамку.

Дано	***Решение***
$H = 100$ кА/м $a = 10$ см $= 0{,}1$ м $\alpha = 60°$	$\Phi = BS\cos\alpha$, $B = \mu_0 \mu H\big\|_{\mu=1} = \mu_0 H$, $S = a^2$, $\Phi = \mu_0 a^2 H \cos\alpha$.
Φ — ?	



Ответ $\Phi = 628$ мкВб.

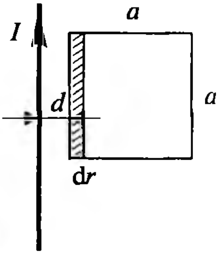
3.167 Поток магнитной индукции через площадь поперечного сечения соленоида (без сердечника) равен $\Phi = 1$ мкВб. Длина соленоида $l = 12{,}5$ см. Определите магнитный момент p_m этого соленоида.

Дано	*Решение*
$\Phi = 1$ мкВб $= 10^{-6}$ Вб $l = 12{,}5$ см $= 0{,}125$ м p_m — ?	$B = \mu_0 I \frac{N}{l}$, $\quad \Phi = BS = \mu_0 I \frac{N}{l} S$, $I = \frac{\Phi l}{\mu_0 NS}$, $\quad p_m = ISN = \frac{\Phi l}{\mu_0}$.

Ответ $p_m = 0{,}1\ \text{А} \cdot \text{м}^2$.

3.168 В одной плоскости с бесконечным прямолинейным проводом с током $I = 20$ А расположена квадратная рамка со стороной, длина которой $a = 10$ см, причем две стороны рамки параллельны проводу, а расстояние d от провода до ближайшей стороны рамки равно 5 см. Определите магнитный поток Φ, пронизывающий рамку.

Дано	*Решение*
$I = 20$ А $a = 10$ см $= 0{,}1$ м $d = 5$ см $= 0{,}05$ м Φ — ?	$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$,



$$\Phi = \int B\,dS = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} a\,dr = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \int_a^{d+a} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} \ln\frac{(d+a)}{a}.$$

Ответ $\Phi = 0{,}44$ мкВб.

3.169 Прямой провод длиной $l = 20$ см с током $I = 5$ А, находящийся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, расположен перпендикулярно линиям магнитной индукции. Определите работу сил поля, под действием которых проводник переместился на 2 см.

Ответ $A = 2$ мДж.

3.170 Квадратный проводящий контур со стороной $l = 20$ см и током $I = 10$ А свободно подвешен в однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0{,}2$ Тл. Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть контур на 180° вокруг оси, перпендикулярной направлению магнитного поля.

Дано	***Решение***	
$l = 20$ см $= 0{,}2$ м	$\mathrm{d}A = M\,\mathrm{d}\alpha$,	$\mathbf{M} = [\mathbf{p}_\mathrm{m}, \mathbf{B}]$,
$I = 10$ А	$M = p_\mathrm{m} B \sin\alpha$,	$p_\mathrm{m} = Il^2$,
$B = 0{,}2$ Тл		
$\alpha = 180°$		
A — ?	$A = \int_0^\pi M\,\mathrm{d}\alpha = \int_0^\pi IBl^2 \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = -IBl^2 \cos\alpha\Big\vert_0^\pi = 2IBl^2$.	

Ответ $A = 0{,}16$ Дж.

3.171 В однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 0{,}2$ Тл находится квадратный проводящий контур со стороной $l = 20$ см и током $I = 10$ А. Плоскость квадрата составляет с направлением поля угол в 30°. Определите работу удаления контура за пределы поля.

Ответ $A = 0{,}04$ Дж.

3.172 Круговой проводящий контур радиусом $r = 5$ см и током $I = 1$ А находится в магнитном поле, причем плоскость контура перпендикулярна направлению поля. Напряженность поля равна 10 кА/м. Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы повернуть контур на 90° вокруг оси, совпадающей с диаметром контура.

Дано	*Решение*
$r = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $I = 1$ А $H = 10$ кА/м $= 10^4$ А/м $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$	$\mathrm{d}A = M\,\mathrm{d}\alpha$, $\quad M = p_{\mathrm{m}} B \sin\alpha$, $p_{\mathrm{m}} = IS$, $\quad B = \mu_0 \mu H\big\|_{\mu=1} = \mu_0 H$, $S = \pi r^2$, $A = \int\limits_0^{\pi/2} M\,\mathrm{d}\alpha = I\pi r^2 \mu_0 H \int\limits_0^{\pi/2} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \mu_0 \pi I r^2 H$.
$A - ?$	

Ответ $A = 98{,}7$ мкДж.

3.173 В однородном магнитном поле с магнитной индукцией $B = 1$ Тл находится плоская катушка из 100 витков радиусом $r = 10$ см, плоскость которой с направлением поля составляет угол $\beta = 60°$. По катушке течет ток $I = 10$ А. Определите: 1) вращающий момент, действующий на катушку; 2) работу для удаления этой катушки из магнитного поля.

Ответ 1) $M = 15{,}7$ Н · м; 2) $A = 27{,}2$ Дж.

3.174 Круглая рамка с током ($S = 15$ см^2) закреплена параллельно магнитному полю ($B = 0{,}1$ Тл), и на нее действует вращающий момент $M = 0{,}45$ мН · м. Определите силу тока, текущего по рамке.

Ответ $I = 3$ А.

3.5. Электромагнитная индукция

3.175 Соленоид диаметром $d = 4$ см, имеющий $N = 500$ витков, помещен в магнитное поле, индукция которого изменяется со скоростью 1 мТл/с. Ось соленоида составляет с вектором магнитной индукции угол $\alpha = 45°$. Определите ЭДС индукции, возникающую в соленоиде.

Дано

$d = 4\ \text{см} = 4 \cdot 10^{-2}\ \text{м}$

$N = 500$

$\dfrac{dB}{dt} = 1\ \text{мТл/с} = 10^{-3}\ \text{Тл/с}$

$\alpha = 45°$

$\mathscr{E}_i$ — ?

Решение

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \Phi = NBS\cos\alpha, \qquad S = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$|\mathscr{E}_i| = \frac{d}{dt}(NBS\cos\alpha) = N\frac{\pi d^2}{4}\frac{dB}{dt}\cos\alpha.$$

Ответ $\mathscr{E}_i = 444$ мкВ.

3.176 В магнитное поле, изменяющееся по закону $B = B_0\cos\omega t$ ($B_0 = 0{,}1$ Тл, $\omega = 4\ \text{с}^{-1}$), помещена квадратная рамка со стороной $a = 50$ см, причем нормаль к рамке образует с направлением поля угол $\alpha = 45°$. Определите ЭДС индукции, возникающую в рамке в момент времени $t = 5$ с.

Дано

$B = B_0\cos\omega t$

$B_0 = 0{,}1$ Тл

$\omega = 4\ \text{с}^{-1}$

$a = 50\ \text{см} = 0{,}5\ \text{м}$

$\alpha = 45°$

$t = 5$ с

$\mathscr{E}_i$ — ?

Решение

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \Phi = BS\cos\alpha,$$

$$S = a^2, \qquad \mathscr{E}_i = -\frac{d}{dt}(B_0 a^2\cos\omega t\cos\alpha) =$$

$$= -B_0 a^2\cos\alpha\frac{d}{dt}(\cos\omega t) = B_0 a^2\omega\cos\alpha\cdot\sin\omega t.$$

Ответ $\mathscr{E}_i = 64$ мВ.

3.177 Кольцо из алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм · м) помещено в магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Диаметр кольца $D = 30$ см, диаметр провода $d = 2$ мм. Определите скорость изменения магнитного поля, если ток в кольце $I = 1$ А.

Дано

$\rho = 26$ нОм · м = $= 2{,}6 \cdot 10^{-8}$ Ом · м

$D = 30$ см $= 0{,}3$ м

$d = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м

$I = 1$ А

$\dfrac{dB}{dt}$ — ?

Решение

$$R = \rho\frac{l}{S}, \qquad l = \pi D, \qquad S = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad \mathscr{E}_i = IR,$$

$$|\mathscr{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}(BS) = S\frac{dB}{dt} = \frac{\pi D^2}{4}\frac{dB}{dt},$$

$$\left|\frac{dB}{dt}\right| = \frac{4\mathscr{E}_i}{\pi D^2} = \frac{4IR}{\pi D^2} = \frac{16I\rho}{\pi d^2 D}.$$

Ответ $\dfrac{dB}{dt} = 0{,}11$ Тл/с.

3.178 Плоскость проволочного витка площадью $S = 100$ см² и сопротивлением $R = 5$ Ом, находящегося в однородном магнитном поле напряженностью $H = 10$ кА/м, перпендикулярна линиям магнитной индукции. При повороте витка в магнитном поле отсчет гальванометра, замкнутого на виток, составляет 12,6 мкКл. Определите угол поворота витка.

Дано

$S = 100$ см² $= 10^{-2}$ м²

$R = 5$ Ом

$H = 10$ кА/м $= 10^4$ А/м

$dQ = 12{,}6$ мкКл = $= 1{,}26 \cdot 10^{-5}$ Кл

α — ?

Решение

$$\mathscr{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad \mathscr{E}_i = \mathscr{E}, \qquad \mathscr{E} = IR = R\frac{dQ}{dt},$$

$$R\frac{dQ}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad R\,dQ = -d\Phi, \quad R\,dQ = -(\Phi_2 - \Phi_1),$$

$$\Phi_2 = \mu_0 HS\cos\alpha, \qquad \Phi_1 = \mu_0 HS,$$

$$R\,dQ = \mu_0 HS(1 - \cos\alpha), \qquad \cos\alpha = 1 - \frac{R\,dQ}{\mu_0 HS}.$$

Ответ $\alpha = 60°$.

3.179 В однородное магнитное поле с индукцией $B = 0{,}3$ Тл помещена прямоугольная рамка с подвижной стороной, длина которой $l = 15$ см. Определите ЭДС индукции, возникающей в рамке, если ее подвижная сторона перемещается перпендикулярно линиям магнитной индукции со скоростью $v = 10$ м/с.

Дано

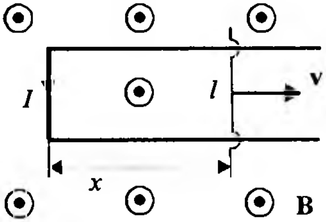
$B = 0{,}3$ Тл

$l = 15$ см $= 0{,}15$ м

$v = 10$ м/с

$\mathcal{E}_i$ — ?

Решение



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt},$$

$$\Phi = BS = Blx,$$

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d}{dt}(Blx) = -Bl\frac{dx}{dt} = -Blv, \qquad |\mathcal{E}_i| = Blv.$$

Ответ $\mathcal{E}_i = 0{,}45$ В.

3.180 Две гладкие замкнутые металлические шины, расстояние между которыми равно 30 см, со скользящей перемычкой, которая может двигаться без трения, находятся в однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}1$ Тл, перпендикулярном плоскости контура. Перемычка массой $m = 5$ г скользит вниз с постоянной скоростью $v = 0{,}5$ м/с. Определите сопротивление перемычки, пренебрегая самоиндукцией контура и сопротивлением остальной части контура.

Дано

$a = 30$ см $= 0{,}3$ м

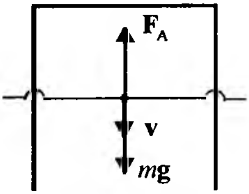
$B = 0{,}1$ Тл

$m = 5$ г $= 5 \cdot 10^{-3}$ кг

$v = 0{,}5$ м/с

R — ?

Решение



$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \qquad |\mathcal{E}_i| = \frac{\Phi_2 - \Phi_1}{t} =$$

$$= \frac{BS}{t} = \frac{Bavt}{t} = Bav, \quad \mathcal{E} = IR,$$

$$R = \frac{\mathcal{E}}{I}, \qquad mg = F_A = IBa, \qquad I = \frac{mg}{Ba},$$

$$R = \frac{BavBa}{mg} = \frac{B^2a^2v}{mg}.$$

Ответ $R = 9{,}2$ мОм.

3.181 В катушке длиной $l = 0{,}5$ м, диаметром $d = 5$ см и числом витков $N = 1500$ ток равномерно увеличивается на 0,2 А за одну секунду. На катушку надето кольцо из медной проволоки ($\rho = 17$ нОм · м) площадью сечения $S_\text{к} = 3$ мм². Определите силу тока в кольце.

Дано

$l = 0{,}5$ м

$d = 5$ см $= 0{,}05$ м

$N = 1500$

$\frac{dI}{dt} = 0{,}2$ А/с

$\rho = 17$ нОм · м $=$
$= 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом/м

$S_\text{к} = 3$ мм² $= 3 \cdot 10^{-6}$ м²

$I_\text{к}$ — ?

Решение

$$\mathscr{E}_{is} = -L\frac{dI}{dt}, \qquad L = \frac{\mu_0 \mu N^2 S}{l},$$

$$|\mathscr{E}_{is}| = \mu_0\mu \frac{N^2 \pi d^2}{4l}\frac{dI}{dt}, \qquad |\mathscr{E}_\text{к}| = \frac{\mathscr{E}_{is}}{N} = \mu_0\mu\frac{N\pi d^2}{4l}\frac{dI}{dt},$$

$$I_\text{к} = \frac{|\mathscr{E}_\text{к}|}{R}, \qquad R = \frac{\rho l_\text{к}}{S_\text{к}}, \qquad l_\text{к} = \pi d, \qquad I_\text{к} = \frac{|\mathscr{E}_\text{к}| S_\text{к}}{\pi \rho d},$$

$$I_\text{к} = \mu_0\mu\frac{N S_\text{к} d}{4l\rho}\frac{dI}{dt}.$$

Ответ $I_\text{к} = 1{,}66$ мА.

3.182 Катушка диаметром $d = 2$ см, содержащая один слой плотно прилегающих друг к другу $N = 500$ витков алюминиевого провода сечением $S = 1$ мм², помещена в магнитное поле. Ось катушки параллельна линиям индукции. Магнитная индукция поля равномерно изменяется со скоростью 1 мТл/с. Определите тепловую мощность, выделяющуюся в катушке, если ее концы замкнуты накоротко. Удельное сопротивление алюминия $\rho = 26$ нОм/м.

Дано

$d = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м

$N = 500$

$S = 1$ мм² $= 10^{-6}$ м²

$\frac{dB}{dt} = 1$ мТл/с $= 10^{-3}$ Тл/с

$\rho = 26$ нОм · м $=$
$= 26 \cdot 10^{-9}$ Ом · м

P — ?

Решение

$$|\mathscr{E}_i| = \frac{d\Phi}{dt}, \qquad \Phi = NBS, \qquad S = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad R = \rho\frac{l}{S_1},$$

$$l = \pi d N, \qquad P = \frac{\mathscr{E}_i^2}{R} = \frac{NS\left(\frac{dB}{dt}\right)^2 S_1}{\rho \pi d N} = \frac{N\pi d^3 S_1}{16\rho}\left(\frac{dB}{dt}\right)^2.$$

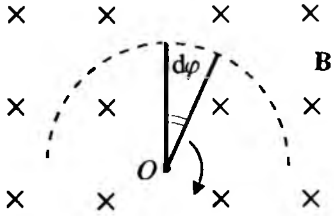
Ответ $P = 0{,}302$ мкВт.

3.183 В однородном магнитном поле ($B = 0{,}1$ Тл) вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 50$ с$^{-1}$ вокруг вертикальной оси стержень длиной $l = 0{,}4$ м. Определите ЭДС индукции, возникающей в стержне, если ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции.

Ответ $\mathscr{E}_i = 0{,}4$ В.

3.184 В однородном магнитном поле с индукцией $B = 0{,}02$ Тл равномерно вращается вокруг вертикальной оси горизонтальный стержень длиной $l = 0{,}5$ м. Ось вращения проходит через конец стержня параллельно линиям магнитной индукции. Определите число оборотов в секунду, при котором на концах стержня возникает разность потенциалов $U = 0{,}1$ В.

Дано	*Решение*
$B = 0{,}02$ Тл $l = 0{,}5$ м $U = 0{,}1$ В	$\mathscr{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$, $\Phi = BS\cos\alpha$,
n — ?	$\alpha = 0$,



$$|\mathscr{E}_i| = B\frac{dS}{dt}, \qquad d\varphi = \omega\, dt,$$

$$\left.\begin{matrix} \pi l^2 \ldots 2\pi \\ dS \ldots d\varphi \end{matrix}\right\} \quad dS = \frac{l^2}{2}d\varphi = \frac{l^2}{2}\omega\, dt,$$

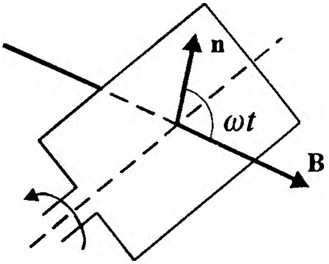
$$|\mathscr{E}_i| = U, \qquad U = B\frac{dS}{dt} = B\frac{d}{dt}\left(\frac{l^2}{2}\omega\, dt\right) = B\frac{l^2}{2}\omega,$$

$$\omega = 2\pi n = \frac{2U}{Bl^2}, \qquad n = \frac{U}{\pi B l^2}.$$

Ответ $n = 6{,}37$ с$^{-1}$.

3.185 В однородном магнитном поле ($B = 0{,}2$ Тл) равномерно с частотой $n = 600$ мин$^{-1}$ вращается рамка, содержащая $N = 1200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см^2. Ось вращения лежит в плоскости рамки и перпендикулярна линиям магнитной индукции. Определите максимальную ЭДС, индуцируемую в рамке.

Дано	*Решение*
$B = 0{,}2$ Тл	$\mathcal{E}_i = -\dfrac{d\Phi}{dt}$,
$n = 600$ мин$^{-1}$ $= 10$ с$^{-1}$	
$N = 1200$	$\Phi = NBS\cos\alpha$,
$S = 100$ см^2 $= 10^{-2}$ м^2	
$\mathcal{E}_{i_{\max}}$ — ?	$\alpha = \omega t = 2\pi n t$,



$$\mathcal{E}_i = -NBS\frac{d}{dt}(\cos 2\pi n t) = NBS\cdot 2\pi n\cdot \sin 2\pi n t, \qquad \mathcal{E}_{i_{\max}} = 2\pi n NBS.$$

Ответ $\mathcal{E}_{i_{\max}} = 151$ В.

3.186 Магнитная индукция B поля между полюсами двухполюсного генератора равна 1 Тл. Ротор имеет 140 витков (площадь каждого витка $S = 500$ см^2). Определите частоту вращения якоря, если максимальное значение ЭДС индукции равно 220 В.

Ответ $n = 5$ с$^{-1}$.

3.187 В однородном магнитном поле ($B = 0{,}2$ Тл) равномерно вращается прямоугольная рамка, содержащая $N = 200$ витков, плотно прилегающих друг к другу. Площадь рамки $S = 100$ см^2. Определите частоту вращения рамки, если максимальная ЭДС, индуцируемая в ней, $\mathcal{E}_{i_{\max}} = 12{,}6$ В.

Ответ $n = 5$ с$^{-1}$.

3.188 В однородном магнитном поле равномерно вращается прямоугольная рамка с частотой $n = 600$ мин$^{-1}$. Амплитуда индуцируемой ЭДС $\mathcal{E}_0 = 3$ В. Определите максимальный магнитный поток через рамку.

Ответ $\Phi_{max} = 47{,}7$ мВб.

3.189 Катушка длиной $l = 50$ см и диаметром $d = 5$ см содержит $N = 200$ витков. По катушке течет ток $I = 1$ А. Определите: 1) индуктивность катушки; 2) магнитный поток, пронизывающий площадь ее поперечного сечения.

Дано

$l = 50$ см $= 0{,}5$ м
$d = 5$ см $= 0{,}05$ м
$N = 200$
$I = 1$ А
$\mu = 1$

1) L — ?
2) Φ — ?

Решение

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \qquad S = \frac{\pi d^2}{4},$$

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2}{l} \frac{\pi d^2}{4}, \qquad \Phi = \frac{LI}{N}.$$

Ответ 1) $L = 197$ мкГн; 2) $\Phi = 985$ нВб.

3.190 Длинный соленоид индуктивностью $L = 4$ мГн содержит $N = 600$ витков. Площадь поперечного сечения соленоида $S = 20$ см². Определите магнитную индукцию поля внутри соленоида, если сила тока, протекающего по его обмотке, равна 6 А.

Дано

$L = 4$ мГн $= 4 \cdot 10^{-3}$ Гн
$N = 600$
$S = 20$ см$^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^2
$I = 6$ А.

B — ?

Решение

$$\Phi = LI, \qquad \Phi = NBS, \qquad B = \frac{\Phi}{NS} = \frac{LI}{NS}.$$

Ответ $B = 0{,}02$ Тл.

3.191 Две длинные катушки намотаны на общий сердечник, причем индуктивности этих катушек $L_1 = 0{,}64$ Гн и $L_2 = 0{,}04$ Гн. Определите, во сколько раз число витков первой катушки больше, чем второй.

Дано	*Решение*
$L_1 = 0{,}64$ Гн $L_2 = 0{,}04$ Гн $\frac{N_1}{N_2}$ — ?	$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l}$, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{N_1^2}{N_2^2}$, $\frac{N_1}{N_2} = \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}$.

Ответ $\frac{N_1}{N_2} = 4$.

3.192 Определите, сколько витков проволоки, вплотную прилегающих друг к другу, диаметром $d = 0{,}5$ мм с изоляцией ничтожной толщины надо намотать на картонный цилиндр диаметром $D = 1{,}5$ см, чтобы получить однослойную катушку индуктивностью $L = 100$ мкГн?

Дано	*Решение*
$d = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м $D = 1{,}5$ см $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м $L = 100$ мкГн $= 10^{-4}$ Гн $\mu = 1$ N — ?	$L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l}$, $S = \frac{\pi D^2}{4}$, $l = Nd$, $L = \frac{\mu_0\mu N\pi D^2}{4d}$, $N = \frac{4dL}{\mu_0\mu\pi D^2}$.

Ответ $N = 225$.

3.193 Определите индуктивность соленоида длиной l и сопротивлением R, если обмоткой соленоида является проволока массой m (принять плотность проволоки и ее удельное сопротивление соответственно за ρ и ρ').

Дано

l
R
ρ
ρ'
m

L — ?

Решение

$$L=\mu_0\mu\frac{N^2S}{l}\bigg|_{\mu=1}=\mu_0\frac{N^2S}{l},$$

$$\left.\begin{array}{l} l'=2\pi rN\\ S=\pi r^2\end{array}\right\}\quad S=\frac{\pi(l')^2}{(2\pi N)^2},\quad \left.\begin{array}{l}R=\dfrac{\rho' l'}{S'}\\ m=\rho l'S'\end{array}\right\},\quad S'=\frac{\rho' l'}{R},$$

$$l'=\sqrt{\frac{mR}{\rho\rho'}},\quad L=\mu_0\frac{N^2}{l}\frac{\pi(l')^2}{(2\pi N)^2}=\frac{\mu_0}{4\pi l}\frac{mR}{\rho\rho'}.$$

Ответ $L=\dfrac{\mu_0}{4\pi l}\dfrac{mR}{\rho\rho'}$.

3.194 Сверхпроводящий соленоид длиной $l=10$ см и площадью поперечного сечения $S=3$ см², содержащий $N=1000$ витков, может быть подключен к источнику ЭДС $\mathcal{E}=12$ В. Определите силу тока через 0,01 с после замыкания ключа.

Дано

$l=10$ см $=0{,}1$ м
$S=3$ см² $=3\cdot10^{-4}$ м²
$N=1000$
$\mathcal{E}=12$ В
$t=0{,}01$ с

I — ?

Решение

$$L=\mu_0\mu\frac{N^2S}{l}\bigg|_{\mu=1}=\mu_0\frac{N^2S}{l},\qquad \mathcal{E}+\mathcal{E}_s=IR,$$

$$R=0,\qquad \mathcal{E}_s=-\mathcal{E}=-L\frac{dI}{dt},\qquad \mathcal{E}=L\frac{dI}{dt},$$

$$dI=\frac{\mathcal{E}}{L}dt,\qquad I=\int_0^t\frac{\mathcal{E}}{L}dt=\frac{\mathcal{E}}{L}t,\qquad I=\frac{\mathcal{E}lt}{\mu_0N^2S}.$$

Ответ $I=31{,}8$ А.

3.195 Через катушку, индуктивность L которой равна 200 мГн, протекает ток, изменяющийся по закону $I = 2\cos 3t$. Определите: 1) закон изменения ЭДС самоиндукции; 2) максимальное значение ЭДС самоиндукции.

Ответ $\mathscr{E}_s = 1{,}2\sin 3t$, В; $\mathscr{E}_{s_{\max}} = 1{,}2$ В.

3.196 В соленоиде без сердечника, содержащем $N = 1000$ витков, при увеличении силы тока магнитный поток увеличился на 1 мВб. Определите среднюю ЭДС самоиндукции $\langle \mathscr{E}_s \rangle$, возникающую в соленоиде, если изменение силы тока произошло за 1 с.

Дано

$N = 1000$

$\Delta\Phi = 1$ мВб $= 10^{-3}$ Вб

$\Delta t = 1$ с

$\langle \mathscr{E}_s \rangle$ — ?

Решение

$$\langle \mathscr{E}_s \rangle = N\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Ответ $\langle \mathscr{E}_s \rangle = 1$ В.

3.197 Имеется катушка индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и сопротивлением $R = 0{,}8$ Ом. Определите, во сколько раз уменьшится сила тока в катушке через $t = 30$ мс, если источник тока отключить и катушку замкнуть накоротко.

Дано

$L = 0{,}1$ Гн

$R = 0{,}8$ Ом

$t = 30$ мс $= 30 \cdot 10^{-3}$ с

$\frac{I_0}{I}$ — ?

Решение

$$I = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}, \qquad \frac{I_0}{I} = \mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}$$

Ответ $\frac{I_0}{I} = 1{,}27.$

3.198 Определите, через сколько времени сила тока замыкания достигнет 0,95 предельного значения, если источник тока замыкают на катушку сопротивлением $R = 12$ Ом и индуктивностью 0,5 Гн.

Ответ $t = 125$ мс.

3.199 Катушку индуктивностью $L = 0{,}6$ Гн подключают к источнику тока. Определите сопротивление катушки, если за время $t = 3$ с сила тока через катушку достигает 80% предельного значения.

Дано	*Решение*
$L = 0{,}6$ Гн $t = 3$ с $I = 80\% I_0$ R — ?	$I = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$, $\quad 0{,}8 I_0 = I_0\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right)$, $0{,}8 = 1 - e^{-\frac{R}{L}t}$, $\quad 0{,}2 = e^{-\frac{R}{L}t}$, $-\frac{R}{L}t = \ln 0{,}2$, $\quad R = -\frac{L \ln 0{,}2}{t}$.

Ответ $R = 322$ мОм.

3.200 Бесконечно длинный соленоид длиной $l = 0{,}8$ м имеет однослойную обмотку из алюминиевого провода массой $m = 400$ г. Определите время релаксации τ для этого соленоида. Плотность и удельное сопротивление алюминия равны соответственно $\rho = 2{,}7$ г/см^3 и $\rho' = 26$ нОм · м.

Ответ $\tau = 712$ мкс.

3.201 Соленоид диаметром $d = 3$ см имеет однослойную обмотку из плотно прилегающих друг к другу витков алюминиевого провода ($\rho = 26$ нОм · м) диаметром $d_1 = 0{,}3$ мм. По соленоиду течет ток $I_0 = 0{,}5$ А. Определите количество электричества Q, протекающее по соленоиду, если его концы закоротить.

Дано	*Решение*
$d = 3\ \text{см} = 3\cdot10^{-2}\ \text{м}$ $\rho = 26\ \text{нОм}\cdot\text{м} =$ $= 2{,}6\cdot10^{-8}\ \text{Ом}\cdot\text{м}$ $d_1 = 0{,}3\ \text{мм} = 3\cdot10^{-4}\ \text{м}$ $I_0 = 0{,}5\ \text{А}$ Q — ?	$I = I_0\,\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}$, $Q = \int\limits_0^\infty I\,\mathrm{d}t = I_0\int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\,\mathrm{d}t = \frac{L}{R}I_0$, $L = \mu_0\mu\frac{N^2S}{l}\Big\vert_{\mu=1} = \frac{\mu_0N^2S}{l}$,

$$l = Nd_1, \qquad S = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad L = \frac{\mu_0N^2\pi d^2}{4Nd_1} = \frac{\mu_0N\pi d^2}{4d_1},$$

$$R = \rho\frac{l_1}{S_1}, \qquad l_1 = \pi dN, \qquad S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4},$$

$$R = \rho\frac{4dN}{d_1^2}, \qquad Q = \frac{\mu_0N\pi d^2d_1^2I_0}{4d_1\rho\cdot4dN} = \frac{\mu_0\pi dd_1}{16\rho}I_0.$$

Ответ $Q = 42{,}7$ мкКл.

● ●

Ток при размыкании и замыкании цепи

$$I = I_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau};$$

$$I = I_0(1-\mathrm{e}^{-t/\tau}),$$

где $\tau = L/R$ — время релаксации (L — индуктивность, R —сопротивление).

3.202 Катушка индуктивностью $L = 1{,}5$ Гн и сопротивлением $R_1 = 15$ Ом и резистор сопротивлением $R_2 = 150$ Ом соединены параллельно и подключены к источнику, электродвижущая сила которого $\mathcal{E} = 60$ В, через ключ K. Определите напряжение на зажимах катушки через $t_1 = 0{,}01$ с и $t_2 = 0{,}1$ с после размыкания цепи.

Дано

$L = 1{,}5$ Гн

$R_1 = 15$ Ом

$R_2 = 150$ Ом

$\mathcal{E} = 60$ В

$t_1 = 0{,}01$ с

$t_2 = 0{,}1$ с

U_1 — ?

U_2 — ?

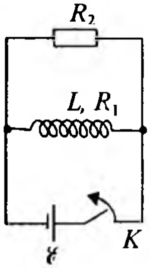
Решение

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R_1},$$

$$I = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t},$$

$$R = R_1 + R_2,$$

$$U = IR_2,$$



$$U_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} R_2\, e^{-\frac{R}{L}t_1}, \qquad U_2 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} R_2\, e^{-\frac{R}{L}t_2}.$$

Ответ $U_1 = 200$ В, $U_2 = 0{,}01$ В.

3.203 Две катушки намотаны на один общий сердечник. Определите их взаимную индуктивность, если при скорости изменения силы тока в первой катушке $\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t = 3$ А/с во второй катушке индуцируется ЭДС $\mathcal{E}_{i2} = 0{,}3$ В.

Дано

$\mathrm{d}I_1/\mathrm{d}t = 3$ А/с

$\mathcal{E}_{i2} = 0{,}3$ В

L_{12} — ?

Решение

$$L_{12} = L_{21}, \qquad \Phi_{21} = L_{21} I_1,$$

$$\mathcal{E}_{i2} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -L_{21}\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}, \qquad L_{21} = \frac{\mathcal{E}_{i2}}{\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}}.$$

Ответ $L_{12} = 0{,}1$ Гн.

3.204 Два соленоида ($L_1 = 0{,}64$ Гн, $L_2 = 1$ Гн) одинаковой длины и практически равных сечений вставлены один в другой. Определите взаимную индуктивность соленоидов.

Дано

$L_1 = 0{,}64$ Гн

$L_2 = 1$ Гн

$l_1 = l_2 = l$

$S_1 = S_2 = S$

L_{12} — ?

Решение

$$L_1 = \mu_0\mu\frac{N_1^2S_1}{l_1}, \quad L_2 = \mu_0\mu\frac{N_2^2S_2}{l_2}, \quad N_1 = \sqrt{\frac{L_1l_1}{\mu_0\mu S_1}},$$

$$N_2 = \sqrt{\frac{L_2l_2}{\mu_0\mu S_2}}, \quad L_{12} = \mu_0\mu\frac{N_1N_2S}{l} = \sqrt{L_1L_2}.$$

Ответ $L_{12} = 0{,}8$ Гн.

3.205 Две катушки намотаны на один сердечник. Индуктивность первой катушки $L_1 = 0{,}12$ Гн, второй — $L_2 = 3$ Гн. Сопротивление второй катушки $R_2 = 300$ Ом. Определите силу тока I_2 во второй катушке, если за время $\Delta t = 0{,}01$ с силу тока в первой катушке уменьшить от $I_1 = 0{,}5$ А до нуля.

Ответ $I_2 = 0{,}1$ А.

3.206 Трансформатор с коэффициентом трансформации 0,15 понижает напряжение с 220 В до 6 В. При этом сила тока во вторичной обмотке равна 6 А. Пренебрегая потерями энергии в первичной обмотке, определите сопротивление вторичной обмотки трансформатора.

Дано

$N_2/N_1 = 0{,}15$

$U_1 = 220$ В

$U_2 = 6$ В

$I_2 = 6$ А

R_2 — ?

Решение

$$\mathscr{E}_1 = U_1, \quad \frac{\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}, \quad \mathscr{E}_2 = \frac{N_2}{N_1}U_1, \quad \mathscr{E}_2 = I_2R_2 + U_2,$$

$$R_2 = \frac{\mathscr{E}_2 - U_2}{I_2}, \qquad R_2 = \frac{N_2U_1/N_1 - U_2}{I_2}.$$

Ответ $R_2 = 4{,}5$ Ом.

3.207 Автотрансформатор, понижающий напряжение с $U_1 = 6$ кВ до $U_2 = 220$ В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 2000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 1$ Ом. Сопротивление внешней цепи (в сети пониженного напряжения) $R = 12$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определите число витков во вторичной обмотке трансформатора.

Дано

$U_1 = 6$ кВ $= 6 \cdot 10^3$ В

$U_2 = 220$ В

$N_1 = 2000$

$R_2 = 1$ Ом

$R = 12$ Ом

N_2 — ?

Решение

$$U_1 = \mathcal{E}_1, \qquad \frac{\mathcal{E}_2}{\mathcal{E}_1} = \frac{N_2}{N_1}, \qquad N_2 = \frac{\mathcal{E}_2 N_1}{U_1},$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 R_2 + U_2, \qquad I_2 = \frac{U_2}{R},$$

$$N_2 = \left(\frac{U_2}{R} R_2 + U_2\right)\frac{N_1}{U_1} = \frac{U_2}{U_1} N_1 \left(\frac{R_2}{R} + 1\right).$$

Ответ $N_2 = 79.$

3.208 Трансформатор, понижающий напряжение с 220 В до 12 В, содержит в первичной обмотке $N_1 = 2000$ витков. Сопротивление вторичной обмотки $R_2 = 0{,}15$ Ом. Пренебрегая сопротивлением первичной обмотки, определите число витков во вторичной обмотке, если во внешнюю цепь (в сети пониженного напряжения) передают мощность $P = 20$ Вт.

Дано

$U_1 = 220$ В

$U_2 = 12$ В

$N_1 = 2000$

$R_2 = 0{,}15$ Ом

$P = 20$ Вт

N_2 — ?

Решение

$$N_2 = \frac{\mathcal{E}_2 N_1}{U_1}, \qquad P = I_2 U_2,$$

$$\mathcal{E}_2 = I_2 R_2 + U_2 = \frac{P R_2}{U_2} + U_2, \qquad N_2 = \left(\frac{P R_2}{U_2} + U_2\right)\frac{N_1}{U_1}.$$

Ответ $N_2 = 111.$

3.209 Сила тока I в обмотке соленоида, содержащего $N = 1500$ витков, равна 5 А. Магнитный поток Φ через поперечное сечение соленоида составляет 200 мкВб. Определите энергию магнитного поля в соленоиде.

Дано

$I = 5$ А

$N = 1500$

$\Phi = 200$ мкВб $= 2 \cdot 10^{-4}$ Вб

W — ?

Решение

$$W = \frac{LI^2}{2}, \qquad \Phi = N\Phi_1 = LI,$$

$$L = \frac{N\Phi_1}{I}, \qquad W = \frac{N\Phi_1 I}{2}.$$

Ответ $W = 0{,}75$ Дж.

3.210 Обмотка электромагнита, находясь под постоянным напряжением, имеет сопротивление $R = 15$ Ом и индуктивность $L = 0{,}3$ Гн. Определите время, за которое в обмотке выделится количество теплоты, равное энергии магнитного поля в сердечнике.

Дано

$R = 15$ Ом

$L = 0{,}3$ Гн

$Q = W$

t — ?

Решение

$$Q = W, \qquad Q = I^2Rt,$$

$$U = \text{const}, \qquad W = \frac{LI^2}{2},$$

$$\frac{LI^2}{2} = I^2Rt, \qquad t = \frac{L}{2R}.$$

Ответ $t = 0{,}01$ с.

• •

Объемная плотность энергии однородного магнитного поля длинного соленоида

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0\mu} = \frac{\mu_0\mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

3.211 Соленоид без сердечника с однослойной обмоткой из проволоки диаметром $d = 0{,}5$ мм имеет длину $l = 0{,}4$ м и поперечное сечение $S = 50$ см^2. Какой ток течет по обмотке при напряжении $U = 10$ В, если за время $t = 0{,}5$ мс в обмотке выделяется количество теплоты, равное энергии поля внутри соленоида? Поле считайте однородным.

Дано

$d = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м

$l = 0{,}4$ м

$S = 50$ см$^2 = 5 \cdot 10^{-3}$ м^2

$U = 10$ В

$t = 0{,}5$ мс $= 5 \cdot 10^{-4}$ с

$Q = W$

I — ?

Решение

$$Q = W, \qquad Q = IUt, \qquad W = \frac{B^2}{2\mu_0\mu}V\Bigg|_{\mu=1} = \frac{B^2}{2\mu_0}V,$$

$$V = Sl, \qquad l = Nd, \qquad N = \frac{l}{d},$$

$$B = \mu_0\frac{NI}{l} = \mu_0\frac{I}{d}, \qquad W = \frac{\mu_0^2 I^2 Sl}{d^2 \cdot 2\mu_0} = \frac{\mu_0 I^2 Sl}{2d^2},$$

$$IUt = \frac{\mu_0 I^2 Sl}{2d^2}, \qquad I = \frac{2Utd^2}{\mu_0 Sl}.$$

Ответ $I = 995$ мА.

3.212 Индуктивность соленоида при длине 1 м и площади поперечного сечения 20 см^2 равна 0,4 мГн. Определите силу тока в соленоиде, при которой объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида равна 0,1 Дж/м^3.

Дано

$l = 1$ м

$S = 20$ см$^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^2

$L = 0{,}4$ мГн $= 4 \cdot 10^{-4}$ Гн

$w = 0{,}1$ Дж/м^3

I — ?

Решение

$$W = \frac{1}{2}LI^2, \qquad w = \frac{W}{V},$$

$$V = Sl, \qquad w = \frac{1}{2}\frac{LI^2}{Sl},$$

$$I = \sqrt{\frac{2wSl}{L}}.$$

Ответ $I = 1$ А.

3.213 Объемная плотность энергии магнитного поля внутри соленоида длиной 50 см и малого диаметра равна 0,7 Дж/м³. Определите магнитодвижущую силу этого соленоида.

Дано

$w = 0{,}7$ Дж/м³

$l = 50$ см $= 0{,}5$ м

F_{m} — ?

Решение

$$w = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}, \qquad H = \sqrt{\frac{2w}{\mu_0 \mu}},$$

$$F_{\text{m}} = \oint_L H_l \, dl, \qquad H_l = H,$$

$$F_m = Hl = \sqrt{\frac{2w}{\mu_0 \mu}} \cdot l \Bigg|_{\mu=1} = l\sqrt{\frac{2w}{\mu_0}}.$$

Ответ $F_{\text{m}} = 528$ А.

3.214 Тороид с воздушным сердечником содержит 20 витков на 1 см. Определите объемную плотность энергии в тороиде, если по его обмотке протекает ток 3 А.

Дано

$\frac{N}{l} = 20$ см$^{-1}$ $= 2 \cdot 10^3$ м$^{-1}$

$I = 3$ А

w — ?

Решение

$$w = \frac{W}{V}, \qquad W = \frac{B^2}{2\mu_0 \mu}\Bigg|_{\mu=1} = \frac{B^2}{2\mu_0},$$

$$\oint_L B_l \, dl = \mu_0 N I, \qquad Bl = \mu_0 N I,$$

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I, \qquad w = \frac{\mu_0^2 N^2 I^2}{l^2 2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{N}{l}\right)^2 I^2.$$

Ответ $w = 22{,}6$ Дж/м³.

3.6. Магнитные свойства вещества

3.215 Докажите, что отношение числового значения орбитального магнитного момента p_m электрона к числовому значению его орбитального механического момента L_l (гиромагнитное отношение орбитальных моментов) одинаково для любой орбиты, по которой движется электрон.

Ответ $g = \dfrac{e}{2m}$.

3.216 Принимая, что электрон в невозбужденном атоме водорода движется по круговой орбите радиусом $r = 52{,}8$ пм, определите: 1) магнитный момент p_m эквивалентного кругового тока; 2) орбитальный механический момент L_l электрона; 3) исходя из полученных числовых значений, гиромагнитное отношение орбитальных моментов, доказав, что оно совпадает со значением, определяемым универсальными постоянными.

Дано

$n = 1$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$r = 52{,}8$ пм $= 52{,}8 \cdot 10^{-11}$ м

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

1) p_m — ?

2) L_l — ?

3) g — ?

Решение

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 mr}},$$

$$p_m = IS, \qquad I = \frac{e}{T},$$

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \qquad S = \pi r^2, \qquad p_m = \frac{evr}{2} = \frac{e^2}{4}\sqrt{\frac{r}{\pi\varepsilon_0 m}},$$

$$L_l = mvr = \frac{e}{2}\sqrt{\frac{mr}{\pi\varepsilon_0}}, \qquad g = \frac{p_m}{L_e} = \frac{e}{2m}.$$

Ответ 1) $p_m = 9{,}25 \cdot 10^{-24}$ А · м^2;

2) $L_e = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ кг · м^2/с;

3) $g = 87{,}8$ ГКл/кг.

3.217 В пространство между полюсами электромагнита подвешиваются поочередно висмутовый и алюминиевый стержни. Оказалось, что при включении электромагнита алюминиевый стержень располагается вдоль магнитного поля, а висмутовый — поперек магнитного поля. Объясните различие в их поведении.

3.218 В однородное магнитное поле вносится длинный вольфрамовый стержень (магнитная проницаемость вольфрама $\mu = 1{,}0176$). Определите, какая доля суммарного магнитного поля в этом стержне определяется молекулярными токами.

Дано	*Решение*
$\mu = 1{,}0176$	$B = \mu_0 \mu H$, $\quad B' = \mu_0 J$, $J = \chi H$, $\quad \chi = \mu - 1$, $B' = \mu_0(\mu - 1)H$,
$\dfrac{B'}{B}$ — ?	

$$\frac{B'}{B} = \frac{\mu_0(\mu-1)H}{\mu_0 \mu H} = \frac{\mu - 1}{\mu}.$$

Ответ $\dfrac{B'}{B} = 0{,}0173$.

3.219 Напряженность однородного магнитного поля в платине равна 5 А/м. Определите магнитную индукцию поля, создаваемого молекулярными токами, если магнитная восприимчивость платины равна $3{,}6 \cdot 10^{-4}$.

Дано	*Решение*
$H = 5$ А/м $\chi = 3{,}6 \cdot 10^{-4}$	$B' = \mu_0 J$, $\quad J = \chi H$, $B' = \mu_0 \chi H$.
B' — ?	

Ответ $B' = 2{,}26$ нТл.

3.220 По круговому контуру радиусом $r = 40$ см, погруженному в жидкий кислород, течет ток $I = 1$ А. Определите намагниченность в центре этого контура. Магнитная восприимчивость жидкого кислорода $\chi = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$.

Дано

$r = 40$ см $= 0{,}4$ м
$I = 1$ А
$\chi = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$

J — ?

Решение

$$J = \chi H, \qquad H = \frac{I}{2r},$$

$$J = \frac{\chi I}{2r}.$$

Ответ $J = 4{,}25$ мА/м.

3.221 По обмотке соленоида индуктивностью $L = 3$ мГн, находящегося в диамагнитной среде, течет ток $I = 0{,}4$ А. Соленоид имеет длину $l = 45$ см, площадь поперечного сечения $S = 10$ см^2 и число витков $N = 1000$. Определите внутри соленоида: 1) магнитную индукцию; 2) намагниченность.

Дано

$L = 3$ мГн $= 3 \cdot 10^{-3}$ Гн
$I = 0{,}4$ А
$l = 45$ см $= 0{,}45$ м
$S = 10$ см$^2 = 10^{-3}$ м^2
$N = 1000$

B — ?
J — ?

Решение

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}, \qquad \mu = \frac{Ll}{N^2 S \mu_0},$$

$$H = \frac{NI}{l}, \qquad B = \mu_0 \mu H,$$

$$B = \frac{Ll}{N^2 S} \frac{NI}{l} = \frac{LI}{NS}, \qquad \chi = \mu - 1,$$

$$J = \chi H = (\mu - 1) H = \left(\frac{Ll}{N^2 S \mu_0} - 1 \right) \frac{NI}{l}.$$

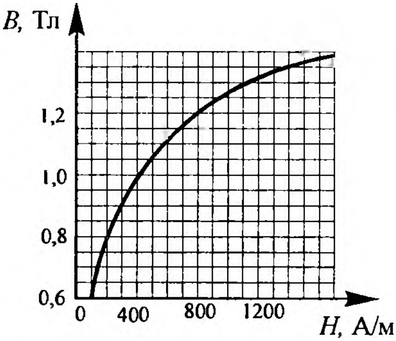
Ответ $B = 1{,}2$ мТл, $J = 66$ А/м.

3.222 Соленоид, находящийся в диамагнитной среде, имеет длину $l = 30$ см, площадь поперечного сечения $S = 15$ см^2 и число витков $N = 500$. Индуктивность соленоида $L = 1{,}5$ мГн, а сила тока, протекающего по нему, $I = 1$ А. Определите: 1) магнитную индукцию внутри соленоида; 2) намагниченность внутри соленоида.

Ответ 1) $B = 2$ мТл; 2) $J = 75$ А/м.

3.223 Индукция магнитного поля в железном стержне $B = 1{,}2$ Тл. Определите для него намагниченность, если зависимость $B(H)$ для данного сорта ферромагнетика представлена на рисунке.

Дано	*Решение*
$B = 1{,}2$ Тл $B(H)$ J —?	



$B = 1{,}2$ Тл,

$H = 800$ А/м (см. рисунок),

$$J = \chi H = (\mu - 1)H = \left(\frac{B}{\mu_0 H} - 1\right)H.$$

Ответ $J = 954$ кА/м.

3.224 Железный сердечник длиной $l = 0{,}5$ м малого сечения ($d << l$) содержит 400 витков. Определите магнитную проницаемость железа при силе тока $I = 1$ А. Используйте график из задачи 3.223.

Ответ $\mu = 1{,}19 \cdot 10^3$.

3.225 По обмотке соленоида, в который вставлен железный сердечник (график зависимости индукции магнитного поля от напряженности представлен в задаче 3.223), течет ток $I = 4$ А. Соленоид имеет длину $l = 1$ м, площадь поперечного сечения $S = 20$ см^2 и число витков $N = 400$. Определите энергию магнитного поля соленоида.

Дано	*Решение*
$I = 4$ А $l = 1$ м $S = 20$ см$^2 = 2 \cdot 10^{-3}$ м^2 $N = 400$ W — ?	$H = \dfrac{NI}{l}$, $w = \dfrac{BH}{2}$, $W = wV = \dfrac{BH}{2}Sl$.

Ответ $W = 2{,}24$ Дж.

3.226 Обмотка тороида с железным сердечником имеет $N = 151$ виток. Средний радиус r тороида составляет 3 см. Сила тока I через обмотку равна 1 А. Определите для этих условий: 1) индукцию магнитного поля внутри тороида; 2) намагниченность сердечника; 3) магнитную проницаемость сердечника. Используйте график зависимости B от H, приведенный в задаче 3.223.

Ответ 1) $B = 1{,}2$ Тл; 2) $J = 954$ кА/м; 3) $\mu = 1{,}19 \cdot 10^3$.

3.227 На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм (рисунок к задаче 3.228). При силе тока через обмотку $I = 4$ А магнитная индукция в прорези $B_0 = 1{,}5$ Тл. Пренебрегая рассеянием поля на краях прорези, определите магнитную проницаемость железа для данных условий.

Ответ $\mu = 428$.

3.228 На железном сердечнике в виде тора со средним диаметром $d = 70$ мм намотана обмотка с общим числом витков $N = 600$. В сердечнике сделана узкая поперечная прорезь шириной $b = 1{,}5$ мм. Магнитная проницаемость железа для данных условий $\mu = 500$. Определите при силе тока через обмотку $I = 4$ А: 1) напряженность H магнитного поля в железе; 2) напряженность H_0 магнитного поля в прорези.

Дано

$d = 70$ мм $= 7 \cdot 10^{-2}$ м

$N = 600$

$b = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$\mu = 500$

$I = 4$ А

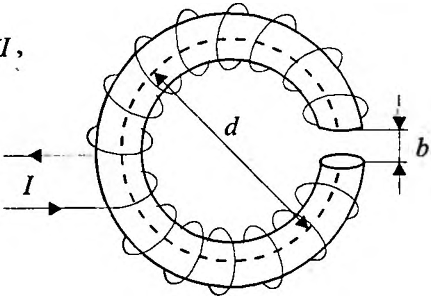
1) H — ?

2) H_0 — ?

Решение

$$\oint_L H_l \, \mathrm{d}l = NI ,$$

$$H_l = H ,$$



$$H(\pi d - b) + H_0 b = NI , \qquad B = B_0 , \qquad B = \mu_0 \mu H ,$$

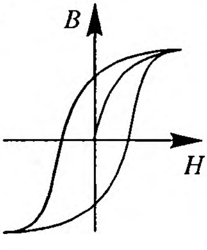
$$B_0 = \mu_0 H_0 , \quad \mu_0 \mu H = \mu_0 H_0 , \qquad H_0 = \mu H , \qquad (\pi d - b)H + b\mu H = NI ,$$

$$H = \frac{NI}{(\pi d - b) + \mu b} , \qquad H_0 = \frac{\mu NI}{(\pi d - b) + \mu b} .$$

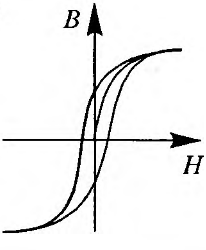
Ответ 1) $H = 2{,}48$ кА/м; 2) $H_0 = 1{,}24$ МА/м.

3.229 На рисунке качественно представлены гистерезисные петли для двух ферромагнетиков. Объясните, какой из приведенных ферромагнетиков применяется для изготовления сердечников трансформаторов и какой — для изготовления постоянных магнитов.

а)



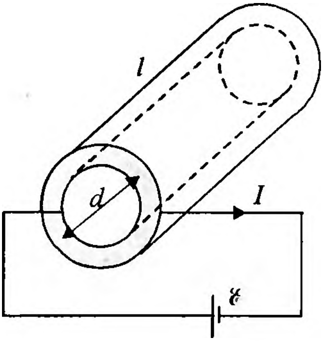
б)



3.7. Основы теории Максвелла для электромагнитного поля

3.230 Длинный цилиндрический конденсатор заряжается от источника ЭДС. Пренебрегая краевыми эффектами, докажите, что ток смещения в диэлектрике, заполняющем пространство между обкладками конденсатора, равен току в цепи источника ЭДС.

Дано	Решение
$l \gg d$ $\mathscr{E} = U$ ε	$I_{\text{см}} = \int\limits_S j_{\text{см}}\, \mathrm{d}S$,
$(I_{\text{см}} = I)$ — ?	$\oint\limits_S D_n\, \mathrm{d}S = Q$,



$D_n = D$, $\qquad 2\pi r l D = \tau l$,

$D = \dfrac{\tau}{2\pi r}$, $\qquad \tau = \dfrac{Q}{l}$,

$D = \dfrac{Q}{2\pi r l}$, $\qquad \dfrac{\partial D}{\partial t} = \dfrac{1}{2\pi r l}\dfrac{\partial Q}{\partial t}$,

$$I_{\text{см}} = \int\limits_S \frac{1}{2\pi r l}\frac{\partial Q}{\partial t}\,\mathrm{d}S = \frac{1}{2\pi r l}\frac{\partial Q}{\partial t}\int\limits_S \mathrm{d}S = \frac{S}{2\pi r l}\frac{\partial Q}{\partial t},$$

$\dfrac{\partial Q}{\partial t} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$, $\qquad S = 2\pi r l$, $\qquad I_{\text{см}} = \dfrac{2\pi r l}{2\pi r l}\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = I$.

Ответ $I_{\text{см}} = I$.

3.231 Запишите полную систему уравнений Максвелла в интегральной и дифференциальной формах и объясните физический смысл каждого из уравнений. Зачем вообще необходима дифференциальная форма уравнений?

3.232 Запишите полную систему уравнений Максвелла для стационарных полей ($\mathbf{E} = \text{const}$ и $\mathbf{B} = \text{const}$) в интегральной и дифференциальной формах и объясните физический смысл каждого из уравнений.

3.233 Запишите уравнения Максвелла через поток вектора электрического смещения Φ_D, поток вектора магнитной индукции Φ_B, заряд Q и силу тока I.

3.234 Докажите с помощью одного из уравнений Максвелла, что переменное во времени магнитное поле не может существовать без электрического поля.

Дано	*Решение*
$\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$ $\operatorname{rot}\mathbf{E}$ — ?	$\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, $\quad \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$, $\quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \neq 0$, $\quad \operatorname{rot}\mathbf{E} \neq 0$.

Ответ Есть вихревое электрическое поле.

3.235 Докажите, что уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\partial\mathbf{B}/\partial t$ и $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ совместимы, т. е. первое из них не противоречит второму.

Дано	*Решение*
1) $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 2) $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ Совместимы 1) и 2) — ?	1) $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = \operatorname{div}\left(-\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) = -\dfrac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div}\mathbf{B})$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$; $\qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = \text{const}$, 2) $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$; $\qquad$ 1) $\operatorname{div}\mathbf{B} = \text{const}$.

Ответ 1) и 2) совместимы.

3.236 Ток, проходящий по обмотке длинного прямого соленоида радиусом R, изменяют так, что магнитное поле внутри соленоида растет со временем по закону $B = At^2$, где A — некоторая постоянная. Определите плотность тока смещения как функцию расстояния r от оси соленоида. Постройте график зависимости $j_{\text{см}}(r)$.

Дано

R

$B = At^2$

$A = \text{const}$

$j_{\text{см}}(r)$ — ?

Решение

$$j_{\text{см}} = \frac{\partial D}{\partial t},$$

$$\oint\limits_L \mathbf{E}\,d\mathbf{l} = -\int\limits_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\,d\mathbf{S},$$

$$B = At^2, \qquad \frac{\partial B}{\partial t} = 2At;$$

$$r < R, \qquad 2\pi r E = \pi r^2 \cdot 2At, \qquad E = Atr, \qquad j_{\text{см}} = -\varepsilon_0 Ar;$$

$$r > R, \qquad 2\pi r E = \pi R^2 \cdot 2At, \qquad E = \frac{R^2 At}{r}, \qquad j_{\text{см}} = \frac{\varepsilon_0 AR^2}{r};$$

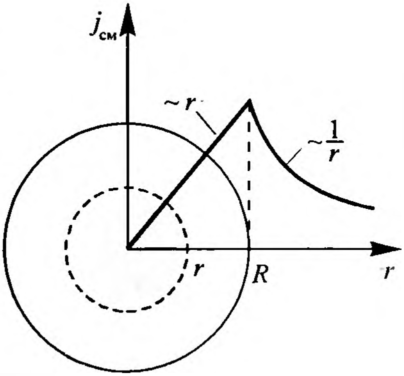
$$r = R, \qquad E = AtR, \qquad j_{\text{см}} = \varepsilon_0 AR.$$

Ответ

$j_{\text{см}} = -\varepsilon_0 Ar \ (r < R);$

$j_{\text{см}} = \dfrac{\varepsilon_0 AR^2}{r} \ (r > R);$

$j_{\text{см}} = \varepsilon_0 AR \ (r = R).$



3.237 В физике известно так называемое уравнение непрерывности $\oint_S \mathbf{j}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$, выражающее закон сохранения заряда. Докажите, что уравнения Максвелла содержат это уравнение. Выведите дифференциальную форму уравнения непрерывности.

Дано	*Решение*
$\oint_S \mathbf{j}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$ Вывести из уравнений Максвелла, записать дифференциальную форму уравнения непрерывности.	$\oint_L H_l\,\mathrm{d}l = \int_S \left(j + \frac{\partial D}{\partial t} \right)_n \mathrm{d}S$ (S — любая поверхность, опирающаяся на замкнутый контур L), $\int_S j_n\,\mathrm{d}S = \oint_L H_l\,\mathrm{d}l - \int_S \frac{\partial D}{\partial t}\,\mathrm{d}S$. Рассмотрим бесконечно малый контур, стянув его в точку, а поверхность оставим конечной. Тогда $\oint_L H_l\,\mathrm{d}l = 0$.

Поверхность замкнута, поэтому можем записать: $\oint_S j_n\,\mathrm{d}S = -\oint_S \frac{\partial D_n}{\partial t}\,\mathrm{d}S$.

Используем III уравнение Максвелла и продифференцируем его по времени:

$$\oint_S D_n\,\mathrm{d}S = \int_V \rho\,\mathrm{d}V, \qquad \oint_S \frac{\partial D_n}{\partial t}\,\mathrm{d}S = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\,\mathrm{d}V \right), \qquad \oint_S j_n\,\mathrm{d}S = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \rho\,\mathrm{d}V \right).$$

$\oint_S \mathbf{j}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = -\frac{\partial Q}{\partial t}$ — *уравнение непрерывности в интегральной форме.*

$$\lim_{V\to 0} \frac{\oint_S j_n\,\mathrm{d}S}{V} = -\lim_{V\to 0} \frac{\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V}{V}.$$

Ответ $\operatorname{div}\mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$.

3.238 Определите силу тока смещения между квадратными пластинами конденсатора со стороной 5 см, если напряженность электрического поля изменяется со скоростью 4,52 МВ/(м · с).

Ответ $I_{\text{см}} = 0{,}1$ мкА.

4. Колебания и волны

4.1. Механические и электромагнитные колебания

4.1 Гармонические колебания величины s описываются уравнением $s = 0{,}02\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) циклическую частоту; 3) частоту колебаний; 4) период колебаний.

Дано	*Решение*
$s = 0{,}02\cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$, м	$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $A = 0{,}02$ м, $\omega_0 = 6\pi$ с$^{-1}$,
1) A — ? 2) ω_0 — ? 3) ν — ? 4) T — ?	$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3$ Гц, $T = \frac{1}{\nu} = 0{,}33$ с.

Ответ 1) $A = 0{,}02$ м; 2) $\omega_0 = 6\pi$ с$^{-1}$; 3) $\nu = 3$ Гц; 4) $T = 0{,}33$ с.

4.2 Запишите уравнение гармонического колебательного движения точки, совершающей колебания с амплитудой $A = 8$ см, если за $t = 1$ мин совершается $n = 120$ колебаний и начальная фаза колебаний равна 45°.

Дано	*Решение*
$A = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м $t = 1$ мин $= 60$ с $n = 120$ $\alpha = 45°$	$T = \frac{t}{n}$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.
$x(t)$ — ?	***Ответ*** $x = 8\cos\left(4\pi t + \frac{\pi}{4}\right)$, см.

4.3 Материальная точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 4$ см и периодом $T = 2$ с. Напишите уравнение движения точки, если ее движение начинается из положения $x_0 = 2$ см.

Дано	*Решение*
$A = 4$ см $= 4 \cdot 10^{-2}$ м $T = 2$ с $x_0 = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м $x(t)$ — ?	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $t = 0$, $x_0 = A\cos\varphi$, $\cos\varphi = \dfrac{x_0}{A} = 0{,}5$, $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$, $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T} = \pi$ с$^{-1}$, $x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, м.

Ответ $x = 0{,}04\cos\left(\pi t + \dfrac{\pi}{3}\right)$, м.

4.4 Точка совершает гармонические колебания с периодом $T = 6$ с и начальной фазой, равной нулю. Определите, за какое время, считая от начала движения, точка сместится от положения равновесия на половину амплитуды.

Ответ $t = 1$ с.

4.5 Напишите уравнение гармонического колебания точки, если его амплитуда $A = 15$ см, максимальная скорость колеблющейся точки $v_{\max} = 30$ см/с, начальная фаза $\varphi = 10°$.

Дано	*Решение*
$A = 15$ см $= 0{,}15$ м $v_{\max} = 30$ см/с $= 0{,}3$ м/с $\varphi = 10°$ $x(t)$ — ?	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $v = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$, $v_{\max} = \lvert A\omega_0 \rvert$, $\omega_0 = \dfrac{v_{\max}}{A}$. **Ответ** $x = 0{,}15\cos\left(2t + \dfrac{\pi}{18}\right)$, м.

4.6 Точка совершает гармонические колебания по закону $x = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{8}\right)$, м. Определите: 1) период T колебаний; 2) максимальную скорость $\upsilon_{\max}$ точки; 3) максимальное ускорение $a_{\max}$ точки.

Ответ 1) $T = 4$ с; 2) $\upsilon_{\max} = 4{,}71$ м/с; 3) $a_{\max} = 7{,}4$ м/с^2.

4.7 Точка совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 10$ см и периодом $T = 5$ с. Определите для точки: 1) максимальную скорость; 2) максимальное ускорение.

Дано	Решение
$A = 10$ см $= 0{,}1$ м $T = 5$ с	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $\upsilon = -A\omega_0\sin(\omega_0 t + \varphi)$,
1) $\upsilon_{\max}$ — ? 2) $a_{\max}$ — ?	$a = -A\omega_0^2\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $\upsilon_{\max} = \lvert A\omega_0 \rvert$, $a_{\max} = \lvert A\omega_0^2 \rvert$.

Ответ 1) $\upsilon_{\max} = 12{,}6$ см/с;
2) $a_{\max} = 15{,}8$ см/с^2.

4.8 Скорость материальной точки, совершающей гармонические колебания, задается уравнением $\upsilon(t) = -6\sin 2\pi t$, м/с. Запишите зависимость смещения этой точки от времени.

Ответ $x(t) = \frac{3}{\pi}\cos 2\pi t$, м.

4.9 Материальная точка совершает колебания согласно уравнению $x = A\sin\omega t$. В какой-то момент времени смещение точки $x_1 = 15$ см. При возрастании фазы колебания в два раза смещение x_2 оказалось равным 24 см. Определите амплитуду A колебания.

Ответ $A = 25$ см.

4.10 Материальная точка совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м. Определите: 1) амплитуду колебаний; 2) период колебаний; 3) начальную фазу колебаний; 4) максимальную скорость точки; 5) максимальное ускорение точки; 6) через сколько времени после начала отсчета точка будет проходить через положение равновесия.

Дано

$x = 0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, м

1) A — ?
2) T — ?
3) φ — ?
4) $\upsilon_{\max}$ — ?
5) $a_{\max}$ — ?
6) t — ?

Решение

$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$, $A = 0{,}02$ м,

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$, $\omega_0 = \pi$.

$T = 2$ с, $\varphi = \frac{\pi}{2}$,

$\upsilon = -0{,}02\pi\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, $\upsilon_{\max} = 0{,}02\pi$ м/с.

$a = -0{,}02\pi^2\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, $a_{\max} = 0{,}02\pi^2$ м/с².

При $x = 0$ $0{,}02\cos\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\pi t + \frac{\pi}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$ $(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$.

$t = \frac{m\pi}{\pi} = m$.

Ответ 1) $A = 2$ см; 2) $T = 2$ с; 3) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 4) $\upsilon_{\max} = 6{,}28$ см/с; 5) $a_{\max} = 19{,}7$ см/с²; 6) $t = m$ с, где $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

4.11 Определите максимальные значения скорости и ускорения точки, совершающей гармонические колебания с амплитудой $A = 3$ см и периодом $T = 4$ с.

Ответ $\upsilon_{\max} = 4{,}71$ см/с; 2) $a_{\max} = 7{,}4$ см/с².

4.12 Материальная точка, совершающая гармонические колебания с частотой $\nu = 1$ Гц, в момент времени $t = 0$ проходит положение, определяемое координатой $x_0 = 5$ см, со скоростью $v_0 = -15$ см/с. Определите амплитуду колебаний.

Ответ $A = 5{,}54$ см.

4.13 Тело массой $m = 10$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$, м. Определите максимальные значения: 1) возвращающей силы; 2) кинетической энергии.

Дано	***Решение***	
$m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$ м	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$,	$x = 0{,}1\cos\left(4\pi t + \dfrac{\pi}{4}\right)$,
	$A = 0{,}1$ м,	$\omega = 4\pi$ с$^{-1}$,
1) $\lvert F_{max} \rvert$ — ?	$v = -A\omega_0 \sin(\omega t + \varphi)$,	$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi)$,
2) T_{max} — ?	$a_{max} = -A\omega_0^2$,	$F = ma$,

$$F_{max} = ma_{max} = -mA\omega_0^2, \qquad T = \frac{mv^2}{2}, \qquad T_{max} = \frac{mv_{max}^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Ответ 1) $|F_{max}| = 0{,}158$ Н; 2) $T_{max} = 7{,}89$ мДж.

4.14 Материальная точка массой $m = 50$ г совершает гармонические колебания согласно уравнению $x = 0{,}1\cos\dfrac{3\pi}{2}t$, м. Определите: 1) возвращающую силу F для момента времени $t = 0{,}5$ с; 2) полную энергию E точки.

Ответ 1) $F = 78{,}5$ мН; 2) $E = 5{,}55$ мДж.

4.15 Материальная точка массой $m = 20$ г совершает гармонические колебания по закону $x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$, м. Определите полную энергию E этой точки.

Дано

$m = 20$ г $= 2\cdot10^{-2}$ кг

$x = 0{,}1\cos(4\pi t + \pi/4)$, м

E — ?

Решение

$$E = T + \Pi, \qquad T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi), \qquad E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Ответ $E = 15{,}8$ мДж.

4.16 Полная энергия E гармонически колеблющейся точки равна 10 мкДж, а максимальная сила $F_{\max}$, действующая на точку, равна –0,5 мН. Напишите уравнение движения этой точки, если период T колебаний равен 4 с, а начальная фаза $\varphi = \pi/6$.

Дано

$E = 10$ мкДж $= 10^{-5}$ Дж

$F_{\max} = -0{,}5$ мН

$T = 4$ с

$\varphi = \dfrac{\pi}{6}$

$x(t)$ — ?

Решение

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}, \qquad |F_{\max}| = mA\omega_0^2,$$

$$\frac{E}{|F_{\max}|} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2mA\omega_0^2} = \frac{A}{2}, \qquad A = \frac{2E}{F_{\max}},$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \qquad x = A\cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Вычисления:

$$A = \frac{2\cdot10\cdot10^{-6}\ \text{Дж}}{0{,}5\cdot10^{-3}\ \text{Н}} = 0{,}04\ \text{м}, \qquad \omega_0 = \frac{2\pi}{4\ \text{с}} = \frac{\pi}{2}\ \text{с}^{-1}, \qquad x = 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{6}\right),\ \text{м}.$$

Ответ $x = 0{,}04\cos\left(\dfrac{\pi}{2}t + \dfrac{\pi}{6}\right)$, м.

4.17 Определите отношение кинетической энергии T точки, совершающей гармонические колебания, к ее потенциальной энергии П, если известна фаза колебания.

Дано	*Решение*
$\omega_0 t + \varphi$	$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$,
	$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$,
$\frac{T}{\Pi}$ — ?	$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = -\omega_0^2 x$.

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\Pi = -\int_0^x F\,dx = \int_0^x m\omega_0^2 x\,dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$\frac{T}{\Pi} = \frac{\sin^2(\omega_0 t + \varphi)}{\cos^2(\omega_0 t + \varphi)} = \mathrm{tg}^2(\omega_0 t + \varphi).$$

Ответ $\frac{T}{\Pi} = \mathrm{tg}^2(\omega_0 t + \varphi)$.

4.18 Определите полную энергию материальной точки массой m, колеблющейся по закону $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$.

Дано	*Решение*
$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$	$E = T + \Pi$,
E — ?	$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \varphi)$,

$$\Pi = \frac{kx^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \varphi),$$

$$E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}.$$

Ответ $E = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}$.

4.19 Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 8$ см. Определите жесткость k пружины, если известно, что максимальная кинетическая энергия $T_{\max}$ груза составляет 0,8 Дж.

Дано	*Решение*
$A = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м $T_{\max} = 0{,}8$ Дж k — ?	$E = \Pi_{\max} = T_{\max}$, $\quad \Pi = \dfrac{kx^2}{2}$, $\Pi_{\max} = \dfrac{kA^2}{2}$, $\quad k = \dfrac{2T_{\max}}{A^2}$.

Ответ $k = 250$ Н/м.

4.20 Материальная точка колеблется согласно уравнению $x = A\cos\omega t$, где $A = 5$ см и $\omega = \pi/12$ с$^{-1}$. Когда возвращающая сила F в первый раз достигает значения -12 мН, потенциальная энергия П точки оказывается равной 0,15 мДж. Определите: 1) этот момент времени t; 2) соответствующую этому моменту фазу ωt.

Дано	*Решение*
$x = A\cos\omega t$ $A = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $\omega = \pi/12$ с$^{-1}$ $F = -12$ мН $= -1{,}2 \cdot 10^{-2}$ Н $\Pi = 0{,}15$ мДж $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ Дж 1) t — ? 2) ωt — ?	$F = -kx = -Ak\cos\omega t$, $\Pi = \dfrac{kx^2}{2} = \dfrac{kA^2}{2}\cos^2\omega t$, $\dfrac{\Pi}{F} = -\dfrac{A}{2}\cos\omega t$, $t = \dfrac{1}{\omega}\arccos\left(-\dfrac{2\Pi}{AF}\right)$,

$$\omega t = \arccos\left(-\frac{2\Pi}{AF}\right).$$

Ответ 1) $t = 4$ с; 2) $\omega t = \dfrac{\pi}{3}$ рад.

4.21 Груз, подвешенный к спиральной пружине, колеблется по вертикали с амплитудой $A = 6$ см. Определите полную энергию E колебаний груза, если жесткость k пружины составляет 500 Н/м.

Ответ $E = \dfrac{kA^2}{2} = 0{,}9$ Дж.

4.22 Спиральная пружина обладает жесткостью $k = 25$ Н/м. Определите, тело какой массой m должно быть подвешено к пружине, чтобы за $t = 1$ мин совершалось 25 колебаний.

Дано	***Решение***
$k = 25$ Н/м $t = 1$ мин $= 60$ с $N = 25$ m — ?	$T = \dfrac{t}{N}$, $\quad T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $m = k\left(\dfrac{T}{2\pi}\right)^2 = \dfrac{kt^2}{4\pi^2 N^2}$.

Ответ $m = 3{,}65$ кг.

4.23 Если увеличить массу груза, подвешенного к спиральной пружине, на 600 г, то период колебаний груза возрастает в 2 раза. Определите массу первоначально подвешенного груза.

Дано	***Решение***
$\Delta m = 600$ г $= 0{,}6$ кг $T_2 = 2T_1$ m — ?	$T_1 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$, $\quad T_2 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m + \Delta m}{k}}$, $\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt{\dfrac{m + \Delta m}{m}} = 2$, $\quad 4m = m + \Delta m$, $m = \dfrac{\Delta m}{3}$.

Ответ $m = 200$ г.

4.24 При подвешивании грузов массами $m_1 = 600$ г и $m_2 = 400$ г к свободным пружинам последние удлинились одинаково ($l = 10$ см). Пренебрегая массой пружин, определите: 1) периоды колебаний грузов; 2) какой из грузов при одинаковых амплитудах обладает большей энергией и во сколько раз.

Ответ 1,2) $T_1 = T_2 = 0{,}63$ с; 3) $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{m_1}{m_2} = 1{,}5$.

4.25 На горизонтальной пружине жесткостью $k = 900$ Н/м укреплен шар массой $M = 4$ кг, лежащий на гладком столе, по которому он может скользить без трения. Пуля массой $m = 10$ г, летящая с горизонтальной скоростью $v_0 = 600$ м/с и имеющая в момент удара скорость, направленную вдоль оси пружины, попала в шар и застряла в нем. Пренебрегая массой пружины и сопротивлением воздуха, определите: 1) амплитуду колебаний шара; 2) период колебаний шара.

Дано

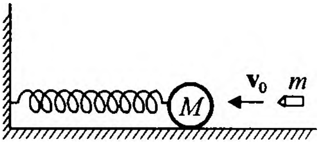
$k = 900$ Н/м
$M = 4$ кг
$m = 10$ г $= 10^{-2}$ кг
$v_0 = 600$ м/с

1) A — ?
2) T — ?

Решение

$$mv_0 = (M+m)v,$$

$$v = \frac{mv_0}{M+m},$$



$$\frac{(M+m)v^2}{2} = \frac{kA^2}{2},$$

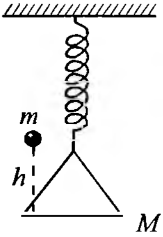
$$A = \sqrt{\frac{m^2v_0^2}{(M+m)k}} = \frac{mv_0}{\sqrt{(M+m)k}},$$

$$\frac{(M+m)A^2\omega^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{M+m}{k}}.$$

Ответ 1) $A = 10$ см; 2) $T = 0{,}419$ с.

4.26 На чашку весов массой M, подвешенную на пружине жесткостью k, с высоты h падает небольшой груз массой m. Удар груза о дно чашки является абсолютно неупругим. Чашка в результате падения груза начинает совершать колебания. Определите амплитуду A этих колебаний.

Дано	*Решение*
M k h m A — ?	$\dfrac{mv_1^2}{2} = mgh$, $v_1 = \sqrt{2gh}$, $mv_1 = (m+M)v$, $v = \dfrac{m}{m+M}\sqrt{2gh}$.



При ненагруженной чашке:

$$Mg = kl, \qquad l = \frac{Mg}{k}, \qquad \frac{1}{2}(m+M)v^2 + (M+m)g(x_0 - l) = \int_l^{x_0} kx\,\mathrm{d}x,$$

$$\frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2}{(m+M)^2}\cdot 2gh + (m+M)g(x_0 - l) = \frac{1}{2}k(x_0^2 - l^2).$$

Решаем уравнение относительно x_0:

$$x_0 = \frac{m+M}{k}g \pm \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(m+M)k}}.$$

При нагруженной чашке:

$$(m+M)g = kl', \qquad l' = \frac{(m+M)}{k}g,$$

$$A = x_0 - l' = \sqrt{\frac{m^2g^2}{k^2} + \frac{2m^2gh}{(m+M)k}}.$$

Ответ $A = \sqrt{\dfrac{m^2g^2}{k^2} + \dfrac{2m^2gh}{(m+M)k}}$.

4.27

Физический маятник представляет собой тонкий однородный стержень длиной 35 см. Определите, на каком расстоянии от центра масс должна быть точка подвеса, чтобы частота колебаний была максимальной.

Дано

$l = 35$ см $= 0{,}35$ м

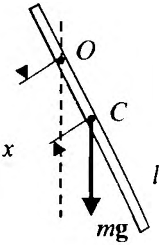
$\omega = \omega_{\max}$

x — ?

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}},$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}},$$



$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{\frac{ml^2}{12} + mx^2}} = \left(\frac{12gx}{l^2 + 12x^2}\right)^{1/2},$$

$$\frac{d\omega}{dx} = \frac{\sqrt{3g}(l^2 - 12x^2)}{\sqrt{x(l^2 + 12x^2)^3}} = 0, \qquad l^2 - 12x^2 = 0, \qquad x = \frac{l}{2\sqrt{3}}.$$

Ответ $x = 10{,}1$ см.

4.28

Однородный диск радиусом $R = 20$ см колеблется около горизонтальной оси, проходящей на расстоянии $l = 15$ см от центра диска. Определите период T колебаний диска относительно этой оси.

Дано

$R = 20$ см $= 0{,}2$ м

$l = 15$ см $= 0{,}15$ м

T — ?

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}, \qquad J = \frac{mR^2}{2} + ml^2,$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{mR^2 + 2ml^2}{2mgl}} = 2\pi\sqrt{\frac{R^2 + 2l^2}{2gl}}.$$

Ответ $T = 1{,}07$ с.

4.29 Тонкий обруч радиусом $R = 50$ см подвешен на вбитый в стену гвоздь и колеблется в плоскости, параллельной стене. Определите период T колебаний обруча.

Ответ $T = 2$ с.

4.30 Тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через верхний конец стержня. Стержень отклонили на угол $\alpha_0 = 0{,}01$ рад и в момент времени $t_0 = 0$ отпустили. Считая колебания малыми, определите период колебаний стержня и запишите функцию $\alpha(t)$.

Ответ $T = 1{,}27$ с; $\alpha(t) = 0{,}01\cos 1{,}57\pi t$ рад.

4.31 Тонкий однородный стержень длиной $l = 60$ см может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, отстоящей на расстоянии $x = 15$ см от его середины. Определите период колебаний стержня, если он совершает малые колебания.

Дано

$l = 60$ см $= 0{,}6$ м

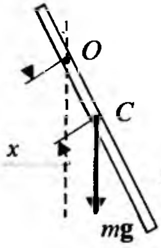
$x = 15$ см $= 0{,}15$ м

T — ?

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}},$$

$$J = \frac{ml^2}{12} + mx^2,$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + mx^2}{mgx}} = 2\pi\sqrt{\frac{l^2 + 12x^2}{12gx}}.$$

Ответ $T = 1{,}19$ с.

4.32 Маятник состоит из стержня ($l = 30$ см, $m = 50$ г), на верхнем конце которого укреплен маленький шарик (материальная точка массой $m' = 40$ г), на нижнем — шарик ($R = 5$ см, $M = 100$ г). Определите период колебания этого маятника около горизонтальной оси, проходящей через точку O в центре стержня.

Дано

$l = 30$ см $= 0{,}3$ м

$m = 50$ г $= 0{,}05$ кг

$m' = 40$ г $= 0{,}04$ кг

$R = 5$ см $= 0{,}05$ м

$M = 100$ г $= 0{,}1$ кг

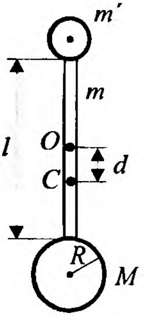
T — ?

Решение

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{m_{\text{общ}}gd}},$$

$$J = \frac{ml^2}{12} + m'\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{l}{2} + R\right)^2,$$

$$m_{\text{общ}} = m + m' + M, \qquad d = OC,$$



$$md + m'\left(\frac{l}{2} + d\right) = M\left(\frac{l}{2} - d + R\right), \qquad d = \frac{M\left(\frac{l}{2} + R\right) - m'\frac{l}{2}}{m + m' + M},$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{ml^2}{12} + m'\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\left(\frac{l}{2} + R\right)^2}{g\cdot\left[M\left(\frac{l}{2} + R\right) - m'\frac{l}{2}\right]}}.$$

Ответ $T = 1{,}24$ с.

4.33 Математический маятник, состоящий из нити длиной $l = 1$ м и свинцового шарика радиусом $r = 2$ см, совершает гармонические колебания с амплитудой $A = 6$ см. Определите: 1) скорость шарика при прохождении им положения равновесия; 2) максимальное значение возвращающей силы. Плотность свинца $\rho = 11{,}3$ г/см^3.

Ответ 1) $v_{\max} = A\sqrt{\frac{g}{l + r}} = 0{,}186$ м/с;

2) $F_{\max} = \frac{4}{3}\rho\pi r^3 A\frac{g}{l + r} = 218$ мН.

4.34 Два математических маятника имеют одинаковую массу, длину, отличающиеся в $n = 1{,}5$ раза, и колеблются с одинаковой угловой амплитудой. Определите, какой маятник обладает большей энергией и во сколько раз.

Дано

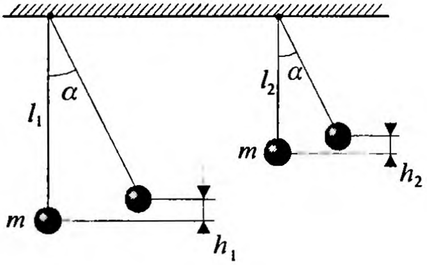
$m_1 = m_2 = m$

$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

$l_1 = 1{,}5 l_2$

$\dfrac{E_1}{E_2}$ — ?

Решение



$E = \Pi_{\max}$, $\Pi_{\max} = mgh_{\max}$, $h_{\max} = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha)$,

$E_1 = mgl_1(1-\cos\alpha)$, $E_2 = mgl_2(1-\cos\alpha)$, $\dfrac{E_1}{E_2} = \dfrac{l_1}{l_2}$.

Ответ $\dfrac{E_1}{E_2} = 1{,}5$.

4.35 Два математических маятника, длины которых отличаются на $\Delta l = 16$ см, совершают за одно и то же время один $n_1 = 10$ колебаний, другой — $n_2 = 6$ колебаний. Определите длины маятников l_1 и l_2.

Ответ $l_1 = 9$ см; $l_2 = 25$ см.

4.36 Математический маятник длиной $l = 50$ см подвешен в кабине самолета. Определите период T колебаний маятника, если самолет движется: 1) равномерно; 2) горизонтально с ускорением $a = 2{,}5$ м/с^2.

Ответ 1) 1,42 с; 2) 1,4 с.

4.37

Математический маятник длиной $l = 1$ м подвешен к потолку кабины, которая начинает опускаться вертикально вниз с ускорением $a_1 = g/4$. Спустя время $t_1 = 3$ с после начала движения кабина начинает двигаться равномерно, а затем в течение 3 с тормозится до остановки. Определите: 1) периоды T_1, T_2, T_3 гармонических колебаний маятника на каждом из участников пути; 2) период T_4 гармонических колебаний маятника при движении точки подвеса в горизонтальном направлении с ускорением $a_4 = g/4$.

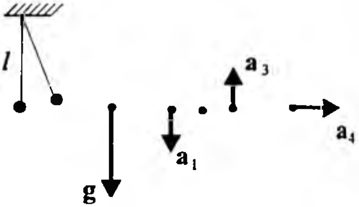
Дано

$l = 1$ м
$a_1 = g/4$
$t_1 = 3$ с
$v_2 = \text{const}$
$t_2 = 3$ с
$v_3 = 0$
$a_4 = g/4$

1) T_1, T_2, T_3 — ?
2) T_4 — ?

Решение

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g - a_1}},$$



$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

$$T_3 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g + a_3}}, \qquad a_3 = \frac{v_2 - v_3}{t_2}, \qquad v_2 = a_1 t_1,$$

$$T_4 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a_4^2}}}.$$

Ответ 1) $T_1 = 2{,}32$ с, $T_2 = 2{,}01$ с, $T_3 = 1{,}79$ с; 2) $T_4 = 1{,}97$ с.

4.38

Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 1$ мГн и конденсатора емкостью $C = 2$ нФ. Пренебрегая сопротивлением контура, определите, на какую длину волны этот контур настроен.

Дано

$L = 1$ мГн $= 10^{-3}$ Гн
$C = 2$ нФ $= 2 \cdot 10^{-9}$ Ф
$R = 0$

λ — ?

Решение

$$\lambda = cT, \qquad T = 2\pi\sqrt{LC},$$

$$\lambda = 2\pi c\sqrt{LC}.$$

Ответ $\lambda = 2{,}67$ км.

4.39 Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}2$ мГн и конденсатора площадью пластин $S = 155$ см², расстояние между которыми $d = 1{,}5$ мм. Зная, что контур резонирует на длину волны $\lambda = 630$ м, определите диэлектрическую проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами конденсатора.

Дано

$L = 0{,}2$ мГн $= 2 \cdot 10^{-4}$ Гн
$S = 155$ см² $= 1{,}55 \cdot 10^{-2}$ м²
$d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$\lambda = 630$ м

ε — ?

Решение

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \qquad T = 2\pi\sqrt{LC},$$

$$\lambda = cT = 2\pi c\sqrt{L\frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}},$$

$$\varepsilon = \left(\frac{\lambda}{2\pi c}\right)^2 \frac{d}{\varepsilon_0 LS}.$$

Ответ $\varepsilon = 6{,}11$.

4.40 Колебательный контур содержит соленоид (длина $l = 5$ см, площадь поперечного сечения $S_1 = 1{,}5$ см², число витков $N = 500$) и плоский конденсатор (расстояние между пластинами $d = 1{,}5$ мм, площадь пластин $S_2 = 100$ см²). Определите частоту ω_0 собственных колебаний контура.

Дано

$l = 5$ см $= 0{,}05$ м
$S_1 = 1{,}5$ см² $= 1{,}5 \cdot 10^{-4}$ м²
$N = 500$
$d = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м
$S_2 = 100$ см² $= 10^{-4}$ м²

ω_0 — ?

Решение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S_1}{l}\bigg|_{\mu=1} = \mu_0 \frac{N^2 S_1}{l},$$

$$C = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{S_2}{d}\bigg|_{\varepsilon=1} = \frac{\varepsilon_0 S_2}{d}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{ld}{\varepsilon_0 \mu_0 N^2 S_1 S_2}},$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}, \qquad \omega_0 = \frac{c}{N}\sqrt{\frac{ld}{S_1 S_2}}.$$

Ответ $\omega_0 = 4{,}24 \cdot 10^6$ рад/с.

4.41 Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатора емкостью $C = 39{,}5$ мкФ. Заряд конденсатора $Q_m = 3$ мкКл. Пренебрегая сопротивлением контура, запишите уравнение: 1) изменения силы тока в цепи в зависимости от времени; 2) изменения напряжения на конденсаторе в зависимости от времени.

Дано

$L = 0{,}1$ Гн

$C = 39{,}5$ мкФ $= 3{,}95 \cdot 10^{-5}$ Ф

$Q_m = 3$ мкКл $= 3 \cdot 10^{-6}$ Кл

$R = 0$

1) $I(t)$ — ?

2) $U_C(t)$ — ?

Решение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \qquad Q = Q_m \cos\omega_0 t,$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -Q_m\omega_0 \sin\omega_0 t = Q_m\,\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_C = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C}\cos\omega_0 t.$$

Ответ 1) $I = 1{,}5\cos\left(160\pi t + \frac{\pi}{2}\right)$, мА; 2) $U_C = 76\cos(160\pi t)$, мВ.

4.42 Сила тока в колебательном контуре, содержащем катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн и конденсатор, со временем изменяется согласно уравнению $I = -0{,}1\sin 200\pi t$, А. Определите: 1) период колебаний; 2) емкость конденсатора; 3) максимальное напряжение на обкладках конденсатора; 4) максимальную энергию магнитного поля; 5) максимальную энергию электрического поля.

Ответ

1) $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 10$ мс; 2) $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L} = 25{,}3$ мкФ;

3) $U_m = \frac{I_m}{\omega_0 C} = 6{,}29$ В; 4) $W_m^{\text{м}} = \frac{LI_m^2}{2} = 0{,}5$ мДж;

5) $W_m^{\text{э}} = \frac{CU_m^2}{2} = 0{,}5$ мДж.

4.43 Энергия свободных незатухающих колебаний, происходящих в колебательном контуре, составляет 0,2 мДж. При медленном раздвигании пластин конденсатора частота колебаний увеличилась в $n = 2$ раза. Определите работу, совершенную против сил электрического поля.

Дано

$W_1 = 0{,}2$ мДж $= 2 \cdot 10^{-4}$ Дж

$n = 2$

A — ?

Решение

$$\nu = \frac{1}{T}, \qquad T = 2\pi\sqrt{LC},$$

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = n, \qquad \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = \frac{\nu_2}{\nu_1} = n,$$

$$\frac{C_1}{C_2} = n^2, \qquad C_2 = \frac{C_1}{n^2}, \qquad Q = C_1\varphi_1 = C_2\varphi_2 = \text{const},$$

$$\varphi_2 = \frac{C_1}{C_2}\varphi_1 = n^2\varphi_1, \qquad W_1 = \frac{C_1\varphi_1^2}{2}, \qquad W_2 = \frac{C_2\varphi_2^2}{2} = n^2 W_1,$$

$$A = W_2 - W_1 = n^2 W_1 - W_1 = (n^2 - 1)W_1.$$

Ответ $A = 0{,}6$ мДж.

4.44 Конденсатор емкостью C зарядили до напряжения U_m и замкнули на катушку индуктивностью L. Пренебрегая сопротивлением контура, определите амплитудное значение силы тока в данном колебательном контуре.

Дано

C

U_m

L

I_m — ?

Решение

$$Q = Q_\text{m}\cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$Q_\text{m} = CU_\text{m}, \qquad I = -\omega_0 Q_\text{m}\sin(\omega_0 t + \varphi),$$

$$I_\text{m} = \omega_0 Q_\text{m} = \frac{1}{\sqrt{LC}} CU_\text{m} = U_\text{m}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Ответ $I_\text{m} = U_\text{m}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

4.45 Колебательный контур содержит катушку с общим числом витков $N = 100$ индуктивностью $L = 10$ мкГн и конденсатор емкостью $C = 1$ нФ. Максимальное напряжение U_m на обкладках конденсатора составляет 100 В. Определите максимальный магнитный поток, пронизывающий катушку.

Дано

$N = 100$

$L = 10$ мкГн $= 10^{-5}$ Гн

$C = 1$ нФ $= 10^{-9}$ Ф

$U_m = 100$ В

Φ_m — ?

Решение

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$I = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi), \qquad I_m = \omega_0 Q_m,$$

$$Q_m = U_m C, \qquad LI = N\Phi_m,$$

$$\Phi_m = \frac{LI_m}{N} = \frac{L\omega_0 Q_m}{N} = \frac{\omega_0 LCU_m}{N} = \frac{U_m}{N}\sqrt{LC}.$$

Ответ $\Phi_m = 0{,}1$ мкВб.

4.46 Два одинаково направленных гармонических колебания одинакового периода с амплитудами $A_1 = 4$ см и $A_2 = 8$ см имеют разность фаз $\varphi = 45°$. Определите амплитуду результирующего колебания.

Дано

$A_1 = 4$ см $= 4 \cdot 10^{-2}$ м

$A_2 = 8$ см $= 8 \cdot 10^{-2}$ м

$\varphi = 45°$

A – ?

Решение

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \varphi,$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi,$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos\varphi}.$$

Ответ $A = 11{,}2$ см.

4.47 Амплитуда результирующего колебания, получающегося при сложении двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты, обладающих разностью фаз 60°, равна $A = 6$ см. Определите амплитуду A_2 второго колебания, если $A_1 = 5$ см.

Ответ $A_2 = 1{,}65$ см.

4.48 Определите разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинаковой частоты и амплитуды, если амплитуда их результирующего колебания равна амплитудам складываемых колебаний.

Ответ $\varphi = 120°$.

4.49 Разность фаз двух одинаково направленных гармонических колебаний одинакового периода $T = 4$ с и одинаковой амплитуды $A = 5$ см составляет $\pi/4$. Напишите уравнение движения, получающегося в результате сложения этих колебаний, если начальная фаза одного из них равна нулю.

Дано

$T = 4$ с

$A_1 = A_2 = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м

$\Delta\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

$\varphi_1 = 0$

$x(t)$ — ?

Решение

$x_1 = A_1 \cos\omega t$,

$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$,

$$\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}, \qquad \varphi_2 = \Delta\varphi, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\varphi} = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} = 0{,}414, \qquad \varphi = \frac{\pi}{8},$$

$x = A\cos(\omega t + \varphi)$.

Ответ $x = 9{,}24\cos\left(\dfrac{\pi t}{2} + \dfrac{\pi}{8}\right)$, см.

4.50 Складываются два гармонических колебания одного направления, описываемых уравнениями $x_1 = 3\cos 2\pi t$, см и $x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$, см. Определите для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу. Запишите уравнение результирующего колебания и представьте векторную диаграмму сложения амплитуд.

Дано

$x_1 = 3\cos 2\pi t$, см

$x_2 = 3\cos(2\pi t + \pi/4)$, см

1) A — ?

2) φ — ?

3) $x(t)$ — ?

Решение

$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$,

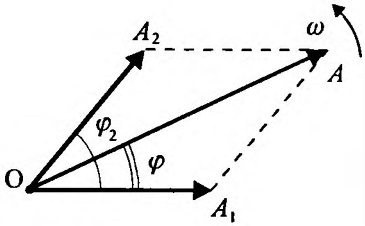
$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$,

$\omega = 2\pi$,

$A_1 = A_2 = 3$ см,

$\varphi_1 = 0$,

$\varphi_2 = \dfrac{\pi}{4}$,



$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}$, $x = A\cos(\omega t + \varphi)$,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2} = \frac{\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2},$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi} = A_1\sqrt{2(1+\cos\Delta\varphi)},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin 0 + \sin\frac{\pi}{4}}{\cos 0 + \cos\frac{\pi}{4}} = 0{,}414, \qquad \varphi = \frac{\pi}{8},$$

$$A = 3\cdot\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)} = 5{,}54 \text{ см}, \qquad x = 5{,}54\,\cos\left(2\pi t + \frac{\pi}{8}\right), \text{ см.}$$

Ответ

1) $A = 5{,}54$ см; 2) $\varphi = \dfrac{\pi}{8}$;

3) $x = 5{,}54\,\cos\left(2\pi t + \dfrac{\pi}{8}\right)$, см.

4.51

Точка одновременно участвует в n одинаково направленных гармонических колебаниях одинаковой частоты: $A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$, $A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$, ..., $A_n\cos(\omega t+\varphi_n)$. Используя метод вращающегося вектора амплитуды, определите для результирующего колебания: 1) амплитуду; 2) начальную фазу.

Дано

n

$A_1\cos(\omega t+\varphi_1)$

$A_2\cos(\omega t+\varphi_2)$

...

$A_n\cos(\omega t+\varphi_n)$

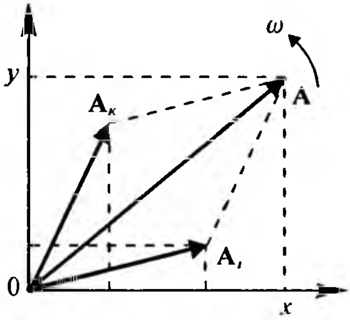
1) A — ?

2) φ — ?

Решение

$$x=\sum_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i\,,$$

$$y=\sum_{i=1}^{n}A_i\sin\varphi_i\,,$$



$$A=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sum_{i,k=1}^{n}A_iA_k\cos(\varphi_i-\varphi_k)}\,,\qquad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\sin\varphi_i}{\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\cos\varphi_i}\,.$$

4.52

Частоты колебаний двух одновременно звучащих камертонов настроены на 560 и 560,5 Гц. Определите период биений.

Дано

$\nu_1=560$ Гц

$\nu_2=560{,}5$ Гц

$T_б$ – ?

Решение

$$T_б=\frac{2\pi}{\Delta\omega}\,,\qquad \Delta\omega=2\pi\,\Delta\nu\,,$$

$$\Delta\nu=\nu_2-\nu_1\,,\qquad T_б=\frac{1}{\nu_2-\nu_1}\,.$$

Ответ $T_б=2$ с.

4.53 В результате сложения двух колебаний, период одного из которых $T_1 = 0{,}02$ с, получают биения с периодом $T_б = 0{,}2$ с. Определите период T_2 второго складываемого колебания.

Ответ $T_2 = 18{,}2$ мс.

4.54 Складываются два гармонических колебания одного направления, имеющие одинаковые амплитуды и одинаковые начальные фазы, с периодами $T_1 = 2$ с и $T_2 = 2{,}05$ с. Определите: 1) период результирующего колебания; 2) период биения.

Ответ 1) $T = 2{,}02$ с; 2) $T_б = 82$ с.

4.55 Результирующее колебание, получающееся при сложении двух гармонических колебаний одного направления, описывается уравнением вида $x = A\cos t\cos 45t$ (t — в секундах). Определите: 1) циклические частоты складываемых колебаний; 2) период биений результирующего колебания.

Дано	***Решение***
$x = A\cos t\cos 45t$ 1) ω_1 — ? ω_2 — ? 2) $T_б$ — ?	$x = x_1 + x_2$, $x = 2A\cos\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2}t\cos\left(\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2}t+\varphi\right)$,

$\dfrac{\omega_1-\omega_2}{2} = 1$, $\omega_1 - \omega_2 = 2$, $\dfrac{\omega_1+\omega_2}{2} = 45$, $\omega_1 + \omega_2 = 90$,

$2\omega_1 = 92$, $\omega_1 = 46$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 44$ с$^{-1}$,

$$T_б = \frac{2\pi}{\Delta\omega} = \frac{2\pi}{2\ \text{с}^{-1}} = 3{,}14\ \text{с}.$$

Ответ 1) $\omega_1 = 46$ с$^{-1}$, $\omega_2 = 44$ с$^{-1}$; 2) $T_б = 3{,}14$ с.

4.56 Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos\omega t$, см и $y = 4\cos\omega t$, см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

Ответ $y = \frac{4x}{3}$.

4.57 Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = 3\cos 2\omega t$, см и $y = 4\cos(2\omega t + \pi)$, см. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

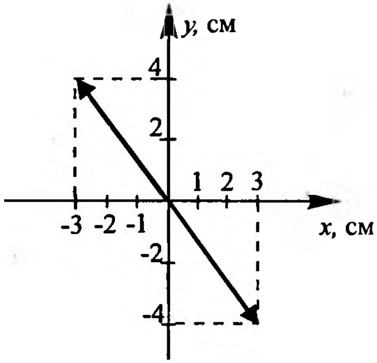
Дано	Решение
$x = 3\cos 2\omega t$, см $y = 4\cos(2\omega t + \pi)$, см $y(x)$ — ?	$y = 4\cos(2\omega t + \pi) = -4\cos 2\omega t$, $\cos 2\omega t = -\frac{y}{4}$, $\cos 2\omega t = \frac{x}{3}$, $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 0$, $y = -\frac{4}{3}x$.

$\boxed{t = 0}$ $x = 3$ см, $y = -4$ см;

$\boxed{t = \frac{T}{4}}$ $x = -3$ см, $y = 4$ см;

$\boxed{t = \frac{T}{2}}$ $x = 3$ см, $y = -4$ см;

$\boxed{t = \frac{T}{8}}$ $x = 0$ см, $y = 0$ см.



Ответ $y = -\frac{4x}{3}$.

4.58

Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin\omega t$ и $y = B\cos\omega t$, где A, B и ω — положительные постоянные. Определите уравнение траектории точки, вычертите ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории.

Дано

$x = A\sin\omega t$

$y = B\cos\omega t$

$A, B, \omega > 0$

$y(x)$ — ?

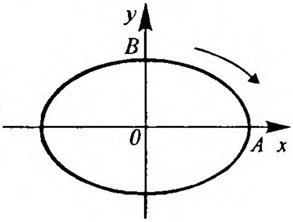
Решение

$$\frac{x}{A} = \sin\omega t, \qquad \frac{y}{B} = \cos\omega t,$$

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = \sin^2\omega t + \cos^2\omega t, \qquad \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1.$$

$\boxed{t = 0}$ $x = 0$, $y = B$.

$\boxed{t = \frac{T}{4}}$ $x = A$, $y = 0$.



Ответ $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, по часовой стрелке.

4.59

Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях одинаковой частоты, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin(\omega t + \pi/2)$ и $y = A\sin\omega t$. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба, указав направление ее движения по этой траектории.

Дано

$x = A\sin(\omega t + \pi/2)$

$y = A\sin\omega t$

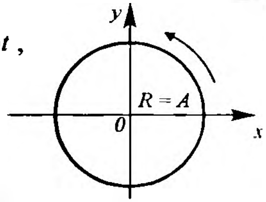
$y(x)$ — ?

Решение

$$x = A\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = A\cos\omega t,$$

$$y = A\sin\omega t,$$

$$x^2 + y^2 = A^2.$$



$\boxed{t = 0}$ $x = A$, $y = 0$;

$\boxed{t = \frac{T}{4}}$ $x = 0$, $y = A$;

$\boxed{t = \frac{T}{2}}$ $x = -A$, $y = 0$;

$\boxed{t = \frac{3T}{4}}$ $x = 0$, $y = -A$.

Ответ $x^2 + y^2 = A^2$, против часовой стрелки.

4.60 Точка участвует в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = \cos 2\pi t$ и $y = \cos \pi t$. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

Ответ $2y^2 - x = 1$.

4.61 Точка участвует одновременно в двух гармонических колебаниях, происходящих во взаимно перпендикулярных направлениях и описываемых уравнениями $x = A\sin\omega t$ и $y = A\sin 2\omega t$. Определите уравнение траектории точки и вычертите ее с нанесением масштаба.

Дано

$x = A\sin\omega t$

$y = A\sin 2\omega t$

$y(x)$ — ?

Решение

$$x = A\sin\omega t, \qquad y = A\sin 2\omega t = 2A\sin\omega t\cos\omega t,$$

$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2\cos\omega t}, \qquad \frac{x}{A} = \sin\omega t, \qquad \cos\omega t = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}},$$

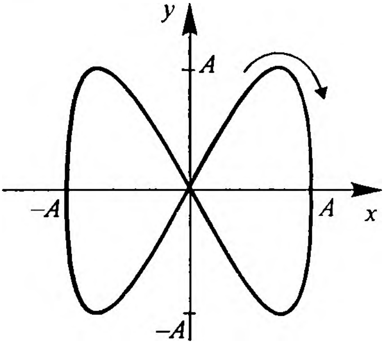
$$\frac{x}{y} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}}, \qquad \frac{x^2}{y^2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)}, \qquad y^2 = 4x^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right).$$

$\boxed{t=0}$ $x = 0$, $y = 0$;

$\boxed{t=\frac{T}{12}}$ $x = 0{,}5A$, $y = 0{,}866A$;

$\boxed{t=\frac{T}{8}}$ $x = 0{,}707A$, $y = A$;

$\boxed{t=\frac{T}{6}}$ $x = 0{,}866A$, $y = 0{,}866A$.



Ответ $y^2 = 4x^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)$.

4.62 Период затухающих колебаний $T = 1$ с, логарифмический декремент затухания $\Theta = 0{,}3$, начальная фаза равна нулю. Смещение точки при $t = 2T$ составляет 5 см. Запишите уравнение движения этого колебания.

Дано

$T = 1$ с

$\Theta = 0{,}3$

$\varphi = 0$

$t = 2T$

$x_1 = 5$ см $= 0{,}05$ м

$x(t)$ — ?

Решение

$$x = A_0\, \mathrm{e}^{-\delta t} \cos\omega t\,, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}\,, \qquad \Theta = \delta T\,,$$

$$\delta = \frac{\Theta}{T}\,, \qquad x_1 = A_0\, \mathrm{e}^{-\delta \cdot 2T} \cos\frac{2\pi}{T}\cdot 2T = A_0\, \mathrm{e}^{-2\Theta}\,,$$

$$A_0 = x_1\, \mathrm{e}^{2\Theta}\,, \qquad x = A_0\, \mathrm{e}^{-\frac{\Theta}{T}t} \cos\frac{2\pi}{T}t\,.$$

Ответ $x = 9{,}1 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}3t} \cos 2\pi t$, см.

4.63 Докажите, что для затухающих колебаний, описываемых уравнением $x(t) = A_0\, \mathrm{e}^{-\delta t} \cos\omega t$, выполняется условие $x(t + T) = x(t)\mathrm{e}^{-\delta T}$.

4.64 Амплитуда затухающих колебаний маятника за $t = 2$ мин уменьшилась в 2 раза. Определите коэффициент затухания δ.

Дано

$t = 2$ мин $= 120$ с

$\frac{A_1}{A_2} = 2$

δ — ?

Решение

$$x = A_0\, \mathrm{e}^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)\,, \qquad \frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\delta t}\,, \qquad \ln\frac{A_1}{A_2} = \delta t\,,$$

$$\delta = \frac{1}{t} \cdot \ln\frac{A_1}{A_2}\,.$$

Ответ $\delta = 5{,}78 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$.

4.65 Логарифмический декремент колебаний Θ маятника равен 0,01. Определите число N полных колебаний маятника до уменьшения его амплитуды в 3 раза.

Ответ $N = 110$.

4.66 Амплитуда затухающих колебаний математического маятника за 1 мин уменьшилась в 3 раза. Определите, во сколько раз она уменьшится за 4 мин.

Ответ $\frac{A_1}{A_3} = 81$.

4.67 Начальная амплитуда затухающих колебаний маятника $A_0 = 3$ см. По истечении $t_1 = 10$ с $A_1 = 1$ см. Определите, через сколько времени амплитуда колебаний станет равной $A_2 = 0{,}3$ см.

Ответ $t = 21$ с.

4.68 Тело массой $m = 0{,}6$ кг, подвешенное к спиральной пружине жесткостью $k = 30$ Н/м, совершает в некоторой среде упругие колебания. Логарифмический декремент колебаний $\Theta = 0{,}01$. Определите: 1) время, за которое амплитуда колебаний уменьшится в 3 раза; 2) число полных колебаний, которые должна совершить гиря, чтобы произошло подобное уменьшение амплитуды.

Дано

$m = 0{,}6$ кг

$k = 30$ Н/м

$\Theta = 0{,}01$

$\frac{A_1}{A_2} = 3$

1) t_1 — ?

2) N_1 — ?

Решение

$x = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi)$, $\quad \frac{A_1}{A_2} = \mathrm{e}^{\delta t_1}$,

$\ln\frac{A_1}{A_2} = \delta t_1$, $\quad t_1 = \frac{1}{\delta}\cdot\ln\frac{A_1}{A_2}$,

$\delta = \frac{\Theta}{T}$, $\quad T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$,

$t_1 = \frac{2\pi}{\Theta}\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\ln\frac{A_1}{A_2}$, $\quad N_1 = \frac{t_1}{T} = \frac{1}{\Theta}\ln\frac{A_1}{A_2}$.

Ответ 1) $t_1 = 97{,}6$ с; 2) $N_1 = 110$.

4.69 Докажите, что выражения для коэффициента затухания $\delta = r/(2m)$ и циклической частоты $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2} > 0$ следуют из решения дифференциального уравнения для затухающих колебаний $m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$ (m — масса тела, r — коэффициент сопротивления, k — коэффициент упругости).

Дано

$m\ddot{x} + r\dot{x} + kx = 0$

1) $\delta = \dfrac{r}{2m}$

2) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2} > 0$

Решение

1) $x = A_0\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$,

$$\dot{x} = -A_0 \delta\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) - A_0\, e^{-\delta t} \omega \sin(\omega t + \varphi),$$

$$\ddot{x} = A_0 \delta^2 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) + A_0\, e^{-\delta t} \omega \sin(\omega t + \varphi) + A_0 \delta\, e^{-\delta t} \sin(\omega t + \varphi) - A_0\, e^{-\delta t} \omega^2 \cos(\omega t + \varphi),$$

$$mA_0\, e^{-\delta t} \left[\delta^2 \cos(\omega t + \varphi) + 2\delta\omega \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 \cos(\omega t + \varphi)\right] - rA_0\, e^{-\delta t} \left[\delta \cos(\omega t + \varphi) + \omega \sin(\omega t + \varphi)\right] + kA_0\, e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi) = 0,$$

$$(m\delta^2 - m\omega^2 - r\delta + k) \cos(\omega t + \varphi) + (2m\delta - r)\omega \sin(\omega t + \varphi) = 0,$$

$$2m\delta - r = 0, \qquad \delta = \frac{r}{2m}.$$

2) $m\delta^2 - m\omega^2 - r\delta + k = 0$, $\qquad m\omega^2 = m\delta^2 - r\delta + k$,

$$\omega = \pm\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r\delta}{m} + \delta^2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{k}{m} - \delta^2}.$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad \omega > 0.$$

Ответ 1) $\delta = \dfrac{r}{2m}$; 2) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} = \sqrt{\dfrac{k}{m} - \left(\dfrac{r}{2m}\right)^2} > 0$.

4.70 При наблюдении затухающих колебаний выяснилось, что для двух последовательных колебаний амплитуда второго меньше амплитуды первого на 60%. Период затухающих колебаний $T = 0{,}5$ с. Определите: 1) коэффициент затухания δ; 2) для тех же условий частоту ν_0 незатухающих колебаний.

Дано	***Решение***
$A_2 = 0{,}4A_1$ $T = 0{,}5$ с 1) δ — ? 2) ν_0 – ?	$A_2 = 0{,}4A_1$, $\quad \Theta = \ln\frac{A_1}{A_2}$, $\Theta = \delta T$, $\quad \delta = \frac{1}{T}\ln\frac{A_1}{A_2}$,

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \delta^2},$$

$$\nu_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \left(\frac{1}{T}\ln\frac{A_1}{A_2}\right)^2} = \frac{1}{2\pi T}\sqrt{(2\pi)^2 + \left(\ln\frac{A_1}{A_2}\right)^2}.$$

Ответ 1) $\delta = 1{,}83$ с$^{-1}$; 2) $\nu_0 = 2{,}02$ Гц.

4.71 Тело массой $m = 100$ г, совершая затухающие колебания, за $\tau = 1$ мин потеряло 40% своей энергии. Определите коэффициент сопротивления r.

Дано	***Решение***
$m = 100$ г $= 0{,}1$ кг $\tau = 1$ мин $= 60$ с $E(t+\tau) = 0{,}6E(t)$ r — ?	$\delta = \frac{r}{2m}$, $\quad r = 2m\delta$, $\quad E = \frac{mA^2\omega^2}{2}$, $A = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta t}$, $\quad \frac{E(t)}{E(t+\tau)} = \frac{\mathrm{e}^{-2\delta t}}{\mathrm{e}^{-2\delta(t+\tau)}} = \mathrm{e}^{2\delta\tau}$,

$$\frac{E(t)}{E(t+\tau)} = \frac{1}{0{,}6}, \qquad \mathrm{e}^{2\delta\tau} = \frac{1}{0{,}6}, \qquad \delta = \frac{1}{2\tau}\ln\frac{1}{0{,}6}, \qquad r = \frac{2m}{2\tau}\ln\frac{1}{0{,}6} = \frac{m}{r}\ln\frac{1}{0{,}6}.$$

Ответ $r = 8{,}51\cdot10^{-4}$ кг/с.

4.72 Дифференциальное уравнение для заряда в электрическом колебательном контуре задается в виде $L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$. Найдите решение этого уравнения. Определите: 1) собственную частоту контура; 2) циклическую частоту ω; 3) коэффициент затухания δ.

Дано

$$L\frac{d^2Q}{dt^2}+R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=0$$

$Q(t)$ — ?

1) ω_0 — ?

2) ω — ?

3) δ — ?

Решение

$$\frac{d^2Q}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{LC}=0, \qquad \ddot{Q}+2\delta\dot{Q}+\omega_0^2Q=0,$$

$$\delta=\frac{R}{2L}, \qquad \omega_0^2=\frac{1}{LC}, \qquad Q=e^{-\delta t}u, \text{ где } u=u(t).$$

После нахождения производных и подстановки:

$$\ddot{u}+(\omega_0^2-\delta^2)u=0, \qquad \omega^2=\omega_0^2-\delta^2,$$

$$\ddot{u}+\omega^2u=0, \qquad u=Q_m\cos(\omega t+\varphi),$$

$$Q=Q_m\,e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi).$$

Ответ $Q=Q_m\,e^{-\delta t}\cos(\omega t+\varphi)$;

1) $\omega_0=\sqrt{\frac{1}{LC}}$; 2) $\omega=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}=\sqrt{\frac{1}{LC}-\left(\frac{R}{2L}\right)^2}$; 3) $\delta=\frac{R}{2L}$.

4.73 За время, в течение которого система совершает $N=50$ полных колебаний, амплитуда уменьшается в 2 раза. Определите добротность Q системы.

Дано

$N=50$

$A_0/A_N=2$

Q — ?

Решение

$$Q=\frac{\pi}{\Theta}, \qquad \Theta=\delta T,$$

$$A_N=A_0\,e^{-\delta t}=A_0\,e^{-\delta NT}=A_0\,e^{-\Theta N},$$

$$\frac{A_0}{A_N}=e^{\Theta N}=2, \quad \Theta N=\ln 2, \quad \Theta=\frac{\ln 2}{N}, \quad Q=\frac{\pi N}{\ln 2}.$$

Ответ $Q=227$.

4.74 Частота свободных затухающих колебаний некоторой системы $\omega = 65$ рад/с, а ее добротность $Q = 2$. Определите собственную частоту ω_0 колебаний этой системы.

Дано

$\omega = 65$ рад/с

$Q = 2$

ω_0 — ?

Решение

$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\quad \Theta = \delta T$, $\quad Q = \frac{\pi}{\Theta}$,

$\omega = \frac{2\pi}{T}$, $\quad \delta = \frac{\Theta}{T} = \frac{\pi}{QT} = \frac{\omega}{2Q}$,

$$\omega_0 = \sqrt{\omega^2 + \frac{\omega^2}{4Q^2}} = \omega\sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}.$$

Ответ $\omega_0 = 67$ рад/с.

4.75 Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью $L = 10$ мГн, конденсатора емкостью $C = 0{,}1$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 20$ Ом. Определите, через сколько полных колебаний амплитуда тока в контуре уменьшится в е раз.

Дано

$L = 10$ мГн $= 10^{-2}$ Гн

$C = 0{,}1$ мкФ $= 10^{-7}$ Ф

$R = 20$ Ом

$\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = \mathrm{e}$

N — ?

Решение

$\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = \mathrm{e}^{\delta t}$, $\quad \frac{I_{m0}}{I_{mN}} = \mathrm{e}^1$, $\quad \delta t = 1$,

$\delta = \frac{R}{2L}$, $\quad t = \frac{1}{\delta} = \frac{2L}{R}$, $\quad t = NT$,

$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$, $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$,

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}}, \qquad N = \frac{t}{T} = \frac{L}{\pi R}\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Ответ $N = 5$.

4.76 Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 25$ мГн, конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ и резистор сопротивлением $R = 1$ Ом. Конденсатор заряжен количеством электричества $Q_m = 1$ мКл. Определите: 1) период колебаний контура; 2) логарифмический декремент затухания колебаний; 3) уравнение зависимости изменения напряжения на обкладках конденсатора от времени.

Дано

$L = 25$ мГн $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ Гн
$C = 10$ мкФ $= 10^{-5}$ Ф
$R = 1$ Ом
$Q_m = 1$ мКл $= 10^{-3}$ Кл

1) T — ?
2) Θ — ?
3) $U(t)$ — ?

Решение

$$\delta = \frac{R}{2L}, \qquad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}, \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{1}{LC} - \dfrac{R^2}{4L^2}}},$$

$$\Theta = \delta T, \qquad U(t) = \frac{Q_m}{C} e^{-\delta t} \cos\omega t.$$

Ответ 1) $T = 3{,}14$ мс; 2) $\Theta = 0{,}063$;
3) $U(t) = 100\, e^{-20t} \cos 637\pi t$, В.

4.77 Определите логарифмический декремент затухания при котором энергия колебательного контура за $N = 5$ полных колебаний уменьшается в $n = 8$ раз.

Дано

$N = 5$
$\dfrac{W_0}{W_N} = n = 8$

Θ – ?

Решение

$$W = \frac{LI^2}{2}, \qquad I = \sqrt{\frac{2W}{L}}, \qquad \frac{I_0}{I_N} = \sqrt{\frac{W_0}{W_N}} = \sqrt{n},$$

$$\Theta = \delta T, \qquad \ln\frac{I_0}{I_N} = \delta N T, \qquad \ln\sqrt{n} = N\Theta,$$

$$\Theta = \frac{\ln\sqrt{n}}{N}.$$

Ответ $\Theta = 0{,}21$.

4.78 Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 6$ мкГн, конденсатор емкостью $C = 10$ нФ и резистор сопротивлением $R = 10$ Ом. Определите для случая максимума тока отношение энергии магнитного поля катушки к энергии электрического поля.

Ответ $\frac{W_{\text{м}}}{W_{\text{эл}}} = 6$.

4.79 Определите добротность Q колебательного контура, состоящего из катушки индуктивностью $L = 2$ мГн, конденсатора емкостью $C = 0{,}2$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 1$ Ом.

Ответ $Q = 100$.

4.80 Частота ν затухающих колебаний в колебательном контуре с добротностью $Q = 2500$ равна 550 кГц. Определите время, за которое амплитуда силы тока в этом контуре уменьшится в 4 раза.

Дано	*Решение*	
$\nu = 550$ кГц $= 5{,}5 \cdot 10^5$ Гц $Q = 2500$	$\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = e^{\delta t}$,	$\ln \frac{I_{m0}}{I_{mN}} = \delta t = \ln 4$,
$\frac{I_{m0}}{I_{mN}} = 4$	$t = \frac{\ln 4}{\delta}$,	$Q = \frac{\pi}{\Theta} = \frac{\pi}{\delta T} = \frac{\pi \nu}{\delta}$,
t — ?	$\delta = \frac{\pi \nu}{Q}$,	$t = \frac{Q \ln 4}{\pi \nu}$.

Ответ $t = 2$ мс.

4.81 Определите закон убывания заряда конденсатора со временем при его разряде в апериодическом режиме, т. е. когда $\delta = \omega_0$.

Ответ $Q = Q_0\, e^{-\omega_0 t}$.

4.82 Определите минимальное активное сопротивление при разрядке лейденской банки, при котором разряд будет апериодическим. Емкость C лейденской банки равна 1,2 нФ, а индуктивность проводов составляет 3 мкГн.

Дано	***Решение***
$C = 1{,}2$ нФ $= 1{,}2 \cdot 10^{-9}$ Ф $L = 3$ мкГн $= 3 \cdot 10^{6}$ Гн R — ?	$T \to \infty$, $\quad \omega \to 0$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\quad \omega_0 = \delta$, $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\quad \delta = \dfrac{R}{2L}$,

$$\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{R}{2L}, \qquad R = \frac{2L}{\sqrt{LC}} = 2\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Ответ $R = 100$ Ом.

4.83 Объясните, в чем заключается различие автоколебаний и вынужденных колебаний.

4.84 Определите резонансную частоту колебательной системы, если собственная частота колебаний $\nu_0 = 300$ Гц, а логарифмический декремент $\Theta = 0{,}2$.

Дано	***Решение***
$\nu_0 = 300$ Гц $\Theta = 0{,}2$ $\nu_{\text{рез}}$ — ?	$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, $\quad \delta = \dfrac{\Theta}{T} = \dfrac{\Theta\omega_0}{2\pi}$, $\omega_{\text{рез}} = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{\Theta^2}{2\pi^2}}$,

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{\omega_{\text{рез}}}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{2\pi^2}} = \nu_0\sqrt{1 - \frac{\Theta^2}{2\pi^2}}.$$

Ответ $\nu_{\text{рез}} = 299{,}7$ Гц.

4.85 Собственная частота ν_0 колебаний некоторой системы составляет 500 Гц. Определите частоту ν затухающих колебаний этой системы, если резонансная частота $\nu_{\text{рез}} = 499$ Гц.

Дано	*Решение*
$\nu_0 = 500$ Гц $\nu_{\text{рез}} = 499$ Гц	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\quad \omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2$, $\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$, $\quad \omega_0^2 = \omega_{\text{рез}}^2 + 2\delta^2$,
ν — ?	$\omega^2 + \delta^2 = \omega_{\text{рез}}^2 + 2\delta^2$, $\quad \delta^2 = \omega^2 - \omega_{\text{рез}}^2$,

$$\omega_0^2 = \omega^2 + \delta^2 = \omega^2 + \omega^2 - \omega_{\text{рез}}^2 = 2\omega^2 - \omega_{\text{рез}}^2, \qquad \nu_0^2 = 2\nu^2 - \nu_{\text{рез}}^2,$$

$$\nu = \sqrt{\frac{\nu_0^2 + \nu_{\text{рез}}^2}{2}}.$$

Ответ $\nu = 499{,}5$ Гц.

4.86 Период затухающих колебаний системы составляет 0,2 с, а отношение амплитуд первого и шестого колебаний равно 13. Определите резонансную частоту данной колебательной системы.

Дано	*Решение*
$T = 0{,}2$ с $\dfrac{A_1}{A_6} = 13$	$A_1 = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta T}$, $\quad A_6 = A_0\,\mathrm{e}^{-\delta\cdot 6T}$, $\quad \dfrac{A_1}{A_6} = \mathrm{e}^{5\delta T} = 13$, $5\delta T = \ln 13$, $\quad \delta = \dfrac{\ln 13}{5T}$, $\quad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$,
$\nu_{\text{рез}}$ — ?	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$, $\quad \omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $\quad \omega_0^2 = \left(\dfrac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2$,

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 + \delta^2 - 2\delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \delta^2} = \sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{\ln 13}{5T}\right)^2},$$

$$\nu_{\text{рез}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 - \left(\frac{\ln 13}{5T}\right)^2} = \frac{1}{2\pi T}\sqrt{4\pi^2 - \frac{\ln^2 13}{25}}.$$

Ответ $\nu_{\text{рез}} = 4{,}98$ Гц.

4.87 Гиря массой $m = 0{,}5$ кг, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}5$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}1\cos\omega t$, Н. Определите для данной колебательной системы: 1) коэффициент затухания δ; 2) резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$.

Дано

$m = 0{,}5$ кг

$k = 50$ Н/м

$r = 0{,}5$ кг/с

$F = 0{,}1\cos\omega t$, Н

1) δ — ?

2) $A_{\text{рез}}$ — ?

Решение

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0\cos\omega t,$$

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos\omega t, \qquad \delta = \frac{r}{2m},$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \qquad F_0 = 0{,}1\ \text{Н},$$

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\left(\frac{r}{2m}\right)\cdot m\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}} = \frac{F_0}{r\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}.$$

Ответ 1) $\delta = 0{,}5$ с$^{-1}$; 2) $A_{\text{рез}} = 2$ см.

4.88 Гиря массой $m = 400$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 40$ Н/м, опущена в масло. Коэффициент сопротивления r для этой системы составляет 0,5 кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = \cos\omega t$, Н. Определите: 1) амплитуду вынужденных колебаний, если частота вынуждающей силы вдвое меньше собственной частоты колебаний; 2) частоту вынуждающей силы, при которой амплитуда вынужденных колебаний максимальна; 3) резонансную амплитуду.

Ответ 1) $A = 3{,}3$ см; 2) $\omega_{\text{рез}} = 9{,}96$ с$^{-1}$; 3) $A_{\text{рез}} = 20$ см.

4.89 Гиря массой $m = 200$ г, подвешенная на спиральной пружине жесткостью $k = 50$ Н/м, совершает колебания в вязкой среде с коэффициентом сопротивления $r = 0{,}2$ кг/с. На верхний конец пружины действует вынуждающая сила, изменяющаяся по закону $F = 0{,}2\cos\omega t$, Н. Определите: 1) частоту ν_0 собственных колебаний; 2) резонансную частоту $\nu_{\text{рез}}$; 3) резонансную амплитуду $A_{\text{рез}}$; 4) статическое отклонение.

Ответ 1) $\nu_0 = 7{,}96$ Гц; 2) $\nu_{\text{рез}} = 7{,}88$ Гц; 3) $A_{\text{рез}} = 2$ см; 4) 4 мм.

4.90 Амплитуды двух вынужденных колебаний системы с одинаковыми собственными частотами при всех значениях частоты вынуждающей силы различаются вдвое. Определите, какой одной (и только одной) из величин (массой, коэффициентом сопротивления среды, коэффициентом упругости, амплитудой вынуждающей силы) отличаются эти системы.

Дано

$\omega_{01} = \omega_{02}$

$\frac{A_1}{A_2} = 2$

m, r, k, F_0 — ?

Решение

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

$$\delta = \frac{r}{2m}, \qquad \omega_{\text{рез}} = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{2m^2}},$$

$\frac{A_1}{A_2} = 2$ для всех ω, значит, и для $\omega_{\text{рез}}$:

$A_{\text{рез}1} = 2A_{\text{рез}2}$,

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0}{2\delta m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} = \frac{F_0}{2r\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{r^2}{4m^2}}}.$$

Должна меняться только одна из величин: ни k, ни m ($\omega_{01} = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}} = \omega_{02} = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$), ни r (r входит в $A_{\text{рез}}$ дважды в знаменателе), изменяется F_0, причем $F_{01} = 2F_{02}$.

Ответ $F_{01} = 2F_{02}$.

4.91 В цепь колебательного контура, содержащего последовательно соединенные резистор сопротивлением $R = 40$ Ом, катушку индуктивностью $L = 0{,}36$ Гн и конденсатор емкостью $C = 28$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определите: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) сдвиг φ по фазе между током и внешним напряжением.

Дано

$R = 40$ Ом
$L = 0{,}36$ Гн
$C = 28$ мкФ $= 28 \cdot 10^{-6}$ Ф
$U_m = 180$ В
$\omega = 314$ рад/с

1) I_m — ?
2) φ — ?

Решение

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \qquad U_m = I_m Z,$$

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

Вычисления:

$$I_m = \frac{180\,\text{В}}{\sqrt{40^2\,\text{Ом}^2 + \left(314\,\text{рад/с} \cdot 0{,}36\,\text{Гн} - \frac{1}{314\,\text{рад/с} \cdot 28 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф}}\right)}} = 4{,}5\,\text{А};$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{314\,\text{рад/с} \cdot 0{,}36\,\text{Гн} - \frac{1}{314\,\text{рад/с} \cdot 28 \cdot 10^{-6}\,\text{Ф}}}{40\,\text{Ом}} = -0{,}0175.$$

$\varphi = -1°$. Ток опережает напряжение.

Ответ 1) $I_m = 4{,}5$ А; 2) $\varphi = -1°$.

4.92 В цепь колебательного контура, содержащего катушку индуктивностью $L = 0{,}2$ Гн и активным сопротивлением $R = 9{,}7$ Ом, а также конденсатор емкостью $C = 40$ мкФ, подключено внешнее переменное напряжение с амплитудным значением $U_m = 180$ В и частотой $\omega = 314$ рад/с. Определите: 1) амплитудное значение силы тока I_m в цепи; 2) разность фаз φ между током и внешним напряжением; 3) амплитудное значение напряжения U_{L_m} на катушке; 4) амплитудное значение U_{C_m} на конденсаторе.

Дано

$L = 0{,}2$ Гн

$R = 9{,}7$ Ом

$C = 40$ мкФ $= 4 \cdot 10^{-5}$ Ф

$U_m = 180$ В

$\omega = 314$ рад/с

1) I_m — ?

2) φ — ?

3) U_{L_m} — ?

4) U_{C_m} — ?

Решение

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}.$$

При $C \to \infty$ $U_{L_m} = I_m \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$.

При $L \to 0$, $R \to 0$ $U_{C_m} = I_m \sqrt{\left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2} = I_m \frac{1}{\omega C}$.

Ответ 1) $I_m = 9{,}27$ А; 2) $\varphi = -60°$, ток опережает напряжение; 3) $U_{L_m} = 589$ В; 4) $U_{C_m} = 738$ В.

4.93 Последовательно соединенные резистор с сопротивлением $R = 110$ Ом и конденсатор подключены к внешнему переменному напряжению с амплитудным значением $U_m = 110$ В. Оказалось, что амплитудное значение установившегося тока в цепи $I_m = 0{,}5$ А. Определите разность фаз между током и внешним напряжением.

Ответ $\varphi = -60°$, ток опережает напряжение.

4.94 В колебательный контур, содержащий последовательно соединенные конденсатор и катушку с активным сопротивлением, подключено внешнее переменное напряжение, частоту которого можно менять, не меняя его амплитуды. При частотах внешнего напряжения $\omega_1 = 400$ рад/с и $\omega_2 = 600$ рад/с амплитуды силы тока в цепи оказались одинаковыми. Определите резонансную частоту тока.

Дано	*Решение*
$\omega_1 = 400$ рад/с $\omega_2 = 600$ рад/с $U_m = \text{const}$ $I_{m1} = I_{m2}$	$I = I_m$ при $\omega_{рез} = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $I_{m1} = \dfrac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_1 L - \dfrac{1}{\omega_1 C}\right)^2}}$,
$\omega_{рез}$ — ?	

$$I_{m2} = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \dfrac{1}{\omega_2 C}\right)^2}},$$

$$I_{m1} = I_{m2} \text{ при } \left|\omega_1 L - \frac{1}{\omega_1 C}\right| = \left|\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right|, \qquad \left|\omega_1 - \frac{1}{\omega_1 LC}\right| = \left|\omega_2 - \frac{1}{\omega_2 LC}\right|,$$

$$\left|\omega_1 - \frac{\omega_{рез}^2}{\omega_1}\right| = \left|\omega_2 - \frac{\omega_{рез}^2}{\omega_2}\right|, \qquad \omega_{рез}^2 = \left|\frac{\omega_1 - \omega_2}{\dfrac{1}{\omega_1} - \dfrac{1}{\omega_2}}\right| = |\omega_1\omega_2|,$$

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_1\omega_2}\,.$$

Ответ $\omega_{рез} = 490$ рад/с.

4.95 Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 0{,}1$ мГн, резистор сопротивлением $R = 3$ Ом, а также конденсатор емкостью $C = 10$ нФ. Определите среднюю мощность, потребляемую контуром, необходимую для поддержания в нем незатухающих колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_\text{m} = 2$ В.

Дано

$L = 0{,}1$ мГн $= 10^{-4}$ Гн

$R = 3$ Ом

$C = 10$ нФ $= 10^{-8}$ Ф

$U_\text{m} = 2$ В

$\langle P\rangle$ — ?

Решение

$$\langle P\rangle = \frac{1}{t}\int_0^t I^2 R\,\mathrm{d}t, \qquad Q = Q_\text{m}\cos\omega t,$$

$$C = \frac{Q_\text{m}}{U_\text{m}}, \qquad Q_\text{m} = CU_\text{m},$$

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\omega Q_\text{m}\sin\omega t,$$

$$\langle P\rangle = \frac{1}{t}\int_0^t I^2 R\,\mathrm{d}t = \frac{\omega^2 Q_\text{m}^2 R}{t}\int_0^t \sin^2\omega t\,\mathrm{d}t = \frac{\omega^2 Q_\text{m}^2 R}{2} = \frac{C^2 U_\text{m}^2 R}{2LC} = \frac{1}{2}\frac{CU_\text{m}^2 R}{L}.$$

Ответ $\langle P\rangle = 0{,}6$ мВт.

4.96 В цепь переменного тока напряжением 220 В и частотой 50 Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом, катушка индуктивностью $L = 0{,}5$ Гн и конденсатор емкостью $C = 10$ мкФ. Определите амплитудное значение: 1) силы тока в цепи; 2) падения напряжения на активном сопротивлении; 3) падения напряжения на конденсаторе; 4) падения напряжения на катушке.

Ответ 1) $I_\text{m} = 1{,}16$ А; 2) $U_{R_\text{m}} = 116$ В;

3) $U_{C_\text{m}} = 369$ В; 4) $U_{L_\text{m}} = 182$ В.

4.97 В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка длиной $l = 20$ см и диаметром $d = 5$ см, содержащая $N = 500$ витков медного провода площадью поперечного сечения $S = 0{,}6$ мм². Определите, какая доля полного сопротивления катушки приходится на реактивное сопротивление. Удельное сопротивление меди $\rho = 17$ нОм · м.

Дано	***Решение***
$\nu = 50$ Гц $l = 20$ см $= 0{,}2$ м $d = 5$ см $= 0{,}05$ м $N = 500$ $S = 0{,}6$ мм² $= 6 \cdot 10^{-7}$ м² $\rho = 17$ нОм · м $=$ $= 1{,}7 \cdot 10^{-8}$ Ом · м $\dfrac{X}{Z}$ — ?	$Z = \sqrt{R^2 + X^2}$, $\quad X = R_C + R_L$, $R_C = 0$, $\quad R_L = \omega L$, $R = \rho \dfrac{l'}{S}$, $\quad l' = \pi N d$, $R = \dfrac{\rho \pi N d}{S}$, $\quad \omega = 2\pi\nu$, $L = \mu_0 \mu \dfrac{N^2 S'}{l}\Big\vert_{\mu=1} = \dfrac{\mu_0 N^2 S'}{l}$, $\quad S' = \dfrac{\pi d^2}{4}$,

$$X = R_L = 2\pi\nu\mu_0 N^2 \frac{\pi d^2}{4l} = \frac{\mu_0 \pi^2 \nu N^2 d^2}{2l} = 0{,}97 \text{ Ом}; \qquad R = 2{,}22 \text{ Ом};$$

$$\frac{X}{Z} = \frac{X}{\sqrt{R^2 + X^2}} = 0{,}401.$$

Ответ $\dfrac{X}{Z} = 0{,}401$.

● ●

Полное сопротивление Z цепи переменного тока,

содержащей последовательно включенные резистор сопротивлением R, катушку индуктивностью L и конденсатор емкостью C, на концы которой подается переменное напряжение $U = U_\mathrm{m} \cos\omega t$,

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)}.$$

4.98 В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц включена катушка длиной $l = 30$ см и площадью поперечного сечения $S = 10$ см², содержащая $N = 1000$ витков. Определите активное сопротивление катушки, если известно, что сдвиг фаз φ между напряжением и током составляет 30°.

Дано

$\nu = 50$ Гц

$l = 30$ см $= 0{,}3$ м

$S = 10$ см² $= 10^{-3}$ м²

$N = 1000$

$\varphi = 30°$

R — ?

Решение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}, \qquad \omega = 2\pi\nu,$$

$$R_C = \frac{1}{\omega C} = 0, \qquad R_L = \omega L,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} = \frac{\omega L}{R}, \qquad L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}\bigg|_{\mu=1} = \frac{\mu_0 N^2 S}{l},$$

$$R = \frac{\omega L}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{2\pi\nu\mu_0 N^2 S}{l \operatorname{tg}\varphi}.$$

Ответ $R = 2{,}28$ Ом.

4.99 К зажимам генератора присоединен конденсатор емкостью $C = 0{,}15$ мкФ. Определите амплитудное значение напряжения на зажимах, если амплитудное значение силы тока равно 3,3 А, а частота тока составляет 5 кГц.

Ответ $U_m = 0{,}7$ кВ.

4.100 Определите в случае переменного тока ($\nu = 50$ Гц) полное сопротивление участка цепи, состоящего из параллельно включенного конденсатора емкостью $C = 10$ мкФ и резистора сопротивлением $R = 50$ Ом.

Ответ

$$Z = \frac{R}{\sqrt{1 + 4\pi^2\nu^2 R^2 C^2}} = 49{,}4 \text{ Ом}.$$

4.101 Цепь переменного тока состоит из последовательно соединенных катушки, конденсатора и резистора. Амплитудное значение суммарного напряжения на катушке и конденсаторе $U_{LC_m} = 173$ В, а амплитудное значение напряжения на резисторе $U_{R_m} = 100$ В. Определите сдвиг фаз между током и внешним напряжением.

Дано

$U_{LC_m} = 173$ В

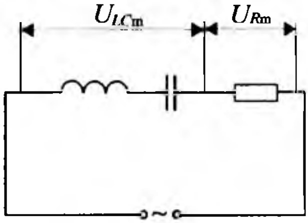
$U_{R_m} = 100$ В

φ – ?

Решение

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R},$$

$$U_{LC_m} = U_{L_m} - U_{C_m},$$



$$U_{L_m} = I_m \omega L, \qquad U_{C_m} = \frac{I_m}{\omega C},$$

$$U_{LC_m} = I_m\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \qquad U_{R_m} = I_m R, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{LC_m} I_m}{I_m U_{R_m}} = \frac{U_{LC_m}}{U_{R_m}}.$$

Ответ $\varphi = 60°$.

4.102 В цепь переменного тока частотой $\nu = 50$ Гц последовательно включены резистор сопротивлением $R = 100$ Ом и конденсатор емкостью $C = 22$ мкФ. Определите, какая доля напряжения, приложенного к этой цепи, приходится на падение напряжения на конденсаторе.

Дано

$\nu = 50$ Гц

$R = 100$ Ом

$C = 22$ мкФ $= 2{,}2 \cdot 10^{-5}$ Ф

$\dfrac{U_{C_m}}{U_m}$ — ?

Решение

$$U_m = I_m Z, \quad Z = \sqrt{R^2 + R_C^2}, \quad U_{C_m} = I_m R_C, \quad R_C = \frac{1}{\omega C},$$

$$\omega = 2\pi\nu. \qquad \frac{U_{C_m}}{U_m} = \frac{R_C}{Z} = \frac{1/(2\pi\nu C)}{\sqrt{R^2 + (1/2\pi\nu C)^2}}.$$

Ответ $\dfrac{U_{C_m}}{U_m} = 0{,}823$.

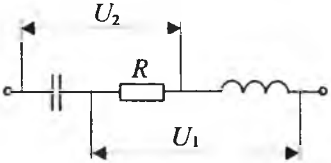
4.103 В цепь переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц и действующим значением напряжения $U = 300$ В последовательно включены конденсатор, резистор сопротивлением $R = 50$ Ом и катушка индуктивностью $L = 0{,}1$ Гн. Падения напряжения $U_1 : U_2 = 1:2$. Определите: 1) емкость конденсатора; 2) действующее значение силы тока.

Дано

$\nu = 50$ Гц
$U = 300$ В
$R = 50$ Ом
$L = 0{,}1$ Гн
$U_1/U_2 = 1/2$

1) C – ?
2) I — ?

Решение



$$U_1 = I\sqrt{R^2 + R_L^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\ ,$$

$$U_2 = I\sqrt{R^2 + R_C^2} = I\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}\ ,$$

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{1}{2}\ , \qquad \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$4R^2 + 4(\omega L)^2 = R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2,$$

$$C = \frac{1}{\omega\sqrt{3R^2 + 4(\omega L)^2}}\ , \qquad \omega = 2\pi\nu\ ,$$

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(2\pi\nu L - \frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}\ .$$

Ответ 1) $C = 29{,}8$ мкФ; 2) $I = 3{,}32$ А.

4.104

Генератор, частота которого составляет 32 кГц и амплитудное значение напряжения 120 В, включен в резонирующую цепь, емкость которой $C = 1$ нФ. Определите амплитудное значение напряжения на конденсаторе, если активное сопротивление цепи $R = 5$ Ом.

Дано

$\nu = 32$ кГц $= 3,2 \cdot 10^4$ Гц

$U_m = 120$ В

$C = 1$ нФ $= 10^{-9}$ Ф

$R = 5$ Ом

U_{C_m} – ?

Решение

$\boxed{Z = R}$ (в случае резонанса), $I_m = \dfrac{U_m}{Z} = \dfrac{U_m}{R}$,

$U_{C_m} = I_m R_C$, $R_C = \dfrac{1}{\omega C}$, $U_{C_m} = \dfrac{U_m}{R}\dfrac{1}{\omega C}$,

$\omega = 2\pi\nu$, $U_{C_m} = \dfrac{1}{2\pi\nu C}\dfrac{U_m}{R}$.

Ответ $U_{C_m} = 119$ кВ.

4.105

В цепи переменного тока с частотой $\omega = 314$ рад/с вольтметр показывает нуль при $L = 0,2$ Гн. Определите емкость конденсатора.

Дано

$\omega = 314$ рад/с

$L = 0,2$ Гн

$U_V = 0$

C — ?

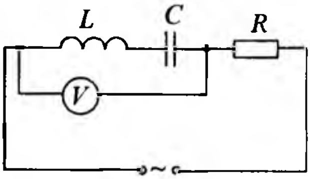
Решение

$U_V = 0$,

$U_L + U_C = 0$,

$U_V = IZ_V$,

$Z_V = \sqrt{R_C^2 + R_L^2}$,



$R_C = \dfrac{1}{\omega C}$, $R_L = \omega L$,

$Z_V = 0$, $\dfrac{1}{\omega C} = \omega L$, $C = \dfrac{1}{\omega^2 L}$.

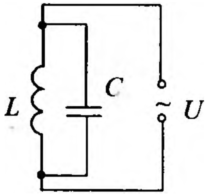
Ответ $C = 50$ мкФ.

4.106 В цепи переменного тока (см. рисунок к задаче 4.105) с частотой $\nu = 50$ Гц вольтметр показывает нуль при значении $C = 20$ мкФ. Определите индуктивность катушки.

Ответ $L = 0{,}51$ Гн.

4.107 В приведенной на рисунке цепи переменного тока с частотой $\nu = 50$ Гц сила тока внешней (неразветвленной) цепи равна нулю. Определите емкость C конденсатора, если индуктивность L катушки равна 1 Гн.

Дано	*Решение*
$\nu = 50$ Гц $I = 0$ $L = 1$ Гн	$I = 0, \qquad I_L = I_C,$ $U_{L_m} = U_{C_m} = U_m,$ $\dfrac{U_m}{R_L} = \dfrac{U_m}{R_C},$
C — ?	



$$R_L = R_C, \qquad R_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad R_L = \omega L,$$

$$\omega = 2\pi\nu, \qquad \frac{1}{\omega C} = \omega L, \qquad C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4\pi^2\nu^2 L}.$$

Ответ $C = 10$ мкФ.

4.108 Активное сопротивление колебательного контура $R = 0{,}4$ Ом. Определите среднюю мощность $\langle P \rangle$, потребляемую колебательным контуром, при поддержании в нем незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением силы тока $I_m = 30$ мА.

Ответ $\langle P \rangle = 18$ мВт.

4.109 Как и какими индуктивностью L и емкостью C надо подключить катушку и конденсатор к резистору сопротивлением $R = 10$ кОм, чтобы ток через катушку и конденсатор был в 10 раз больше общего тока? Частота переменного напряжения $\nu = 50$ Гц.

Дано

$R = 10$ кОм $= 10^4$ Ом

$\nu = 50$ Гц

$I_L = I_C = 10I$

L — ?

C – ?

Решение

$I_L = I_C = 10I$.

Резонанс токов. Параллельное включение:

$$U_L = U_C = U_R, \qquad I = \frac{U}{R}, \qquad I_C = \frac{U}{R_C},$$

$$I_L = \frac{U}{R_L}, \qquad \frac{1}{R_L} = \frac{1}{R_C} = 10\frac{1}{R}, \qquad R_C = \frac{1}{\omega C},$$

$$R_L = \omega L, \qquad C = \frac{10}{\omega R}, \qquad L = \frac{R}{10\omega}, \qquad \omega = 2\pi\nu,$$

$$C = \frac{10}{2\pi\nu R}, \qquad L = \frac{R}{20\pi\nu}.$$

Ответ $L = 3{,}18$ Гн; $C = 3{,}18$ мкФ.

4.110 Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 5$ мкГн и активным сопротивлением $R = 0{,}1$ Ом. Определите среднюю мощность $\langle P \rangle$, потребляемую колебательным контуром, при поддержании в нем незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{m_C} = 10$ В.

Дано

$C = 5$ нФ $= 5 \cdot 10^{-9}$ Ф

$L = 5$ мкГн $= 5 \cdot 10^{-6}$ Гн

$R = 0{,}1$ Ом

$U_{m_C} = 10$ В

$\langle P \rangle$ – ?

Решение

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_m^2 R, \qquad I_m = \frac{U_{m_C}}{R_C}, \qquad R_C = \frac{1}{\omega C},$$

$$I_m = U_{m_C}\omega C, \; \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \; \langle P \rangle = \frac{1}{2} U_{m_C}^2 \omega^2 C^2 R,$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\frac{RCU_{m_C}^2}{L}.$$

Ответ $\langle P \rangle = 5$ мВт.

4.111 Колебательный контур содержит катушку индуктивностью $L = 6$ мкГн и конденсатор емкостью $C = 1{,}2$ нФ. Для поддержания в колебательном контуре незатухающих гармонических колебаний с амплитудным значением напряжения на конденсаторе $U_{m_C} = 2$ В необходимо подводить среднюю мощность $\langle P \rangle = 0{,}2$ мВт. Считая затухание в контуре достаточно малым, определите добротность данного контура.

Дано

$L = 6$ мкГн $= 6 \cdot 10^{-6}$ Гн

$C = 1{,}2$ нФ $= 1{,}2 \cdot 10^{-9}$ Ф

$U_{m_C} = 2$ В

$\langle P \rangle = 0{,}2$ мВт $= 2 \cdot 10^{-4}$ Вт

Q — ?

Решение

$$Q = \frac{\omega_0}{2\delta}, \qquad \delta = \frac{R}{2L}, \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}},$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} I_{\mathrm{m}}^2 R, \qquad I_{\mathrm{m}} = I_{\mathrm{m}_C}, \qquad I_{\mathrm{m}_C} = \frac{U_{\mathrm{m}_C}}{R_c},$$

$$R_C = \frac{1}{\omega C}, \qquad I_{\mathrm{m}_C} = \omega C U_{\mathrm{m}_C}, \qquad \omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

$$I_{\mathrm{m}_C}^2 = \frac{C}{L} U_{\mathrm{m}_C}^2, \qquad R = \frac{2\langle P \rangle}{I_{\mathrm{m}}^2} = \frac{2\langle P \rangle L}{C U_{\mathrm{m}_C}^2}, \qquad Q = \frac{C U_{\mathrm{m}_C}^2}{2\langle P \rangle L}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{U_{\mathrm{m}_C}^2}{2\langle P \rangle}\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Ответ $Q = 141$.

4.112 В сеть переменного тока с действующим значением напряжения 120 В последовательно включены проводник с активным сопротивлением 10 Ом и катушка индуктивностью 0,1 Гн. Определите частоту ν тока, если амплитудное значение силы тока в цепи равно 5 А.

Дано

$U = 120$ В

$R = 10$ Ом

$L = 0{,}1$ Гн

$I_{\mathrm{m}} = 5$ А

ν — ?

Решение

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{U_{\mathrm{m}}}{Z}, \quad U_{\mathrm{m}} = U\sqrt{2}, \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}, \quad \omega = 2\pi\nu,$$

$$I_{\mathrm{m}} = \frac{\sqrt{2}U}{\sqrt{R^2 + (2\pi\nu L)^2}}, \quad \nu = \frac{1}{2\pi L}\sqrt{\frac{2U^2}{I_{\mathrm{m}}^2} - R^2} = 51{,}6\ \text{Гц}.$$

Ответ $\nu = 51{,}6$ Гц.

4.113 Диэлектрик, диэлектрическая проницаемость которого равна 2,8, используется в конденсаторе в качестве изолятора. Конденсатор, находясь под напряжением, поглощает некоторую мощность, причем при $\nu = 50$ Гц коэффициент мощности $\cos\varphi = 0{,}1$. Определите удельное сопротивление диэлектрика.

Ответ $\rho = \dfrac{\cos\varphi}{2\pi\nu\varepsilon\varepsilon_0\sqrt{1-\cos^2\varphi}} = 12{,}9$ МОм · м.

4.114 В цепь переменного тока напряжением $U_\text{m} = 220$ В и частотой 50 Гц включена катушка с активным сопротивлением. Сдвиг фаз между напряжением и током составляет $\pi/6$. Определите индуктивность катушки, если известно, что она поглощает мощность 445 Вт.

Дано

$U_\text{m} = 220$ В

$\nu = 50$ Гц

$P = 445$ Вт

$\varphi = 30°$

L — ?

Решение

$$U_\text{m} = I_\text{m} Z, \qquad Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{R}, \qquad P = I_\text{m}^2 R,$$

$$R = \frac{\omega L}{\operatorname{tg}\varphi}, \qquad I_\text{m}^2 = \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\omega L},$$

$$U_\text{m}^2 = \frac{P\operatorname{tg}\varphi}{\omega L}\left(\frac{\omega^2 L^2}{\operatorname{tg}^2\varphi} + \omega^2 L^2\right), \qquad \omega = 2\pi\nu,$$

$$U_\text{m}^2 = P\operatorname{tg}\varphi \cdot 2\pi\nu L\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi} + 1\right), \qquad L = \frac{U_\text{m}^2}{P\operatorname{tg}\varphi \cdot 2\pi\nu L\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\varphi} + 1\right)}.$$

Ответ $L = 0{,}15$ Гн.

4.115 Цепь, состоящая из последовательно соединенных безындукционного резистора сопротивлением $R = 100$ Ом и катушки с активным сопротивлением, включена в сеть с действующим напряжением $U = 300$ В. Воспользовавшись векторной диаграммой, определите тепловую мощность, выделяемую на катушке, если действующее значение напряжения на сопротивлении и катушке соответственно равно $U_R = 150$ В и $U_L = 250$ В.

Дано

$R = 100$ Ом

$U = 300$ В

$U_R = 150$ В

$U_L = 250$ В

P_L — ?

Решение

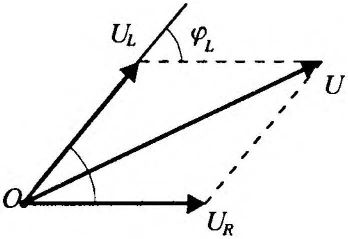
$$P_L = IU_L \cos\varphi_L, \qquad I = \frac{U_R}{R},$$

$$U^2 = U_R^2 + U_L^2 - 2U_R U_L \cos\varphi_L,$$

$$\cos\varphi_L = \frac{U^2 - U_R^2 - U_L^2}{2U_R U_L},$$

$$P_L = \frac{U_R}{R} U_L \left(\frac{U^2 - U_R^2 - U_L^2}{2U_R U_L} \right),$$

$$P_L = \frac{1}{2R}(U^2 - U_R^2 - U_L^2).$$



Ответ $P_L = 25$ Вт.

Десятичные приставки к названиям единиц

Т — тера (10^{12})

Г — гига (10^{9})

М — мега (10^{6})

к — кило (10^{3})

д — деци (10^{-1})

с — санти (10^{-2})

м — милли (10^{-3})

мк — микро (10^{-6})

н — нано (10^{-9})

п — пико (10^{-12})

ф — фемто (10^{-15})

а — атто (10^{-18})

4.2. Упругие волны

4.116 Определите разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний двух точек, лежащих на луче и друг от друга на расстоянии $\Delta l = 1$ м, если длина волны $\lambda = 0{,}5$ м.

Дано

$\Delta l = 1$ м

$\lambda = 0{,}5$ м

$\Delta\varphi$ — ?

Решение

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l .$$

Вычисления:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{0{,}5\ \text{м}} \cdot 1\ \text{м} = 4\pi .$$

Ответ $\Delta\varphi = 4\pi$, точки колеблются в фазе.

4.117 Две точки лежат на луче и находятся от источника колебаний на расстоянии $x_1 = 4$ м и $x_2 = 7$ м. Период колебаний $T = 20$ мс и скорость υ распространения волны равна 300 м/с. Определите разность фаз колебаний этих точек.

Дано

$x_1 = 4$ м

$x_2 = 7$ м

$T = 20$ мс $= 2 \cdot 10^{-2}$ с

$\upsilon = 300$ м/с

$\Delta\varphi$ – ?

Решение

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l , \qquad \Delta l = x_2 - x_1 ,$$

$$\lambda = \upsilon T , \qquad \Delta\varphi = \frac{2\pi}{\upsilon T}(x_2 - x_1) .$$

Ответ $\Delta\varphi = \pi$, точки колеблются в противофазе.

4.118 Волна распространяется в упругой среде со скоростью $v = 150$ м/с. Определите частоту ν колебаний, если минимальное расстояние Δx между точками среды, фазы колебаний которых противоположны, равно 0,75 м.

Ответ $\nu = 100$ Гц.

4.119 Определите длину волны λ, если числовое значение волнового вектора **k** равно 0,02512 см$^{-1}$.

Ответ $\lambda = 2{,}5$ м.

4.120 Звуковые колебания с частотой $\nu = 450$ Гц и амплитудой $A = 0{,}3$ мм распространяются в упругой среде. Длина волны $\lambda = 80$ см. Определите: 1) скорость распространения волн; 2) максимальную скорость частиц среды.

Дано	*Решение*	
$\nu = 450$ Гц $A = 0{,}3$ мм $= 3 \cdot 10^{-4}$ м $\lambda = 80$ см $= 0{,}8$ м	$\xi = A\cos\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$,	$\lambda = vT$,
1) v — ?	$T = \dfrac{1}{\nu}$,	$\omega = 2\pi\nu$,
2) $\left(\dfrac{d\xi}{dt}\right)_{\max}$ — ?	$v = \lambda\nu$,	$\dfrac{d\xi}{dt} = -A\omega\sin\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right)$,

$$\left(\frac{d\xi}{dt}\right)_{\max} = |A\omega| = 2\pi\nu A.$$

Ответ 1) $v = 360$ м/с; 2) $\left(\dfrac{d\xi}{dt}\right)_{\max} = 0{,}848$ м/с.

4.121. Плоская синусоидальная волна распространяется вдоль прямой, совпадающей с положительным направлением оси x в среде, не поглощающей энергию, со скоростью $v = 10$ м/с. Две точки, находящиеся на этой прямой на расстоянии $x_1 = 7$ м и $x_2 = 10$ м от источника колебаний, колеблются с разностью фаз $\Delta\varphi = 3\pi/5$. Амплитуда волны $A = 5$ см. Определите: 1) длину волны λ; 2) уравнение волны; 3) смещение ξ_2 второй точки в момент времени $t_2 = 2$ с.

Дано

$v = 10$ м/с

$x_1 = 7$ м

$x_2 = 10$ м

$\Delta\varphi = 3\pi/5$

$A = 5$ см $= 0{,}05$ м

$t_2 = 2$ с

1) λ — ?

2) $\xi(x, t)$ – ?

3) ξ_2 – ?

Решение

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_2 - x_1), \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\Delta\varphi}(x_2 - x_1),$$

$$\xi(x, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T},$$

$$T = \frac{\lambda}{v}, \qquad \omega = \frac{2\pi v}{\lambda},$$

$$\xi_2 = A\cos\omega\left(t_2 - \frac{x_2}{v}\right).$$

Ответ

1) $\lambda = 10$ м;

2) $\xi(x, t) = 0{,}05\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5}x\right)$, м;

3) $\xi_2 = 5$ см.

● ●

Уравнение плоской волны,

распространяющейся вдоль положительного направления оси x,

$$\xi(x, t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0),$$

где $\xi(x, t)$ — смещение точек среды с координатой x в момент времени t; A — амплитуда волны; ω — циклическая частота; $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(vT) = \omega/v$ — волновое число (λ — длина волны; v — фазовая скорость; T — период колебаний); φ_0 — начальная фаза колебаний.

4.122 Поперечная волна распространяется вдоль упругого шнура со скоростью $v = 10$ м/с. Амплитуда колебаний точек шнура $A = 5$ см, а период колебаний $T = 1$ с. Запишите уравнение волны и определите: 1) длину волны; 2) фазу колебаний, смещение, скорость и ускорение точки, расположенной на расстоянии $x_1 = 9$ м от источника колебаний в момент времени $t_1 = 2{,}5$ с.

Дано

$v = 10$ м/с
$A = 5$ см $= 0{,}05$ м
$T = 1$ с
$x_1 = 9$ м
$t_1 = 2{,}5$ с

$\xi(x, t)$ – ?
1) λ — ?
2) φ_1, ξ_1 — ?
$\dot{\xi}_1$, $\ddot{\xi}_1$ —?

Решение

$$\xi = A \cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right), \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \lambda = vT,$$

$$\xi = A \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{x}{v}\right),$$

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{T}\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right),$$

$$\xi_1 = A \cos\frac{2\pi}{T}\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right),$$

$$\dot{\xi}_1 = -A \cdot \frac{2\pi}{T} \sin\frac{2\pi}{T}\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right),$$

$$\ddot{\xi}_1 = -A \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos\frac{2\pi}{T}\left(t_1 - \frac{x_1}{v}\right).$$

Ответ

$\xi(x, t) = 5 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{5} x\right)$, см; 1) $\lambda = 10$ м;

2) $\varphi_1 = 3{,}2\pi$, $\xi_1 = -4$ см, $\dot{\xi}_1 = 18{,}5$ см/с, $\ddot{\xi}_1 = -160$ см/с^2.

4.123 Убедитесь, что волновому уравнению $\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$ удовлетворяет плоская волна $\xi(x, t) = A \cos[\omega(t - x/v) + \varphi_0]$.

4.124 Выведите связь между групповой и фазовой скоростями.

Дано

u

v

$u = f(v)$

Решение

$$v = \frac{\omega}{k}, \qquad u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}, \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k},$$

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}k} = -\frac{2\pi}{k^2} = -\frac{\lambda}{k},$$

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}k}(vk) = v + k\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}k} = v + k\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}k}\right) = v - \lambda\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}.$$

Ответ $u = v - \lambda\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\lambda}$.

4.125 Докажите, что в недиспергирующей среде групповая и фазовая скорости равны.

4.126 Определите групповую скорость для частоты $\nu = 800$ Гц, если фазовая скорость задается выражением $v = a_0/\sqrt{\nu + b}$, где $a_0 = 24$ м $\cdot$ с$^{-3/2}$, $b = 100$ Гц.

Дано

$\nu = 800$ Гц

$v = a_0/\sqrt{\nu + b}$

$a_0 = 24$ м $\cdot$ с$^{-3/2}$

$b = 100$ Гц

u — ?

Решение

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = 2\pi\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}k} = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)}, \qquad \lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{a_0}{\nu\sqrt{\nu + b}},$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1{,}5\nu + b}{a_0\sqrt{\nu + b}}\mathrm{d}\nu,$$

$$u = \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)} = \frac{\mathrm{d}\nu\, a_0\sqrt{\nu + b}}{(1{,}5\nu + b)\,\mathrm{d}\nu} = \frac{a_0\sqrt{\nu + b}}{1{,}5\nu + b}.$$

Ответ $u = 0{,}55$ м/с.

4.127 Два когерентных источника колеблются в одинаковых фазах с частотой $\nu = 400$ Гц. Скорость распространения колебаний в среде $v = 1$ км/с. Определите, при какой наименьшей разности хода, не равной нулю, будет наблюдаться: 1) максимальное усиление колебаний; 2) максимальное ослабление колебаний.

Дано

$\nu = 400$ Гц
$v = 1$ км/с

$\Delta_{\max}$ — ?
$\Delta_{\min}$ – ?

Решение

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

$$\Delta_{\max} = 2m\frac{\lambda}{2}, \qquad m = 1, \qquad \Delta_{\max} = \frac{v}{\nu},$$

$$\Delta_{\min} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}, \quad m = 0, \qquad \Delta_{\min} = \frac{\lambda}{2} = \frac{v}{2\nu}.$$

Ответ $\Delta_{\max} = 2{,}5$ м, $\Delta_{\min} = 1{,}25$ м.

4.128 Два когерентных источника посылают поперечные волны в одинаковых фазах. Периоды колебаний $T = 0{,}2$ с, скорость распространения волн в среде $v = 800$ м/с. Определите, при какой разности хода в случае наложения волн будет наблюдаться: 1) ослабление колебаний; 2) усиление колебаний.

Ответ 1) $\Delta = \pm 80(2m+1)$, м $(m = 0, 1, 2, \ldots)$;
2) $\Delta = \pm 160m$, м $(m = 0, 1, 2, \ldots)$.

4.129 По поверхности воды распространяются две волны, возбуждаемые двумя точечными когерентными источниками. Какую форму имеют линии, на которых лежат точки, имеющие одну и ту же постоянную разность хода?

• •

Уравнение сферической волны

$$\xi(x, t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kr + \varphi_0),$$

где r — расстояние от центра волны до рассматриваемой точки среды.

4.130 Два динамика расположены на расстоянии $d = 0{,}5$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на частоте $\nu = 1500$ Гц. Приемник находится на расстоянии $l = 4$ м от центра динамиков. Принимая скорость звука $\upsilon = 340$ м/с, определите, на какое расстояние от центральной линии параллельно динамикам надо отодвинуть приемник, чтобы он зафиксировал первый интерференционный минимум.

Ответ $x = 90{,}7$ см.

4.131 Два динамика расположены на расстоянии $d = 2{,}5$ м друг от друга и воспроизводят один и тот же музыкальный тон на определенной частоте, который регистрируется приемником, находящимся на расстоянии $l = 3{,}5$ м от центра динамиков. Если приемник передвинуть от центральной линии параллельно динамикам на расстояние $x = 1{,}55$ м, то он фиксирует первый интерференционный минимум. Скорость звука $\upsilon = 340$ м/с. Определите частоту звука.

Дано

$d = 2{,}5$ м

$l = 3{,}5$ м

$x = 1{,}55$ м

$\upsilon = 340$ м/с

ν — ?

Решение

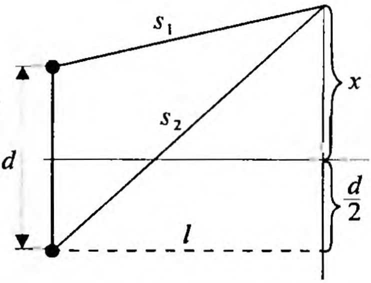
$$\Delta_{\min} = s_2 - s_1 = (2m+1)\frac{\lambda}{2},$$

$$m = 0, \qquad \Delta_{\min} = \frac{\lambda}{2},$$

$$s_1 = \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}, \qquad s_2 = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2}.$$

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\upsilon}{2(s_2 - s_1)},$$

$$\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\upsilon}{2\left(\sqrt{l^2 + \left(x + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{d}{2}\right)^2}\right)}.$$



Ответ $\nu = 175$ Гц.

4.132 Образование стоячих волн обычно наблюдают при интерференции бегущей и отраженной волны. Объясните, когда и почему на границе отражения получается узел или пучность.

4.133 Объясните, где человек слышит более громкий звук: в пучности или в узле стоячей волны.

4.134 Определите длину бегущей волны λ, если расстояние Δl между первым и четвертым узлами стоячей волны равно 30 см.

Дано	*Решение*
$\Delta l_{4,1} = 30\ \text{см} = 0{,}3\ \text{м}$	$\Delta l_{4,1} = \frac{3}{2}\lambda$, $\qquad \lambda = \frac{2\,\Delta l_{4,1}}{3}$.
λ — ?	

Ответ $\lambda = 20$ см.

4.135 СВЧ-генератор излучает в положительном направлении оси x плоские электромагнитные волны, которые затем отражаются обратно. Точки M_1 и M_2 соответствуют положениям двух соседних минимумов интенсивности и отстоят друг от друга на расстоянии $l = 5$ см. Определите частоту микроволнового генератора.

Дано	*Решение*
$l = 5\ \text{см} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{м}$ $c = 3 \cdot 10^8\ \text{м/с}$	$l = \frac{\lambda}{2}$, $\qquad \nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{c}{2l}$.
ν — ?	

Ответ $\nu = 3$ ГГц.

4.136 Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от менее плотной среды, определите характер колебаний в любой точке стержня.

Дано	*Решение*
$\xi = A\cos\omega t$ Среда менее плотная	$\xi_1 = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{v}\right)$,
$\xi(x, t)$ — ?	$\xi_2 = A\cos\omega\left(t + \frac{x}{v}\right)$,

$$\xi(x, t) = \xi_1 + \xi_2 = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) + A\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{v}\right) =$$

$$= A\left[\cos\omega t\cdot\cos\frac{\omega x}{v} + \sin\omega t\cdot\sin\frac{\omega x}{v} + \cos\omega t\cdot\cos\frac{\omega x}{v} - \sin\omega t\cdot\sin\frac{\omega x}{v}\right] =$$

$$= 2A\cos\frac{\omega x}{v}\cdot\cos\omega t,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \lambda = vT, \qquad \frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda}x = \frac{2\pi}{\lambda}x,$$

$\xi(x, t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cdot\cos\omega t$ — уравнение стоячей волны.

При $x = \pm m\frac{\lambda}{2}$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ — пучности.

При $x = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$ $(m = 0, 1, 2, ...)$ — узлы.

Уравнение стоячей волны

$$\xi(x, t) = 2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\cos\omega t = 2A\cos kx\cos\omega t.$$

4.137 Один конец упругого стержня соединен с источником гармонических колебаний, подчиняющихся закону $\xi = A\cos\omega t$, а другой его конец жестко закреплен. Учитывая, что отражение в месте закрепления стержня происходит от более плотной среды, определите характер колебаний в любой точке стержня.

Дано	*Решение*
$\xi = A\cos\omega t$ Среда более плотная ——— $\xi(x,t)$ — ?	$\xi_1 = A\cos\omega\left(t - \dfrac{x}{v}\right),$ $\xi_2 = A\cos\left[\omega\left(t+\dfrac{x}{v}\right)+\pi\right] = -A\cos\omega\left(t+\dfrac{x}{v}\right),$

$$\xi(x,t) = \xi_1 + \xi_2 = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{v}\right) - A\cos\left(\omega t + \frac{\omega x}{v}\right) =$$

$$= A\left[\cos\omega t\cdot\cos\frac{\omega x}{v} + \sin\omega t\cdot\sin\frac{\omega x}{v} - \cos\omega t\cdot\cos\frac{\omega x}{v} + \sin\omega t\cdot\sin\frac{\omega x}{v}\right] =$$

$$= 2A\sin\frac{\omega x}{v}\cdot\sin\omega t,$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \lambda = vT, \qquad \frac{\omega x}{v} = \frac{2\pi}{T}\frac{T}{\lambda}x = \frac{2\pi}{\lambda}x,$$

$\xi(x,t) = 2A\sin\dfrac{2\pi}{\lambda}x\cdot\sin\omega t$ — уравнение стоячей волны.

При $x = \pm m\dfrac{\lambda}{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — узлы.

При $x = \pm\left(m+\dfrac{1}{2}\right)\dfrac{\lambda}{2}$ $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ — пучности.

4.138 Выведите условие для координат пучностей и узлов стоячей волны.

4.139 Для определения скорости звука в воздухе методом акустического резонанса используется труба с поршнем и звуковой мембраной, закрывающей один из ее торцов. Расстояние между соседними положениями поршня, при котором наблюдается резонанс на частоте $\nu = 2500$ Гц, составляет $l = 6{,}8$ см. Определите скорость звука в воздухе.

Дано	Решение
$\nu = 2500$ Гц $l = 6{,}8$ см $= 6{,}8 \cdot 10^{-2}$ м	$\lambda = vT = \dfrac{v}{\nu}$, $\quad \lambda = 2l$,
v — ?	$2l = \dfrac{v}{\nu}$, $\quad v = 2l\nu$.

Ответ $v = 340$ м/с.

4.140 Стержень с закрепленными концами имеет длину $l = 70$ см. При трении стержень издает звук, основная частота (наименьшая частота, при которой может возникать стоячая волна) которого $\nu_0 = 1$ кГц. Определите: 1) скорость звука v в стержне; 2) какие обертоны (волны с кратными основным частотами) может иметь звук, издаваемый стержнем.

Ответ 1) $v = 1{,}4$ км/с; 2) $\nu_i = k\nu_0$ $(k = 2, 3, 4, \ldots)$.

4.141 Труба, длина которой $l = 1$ м, заполнена воздухом и открыта с одного конца. Принимая скорость звука $v = 340$ м/с, определите, при какой наименьшей частоте в трубе будет возникать стоячая звуковая волна.

Дано	Решение
$v = 340$ м/с $l = 1$ м	$l = \dfrac{\lambda}{4}$, $\quad \lambda = 4l$, $\quad \lambda = vT = \dfrac{v}{\nu_0}$,
ν_0 — ?	$4l = \dfrac{v}{\nu_0}$, $\quad \nu_0 = \dfrac{v}{4l}$.

Ответ $\nu_0 = 85$ Гц.

4.142 Человеческое ухо может воспринимать звуки, соответствующие граничным частотам $\nu_1 = 16$ Гц и $\nu_2 = 20$ кГц. Принимая скорость звука в воздухе равной 343 м/с, определите область слышимости звуковых волн.

Ответ 17 м ÷ 21,4 м.

4.143 Определите интенсивность звука (Вт/м²), уровень интенсивности L которого составляет 67 дБ. Интенсивность звука на пороге слышимости $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м².

Дано	Решение
$L = 67$ дБ $= 6{,}7$ Б $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м² I — ?	$L = \lg\dfrac{I}{I_0}$, $\quad \dfrac{I}{I_0} = 10^L$, $I = I_0 \cdot 10^L$.

Ответ $I = 5{,}01$ мкВт/м².

4.144 Определите отношение интенсивностей звуков, если они отличаются по уровню громкости на 2 фон.

Дано	Решение
$\Gamma = 2$ фон $\dfrac{I_1}{I_2}$ – ?	$\Gamma = 1$ фон — единица уровня громкости. $\boxed{\nu = 1000\ \text{Гц}}$ $\quad \Gamma = 1$ фон, если $L = 1$ дБ. $\boxed{\Gamma = 2\ \text{фон}}$ $\quad L = 2$ дБ $= 0{,}2$ Б.

$$L_1 = \lg\frac{I_1}{I_0}; \qquad L_2 = \lg\frac{I_2}{I_0}, \qquad \Delta L = L_1 - L_2 = \lg\frac{I_1}{I_0} - \lg\frac{I_2}{I_0} = \lg\frac{I_1 I_0}{I_0 I_2} = \lg\frac{I_1}{I_2},$$

$$\Delta L = \lg\frac{I_1}{I_2} = 0{,}2 \text{ Б}. \qquad \frac{I_1}{I_2} = 10^{0{,}2} = 1{,}58.$$

Ответ $\dfrac{I_1}{I_2} = 1{,}58$.

4.145 Разговор в соседней комнате громкостью 40 фон слышен так, как шепот громкостью 20 фон. Определите отношение интенсивностей этих звуков.

Дано

$\Gamma_1 = 40$ фон

$\Gamma_2 = 20$ фон

$\dfrac{I_1}{I_2}$ – ?

Решение

$L = \lg\dfrac{I}{I_0}$, $\Delta L = \lg\dfrac{I_1}{I_2}$, $\dfrac{I_1}{I_2} = 10^{\Delta L}$.

$\boxed{\Gamma_1 = 40 \text{ фон}}$ $L_1 = 40$ дБ $= 4$ Б;

$\boxed{\Gamma_2 = 20 \text{ фон}}$ $L_2 = 20$ дБ $= 2$ Б.

$\Delta L = 2$ Б, $\dfrac{I_1}{I_2} = 10^2 = 100$.

Ответ $\dfrac{I_1}{I_2} = 100$.

4.146 Определите, на сколько фонов увеличился уровень громкости звука, если интенсивность звука увеличилась: 1) в 1000 раз; 2) в 10 000 раз.

Ответ 1) на 30 фон; 2) на 40 фон.

4.147 Скорость распространения звуковой волны в газе с молярной массой $M = 2{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг/моль при $t = 20$ °С составляет 343 м/с. Определите отношение молярных теплоемкостей газа при постоянных давлении и объеме.

Дано

$M = 2{,}9 \cdot 10^{-2}$ кг/моль

$t = 20$ °С, $T = 293$ К

$v = 343$ м/с

$\dfrac{C_p}{C_V}$ — ?

Решение

$\dfrac{C_p}{C_V} = \gamma$, $v = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$,

$\gamma = \dfrac{v^2 M}{RT}$.

Ответ $\gamma = 1{,}4$.

4.148

Средняя квадратичная скорость $\langle v_{\text{кв}} \rangle$ молекул двухатомного газа при некоторых условиях составляет 480 м/с. Определите скорость v распространения звука в газе при тех же условиях.

Дано

$\langle v_{\text{кв}} \rangle = 480$ м/с

$i = 5$

v — ?

Решение

$$\langle v_{\text{кв}} \rangle = \sqrt{\frac{3RT}{M}}, \qquad v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \qquad \frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle}{v} = \sqrt{\frac{3}{\gamma}},$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}, \qquad v = \sqrt{\frac{i+2}{i}}\,\frac{\langle v_{\text{кв}} \rangle}{\sqrt{3}}.$$

Ответ $v = 328$ м/с.

4.149

Докажите, что формула $v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$, выражающая скорость звука в газе, может быть представлена в виде $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, где γ — отношение молярных теплоемкостей при постоянных давлении и объеме; p — давление газа; ρ — его плотность.

Дано

$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$

$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$

Решение

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}, \qquad m = \rho V,$$

$$pV = \frac{m}{M}RT, \qquad \frac{RT}{M} = \frac{pV}{m} = \frac{p}{\rho},$$

$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$, что и требовалось доказать.

Ответ $v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$.

4.150 Плотность ρ некоторого двухатомного газа при нормальном давлении равна 1,78 кг/м³. Определите скорость распространения звука в газе при этих условиях.

Дано

$\rho = 1{,}78$ кг/м³

$i = 5$

$p = 1{,}01 \cdot 10^5$ Па

υ — ?

Решение

$\upsilon = \sqrt{\dfrac{\gamma RT}{M}}$, $pV = \dfrac{m}{M}RT$, $m = \rho V$, $\gamma = \dfrac{i+2}{i}$,

$\upsilon = \sqrt{\dfrac{\gamma p}{\rho}}$.

Ответ $\upsilon = 282$ м/с.

4.151 Движущийся по реке теплоход дает свисток частотой $\nu_0 = 400$ Гц. Наблюдатель, стоящий на берегу, воспринимает звук свистка частотой $\nu = 395$ Гц. Принимая скорость звука $\upsilon = 340$ м/с, определите скорость движения теплохода. Приближается или удаляется теплоход?

Дано

$\nu_0 = 400$ Гц

$\nu = 395$ Гц

$\upsilon = 340$ м/с

$\upsilon_{\text{ист}}$ — ?

Решение

$\nu = \dfrac{(\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}})\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}}$, верхний знак — сближение; нижний знак — удаление.

$\upsilon_{\text{пр}} = 0$, $\pm \upsilon_{\text{ист}} = \dfrac{\upsilon\nu_0}{\nu} - \upsilon$.

Ответ $\upsilon_{\text{ист}} = 4{,}3$ м/с, теплоход удаляется.

4.152 В реке, скорость течения которой равна υ, установлен неподвижный источник колебаний, создающий в воде колебания частотой ν_0. По разные стороны на равных расстояниях от источника установлены неподвижные приемники колебаний Π_1 и Π_2. Определите частоты, регистрируемые этими приемниками.

Ответ $\nu_1 = \nu_2 = \nu_0$.

4.153 Наблюдатель, стоящий на станции, слышит гудок проходящего электровоза. Когда электровоз приближается, частота звуковых колебаний гудка равна ν_1, а когда удаляется — ν_2. Принимая, что скорость υ звука известна, определите: 1) скорость $\upsilon_{\text{ист}}$ электровоза; 2) собственную частоту ν_0 колебаний гудка.

Дано

ν_1

ν_2

υ

$\upsilon_{\text{ист}}$ — ?

ν_0 — ?

Решение

$$\nu = \frac{(\upsilon \pm \upsilon_{\text{пр}})\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}}, \qquad \upsilon_{\text{пр}} = 0, \qquad \nu = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}},$$

$$\nu_1 = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon - \upsilon_{\text{ист}}}, \qquad \nu_2 = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon + \upsilon_{\text{ист}}}, \qquad \upsilon_{\text{ист}} = \frac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\upsilon,$$

$$\nu_1 = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon - \dfrac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\upsilon} = \frac{\nu_0(\nu_1 + \nu_2)}{2\nu_2}, \qquad \nu_0 = \frac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}.$$

Ответ $\upsilon_{\text{ист}} = \dfrac{\nu_1 - \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}\upsilon$, $\nu_0 = \dfrac{2\nu_1\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}$.

4.154 Электропоезд проходит со скоростью 72 км/ч мимо неподвижного приемника и дает гудок, частота которого 300 Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определите скачок частоты, воспринимаемый приемником.

Дано

$\upsilon_{\text{ист}} = 72$ км/ч $= 20$ м/с

$\nu_0 = 300$ Гц

$\upsilon = 340$ м/с

$\Delta\nu$ — ?

Решение

$$\upsilon_{\text{пр}} = 0, \qquad \nu = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}}, \qquad \nu_1 = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon - \upsilon_{\text{ист}}},$$

$$\nu_2 = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon + \upsilon_{\text{ист}}}, \qquad \Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \frac{2\upsilon_{\text{ист}}\upsilon\nu_0}{(\upsilon - \upsilon_{\text{ист}})(\upsilon + \upsilon_{\text{ист}})}.$$

Ответ $\Delta\nu = 35{,}4$ Гц.

4.155 Поезд проходит со скоростью 54 км/ч мимо неподвижного приемника и подает звуковой сигнал. Приемник воспринимает скачок частотой $\Delta\nu = 53$ Гц. Принимая скорость звука равной 340 м/с, определите частоту тона звукового сигнала гудка поезда.

Дано

$\upsilon_{\text{ист}} = 54$ км/ч $= 15$ м/с

$\Delta\nu = 53$ Гц

$\upsilon = 340$ м/с

ν_0 — ?

Решение

$$\upsilon_{\text{пр}} = 0, \qquad \nu = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon \mp \upsilon_{\text{ист}}}, \qquad \nu_1 = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon - \upsilon_{\text{ист}}},$$

$$\nu_2 = \frac{\upsilon\nu_0}{\upsilon + \upsilon_{\text{ист}}}, \qquad \Delta\nu = \nu_1 - \nu_2 = \frac{2\upsilon_{\text{ист}}\upsilon\nu_0}{(\upsilon - \upsilon_{\text{ист}})(\upsilon + \upsilon_{\text{ист}})},$$

$$\nu_0 = \frac{(\upsilon - \upsilon_{\text{ист}})(\upsilon + \upsilon_{\text{ист}})\,\Delta\nu}{2\upsilon_{\text{ист}}\upsilon}.$$

Ответ $\nu_0 = 599$ Гц.

4.156 Два катера движутся навстречу друг другу. С первого катера, движущегося со скоростью $\upsilon_1 = 10$ м/с, посылается ультразвуковой сигнал частотой $\nu_1 = 50$ кГц, который распространяется в воде. После отражения от второго катера сигнал принят первым катером с частотой $\nu_2 = 52$ кГц. Принимая скорость распространения звуковых колебаний в воде равной 1,54 км/с, определите скорость движения второго катера.

Дано

$\upsilon_1 = 10$ м/с

$\nu_1 = 50$ кГц $= 5 \cdot 10^4$ Гц

$\nu_2 = 52$ кГц $= 5{,}2 \cdot 10^4$ Гц

$\upsilon = 1{,}54$ км/с $= 1540$ м/с

υ_2 — ?

Решение

$$\nu_1' = \frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_1}\nu_1, \qquad \nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_2}\nu_1',$$

$$\nu_2 = \frac{\upsilon + \upsilon_1}{\upsilon - \upsilon_2} \cdot \frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_1}\nu_1, \qquad \frac{\upsilon + \upsilon_2}{\upsilon - \upsilon_2} = \frac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon + \upsilon_1} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1},$$

$$\frac{\upsilon - \upsilon_1}{\upsilon + \upsilon_1} \cdot \frac{\nu_2}{\nu_1} = b, \qquad \upsilon_2 = \frac{b - 1}{b + 1}\upsilon.$$

Ответ $\upsilon_2 = 20{,}2$ м/с.

4.3. Электромагнитные волны

4.157 Скорость распространения электромагнитных волн в некоторой среде составляет $v = 250$ Мм/с. Определите длину волны электромагнитных волн в этой среде, если их частота в вакууме $\nu_0 = 1$ МГц.

Дано	***Решение***
$v = 250$ Мм/с $= 2{,}5 \cdot 10^8$ м/с $\nu_0 = 1$ МГц $= 10^6$ Гц λ — ?	$\nu = \nu_0$, $\qquad \lambda = vT = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{v}{\nu_0}$.

Ответ $\lambda = 250$ м.

4.158 Для демонстрации преломления электромагнитных волн Герц применял призму, изготовленную из парафина. Определите показатель преломления парафина, если его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$ и магнитная проницаемость $\mu = 1$.

Ответ $n = 1{,}41$.

4.159 Электромагнитная волна с частотой $\nu = 5$ МГц переходит из немагнитной среды с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$ в вакуум. Определите приращение ее длины волны.

Дано	***Решение***
$\nu = 5$ МГц $= 5 \cdot 10^6$ Гц $\varepsilon = 2$ $\mu = 1$ $\Delta\lambda$ — ?	$\lambda_0 = \dfrac{c}{\nu}$, $\qquad \lambda = \dfrac{v}{\nu} = \dfrac{c}{n\nu} = \dfrac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu} \cdot \nu}$, $\Delta\lambda = \lambda_0 - \lambda = \dfrac{c}{\nu}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right)$.

Ответ $\Delta\lambda = 17{,}6$, м.

4.160 Радиолокатор обнаружил в море подводную лодку, отраженный сигнал от которой дошел до него за $t = 36$ мкс. Учитывая, что диэлектрическая проницаемость воды $\varepsilon = 81$, определите расстояние от локатора до подводной лодки.

Дано	*Решение*
$t = 36$ мкс $= 3{,}6 \cdot 10^{-5}$ с $\varepsilon = 81$ $\mu = 1$	$2s = vt$, $\quad v = \frac{c}{n} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}$,
s — ?	$s = \frac{ct}{2\sqrt{\varepsilon\mu}}$.

Ответ $s = 600$ м.

4.161 После того как между внутренним и внешним проводниками кабеля поместили диэлектрик, скорость распространения электромагнитных волн в кабеле уменьшилась на 63%. Определите диэлектрическую восприимчивость вещества прослойки.

Дано	*Решение*
$\frac{c - v}{c} = 0{,}63$	$1 - \frac{v}{c} = 0{,}63$, $\quad v = \left.\frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\right\vert_{\mu=1} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, $\quad v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$,
$\varkappa$ — ?	$\varkappa = \varepsilon - 1$, $\quad \varepsilon = \varkappa + 1$, $\quad 1 - \frac{1}{\sqrt{\varkappa + 1}} = 0{,}63$,

$$\varkappa = \left(\frac{1}{1 - 0{,}63}\right)^2 - 1.$$

Ответ $\varkappa = 6{,}3$.

4.162 Колебательный контур содержит конденсатор емкостью $C = 0{,}5$ нФ и катушку индуктивностью $L = 0{,}4$ мГн. Определите длину волны излучения, генерируемого контуром.

Ответ $\lambda = 843$ м.

4.163 Определите длину электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, если максимальный заряд на обкладках конденсатора $Q_m = 50$ нКл, а максимальная сила тока в контуре $I_m = 1{,}5$ А. Активным сопротивлением контура пренебречь.

Дано	Решение
$Q_m = 50$ нКл $= 5 \cdot 10^{-8}$ Кл $I_m = 1{,}5$ А λ — ?	$Q = Q_m \cos\omega t$, $\quad I = \frac{dQ}{dt} = -\omega Q_m \sin\omega t$, $I_m = \omega Q_m$, $\quad \omega = 2\pi\nu$, $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi c Q_m}{I_m}$.

Ответ $\lambda = 62{,}8$ м.

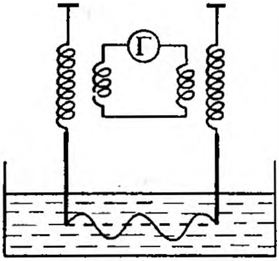
4.164 Длина λ электромагнитной волны в вакууме, на которую настроен колебательный контур, равна 12 м. Пренебрегая активным сопротивлением контура, определите максимальный заряд Q_m на обкладках конденсатора, если максимальная сила тока в контуре $I_m = 1$ А.

Дано	Решение
$\lambda = 12$ м $I_m = 1$ А Q_m — ?	$\lambda = cT$, $\quad T = 2\pi\sqrt{LC}$, $\quad \frac{Q_m^2}{2C} = \frac{LI_m^2}{2}$, $LC = \frac{Q_m^2}{I_m^2}$, $\quad T = 2\pi\frac{Q_m}{I_m}$, $\quad \lambda = c \cdot 2\pi\frac{Q_m}{I_m}$, $Q_m = \frac{\lambda I_m}{2\pi c}$.

Ответ $Q_m = 6{,}37$ нКл.

4.165 Два тонких изолированных стержня погружены в трансформаторное масло и индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний. При частоте колебаний 505 МГц в системе возникают стоячие волны, расстояние между соседними пучностями которых равно 20 см. Принимая магнитную проницаемость масла равной единице, определите его диэлектрическую проницаемость.

Дано	Решение
$\nu = 505$ МГц $\mu = 1$ $l = 20$ см $= 0{,}2$ м ε — ?	$l = \frac{\lambda}{2}$, $\lambda = \frac{\upsilon}{\nu}$,



$$\upsilon = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \qquad l = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}\cdot 2\nu}, \qquad \varepsilon = \frac{c^2}{4l^2\nu^2}.$$

Ответ $\varepsilon = 2.2$.

4.166 Два параллельных провода, одни концы которых изолированы, а вторые индуктивно соединены с генератором электромагнитных колебаний, погружены в спирт. При соответствующем подборе частоты колебаний в системе возникают стоячие волны. Расстояние между двумя узлами стоячих волн на проводах равно 40 см. Принимая диэлектрическую проницаемость спирта $\varepsilon = 26$, а его магнитную проницаемость $\mu = 1$, определите частоту колебаний генератора.

Ответ $\nu = 73{,}5$ МГц.

4.167 Покажите, что плоская монохроматическая волна $E_y = E_{0y}\cos(\omega t - kx + \varphi)$ удовлетворяет волновому уравнению $\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2}$, где υ — фазовая скорость электромагнитных волн.

4.168 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 10 В/м. Определите амплитуду напряженности магнитного поля волны.

Дано

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$E_0 = 10$ В/м

H_0 — ?

Решение

$$\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E = \sqrt{\mu_0 \mu} H \,,$$

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx)\,, \qquad H = H_0 \cos(\omega t - kx)\,.$$

При $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$ $\sqrt{\varepsilon_0} E_0 = \sqrt{\mu_0} H_0$,

$$H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot E_0\,.$$

Ответ $H_0 = 26{,}5$ мА/м.

4.169 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 1 мА/м. Определите амплитуду напряженности электрического поля волны.

Ответ $E_m = 0{,}377$ В/м.

4.170 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская монохроматическая электромагнитная волна, описываемая уравнениями $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx)$. Эта волна отражается от плоскости, перпендикулярной оси x. Запишите уравнения, описывающие отраженную волну, а также объясните их физический смысл.

• •

Уравнение плоской электромагнитной волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\,; \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx + \varphi)\,,$$

где $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ — соответственно амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей волны; ω — круговая частота; $k = \omega / v$ — волновое число; φ — начальные фазы колебаний в точках с координатой $x = 0$.

4.171 Рассмотрите суперпозицию двух плоских монохроматических электромагнитных волн с одинаковыми амплитудами $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$, распространяющихся вдоль оси x в противоположных направлениях. Начальную фазу прямой и обратной волн примите равной нулю. Определите координаты пучностей и узлов для: 1) электрического вектора $\mathbf{E}$; 2) магнитного вектора $\mathbf{H}$ стоячей волны.

---

1) $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - kx)$ — прямая волна

$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t + kx)$ — отраженная волна

$x_п$ — ? $x_у$ — ?

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_0[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx)] = 2\mathbf{E}_0 \cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t .$$

Пучности $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$ **Узлы** $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m+1)\pi$.

$x_п = \pm m\frac{\lambda}{2}$, $x_у = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

---

2) $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t - kx)$ — прямая волна

$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0 \cos(\omega t + kx + \pi)$ — отраженная волна

$x_п$ — ? $x_у$ — ?

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_0[\cos(\omega t - kx) + \cos(\omega t + kx + \pi)] =$$

$$= \mathbf{H}_0[\cos(\omega t - kx) - \cos(\omega t + kx)] = 2\mathbf{H}_0 \sin\frac{2\pi x}{\lambda}\sin\omega t .$$

Пучности $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm(m+1)\pi$ **Узлы** $\frac{2\pi x}{\lambda} = \pm m\pi$.

$x_п = \pm\left(m + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$, $x_у = \pm m\frac{\lambda}{2}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$

Пучности $\mathbf{E}$ совпадают с узлами $\mathbf{H}$ и наоборот.

4.172 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности магнитного поля волны равна 0,15 А/м. Определите давление, оказываемое волной на тело. Воспользуйтесь результатом выводов теории Максвелла о том, что если тело полностью поглощает падающую на него энергию, то давление равно среднему значению объемной плотности энергии в падающей электромагнитной волне.

Дано

$\varepsilon = 1$

$\mu = 1$

$H_0 = 0{,}15$ А/м

$P = \langle w \rangle$

p — ?

Решение

$$\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0}\,E = \sqrt{\mu\mu_0}\,H,$$

$$E = E_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$H = H_0 \cos(\omega t - kx),$$

$$w_{\text{э}} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}, \qquad w_{\text{м}} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2},$$

$$w_{\text{э}} = w_{\text{м}},$$

$$w = w_{\text{э}} + w_{\text{м}} = 2w_{\text{э}} = 2w_{\text{м}}, \qquad w = 2w_{\text{м}} = \mu_0 \mu H^2 = \mu_0 \mu H_0^2 \cos^2(\omega t - kx),$$

$$\langle w \rangle = \left\langle \mu_0 \mu H_0^2 \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle, \qquad \left\langle \cos^2(\omega t - kx) \right\rangle = \frac{1}{2},$$

$$p = \langle w \rangle = \frac{\mu_0 \mu H_0^2}{2}.$$

Ответ $p = 14{,}1$ нПа.

4.173 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна и падает по нормали на поверхность тела, полностью ее поглощающего. Амплитуда напряженности электрического поля волны равна 2 В/м. Определите давление, оказываемое волной на тело.

Ответ $p = 17{,}7$ пПа.

4.174 Плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси x. Амплитуда напряженности электрического поля волны $E_0 = 5$ мВ/м, амплитуда напряженности магнитного поля волны $H_0 = 1$ мА/м. Определите энергию, перенесенную волной за время $t = 10$ мин через площадку, расположенную перпендикулярно оси x, площадью поверхности $S = 15$ см². Период волны $T \ll t$.

Ответ $W = \frac{1}{2} E_0 H_0 S t = 2{,}25$ мкДж.

4.175 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности электрического поля волны составляет 50 мВ/м. Определите интенсивность волны I, т. е. среднюю энергию, проходящую через единицу поверхности в единицу времени.

Дано	*Решение*
$\varepsilon = 1$ $\mu = 1$ $E_0 = 50$ мВ/м $= 5 \cdot 10^{-2}$ В/м I – ?	$I = \langle S \rangle$, $\quad S = EH = E_0 H_0 \cos^2(\omega t - kx)$, $\langle S \rangle = \frac{1}{2} E_0 H_0$, $\quad \langle \cos^2(\omega t - kx) \rangle = \frac{1}{2}$, $\sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon} E_0 = \sqrt{\mu_0 \mu} H_0$, $\quad H_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot E_0$,

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} \cdot E_0^2 .$$

Ответ $I = 3{,}32$ мкВт/м².

4.176 В вакууме вдоль оси x распространяется плоская электромагнитная волна. Амплитуда напряженности магнитного поля составляет 5 мА/м. Определите интенсивность волны.

Ответ $I = 4{,}71$ мВт/м².

5. Оптика. Квантовая природа излучения

5.1. Элементы геометрической и электронной оптики

5.1 На горизонтальном дне бассейна глубиной $h = 1{,}5$ м лежит плоское зеркало. Луч света входит в воду под углом $i_1 = 45°$. Определите расстояние s от места вхождения луча в воду до места выхода его на поверхность воды после отражения от зеркала. Показатель преломления воды $n = 1{,}33$.

Дано

$h = 1{,}5$ м

$n = 1{,}33$

$i_1 = 45°$

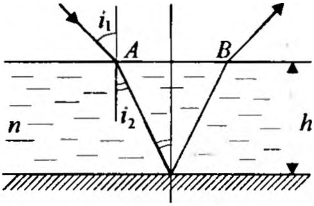
s — ?

Решение

$s = AB = 2h\,\mathrm{tg}\,i_2$,

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n,$$

$$\sin i_2 = \frac{\sin i_1}{n},$$



$$\mathrm{tg}\,i_2 = \frac{\sin i_2}{\cos i_2} = \frac{\sin i_1}{n\sqrt{1 - \frac{\sin^2 i_1}{n^2}}},$$

$$s = \frac{2h\sin i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}.$$

Ответ $s = 1{,}88$ м.

5.2 Луч света падает на плоскую границу раздела двух сред, частично отражается и частично преломляется. Определите угол падения, при котором отраженный луч перпендикулярен преломленному лучу.

Дано

n_{21}

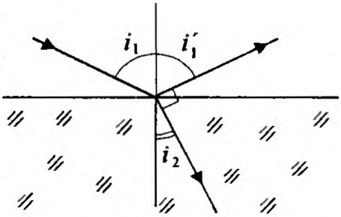
$i_1' + i_2 = 90°$

i_1 — ?

Решение

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21},$$

$i_1' = i_1$,



$i_2 = 90° - i_1' = 90° - i_1$, $\sin i_2 = \sin(90° - i_1) = \cos i_1$,

$$\frac{\sin i_1}{\cos i_1} = \mathrm{tg}\,i_1 = n_{21}, \quad i_1 = \mathrm{arctg}\,n_{21}.$$

Ответ $i_1 = \mathrm{arctg}\,n_{21}$.

5.3 На плоскопараллельную стеклянную ($n = 1{,}5$) пластинку толщиной $d = 5$ см падает под углом $i = 30°$ луч света. Определите боковое смещение луча, прошедшего сквозь эту пластинку.

Дано

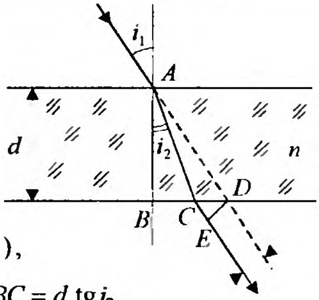
$n = 1{,}5$

$d = 5\ \text{см} = 5 \cdot 10^{-2}\ \text{м}$

$i_1 = 30°$

x — ?

Решение



$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21},$$

$$\sin i_2 = \frac{\sin i_1}{n},$$

$$x = ED = CD \sin(90° - i_1),$$

$$CD = BD - BC, \qquad BD = \frac{d}{\operatorname{tg}(90 - i_1)}, \qquad BC = d \operatorname{tg} i_2,$$

$$x = \left(\frac{d}{\operatorname{tg}(90° - i_1)} - d \operatorname{tg} i_2\right) \sin(90° - i_1), \qquad x = d \sin i_1 \left(1 - \frac{\cos i_1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i_1}}\right).$$

Ответ $x = 9{,}69$ мм.

5.4 Между двумя стеклянными пластинками с показателями преломления n_1 и n_2 находится тонкий слой жидкости. Луч света, распространяющийся в первой пластинке под углом i_1 (меньше предельного), выходя из слоя жидкости, входит во вторую пластинку под углом i_2. Докажите. что в данном случае выполняется закон преломления $\sin i_1 / \sin i_2 = n_2 / n_1$ независимо от присутствия слоя жидкости между пластинами.

Дано

n_1

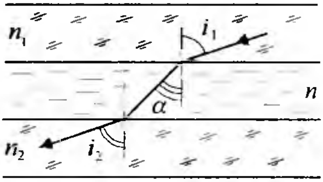
n_2

$i_1 < i_{\text{пред}}$

i_2

$\left(\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2} = \dfrac{n_2}{n_1}\right)$ — ?

Решение



$$\frac{\sin i_1}{\sin \alpha} = \frac{n}{n_1},$$

$$\frac{\sin \alpha}{\sin i_2} = \frac{n_2}{n},$$

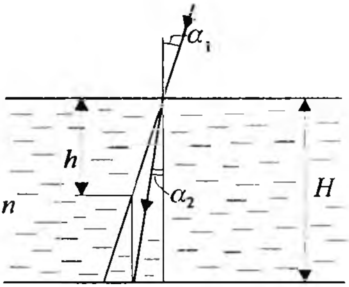
$$\sin \alpha = \sin i_2 \cdot \frac{n_2}{n}, \qquad \frac{\sin i_1}{\sin i_2} \cdot \frac{n}{n_2} = \frac{n}{n_1}.$$

Ответ $\dfrac{\sin i_1}{\sin i_2} = \dfrac{n_2}{n_1}.$

5.5 Человек с лодки рассматривает предмет, лежащий на дне водоема ($n = 1{,}33$). Определите его глубину, если при определении “на глаз” по вертикальному направлению глубина водоема кажется равной 1,5 м.

Дано	*Решение*
$h = 1{,}5$ м $n = 1{,}33$ H – ?	$h\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 = H\,\mathrm{tg}\,\alpha_2$, $H = h\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2}$,

α_1, α_2 — малы,



$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = n, \qquad \frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} \approx n, \qquad H = hn.$$

Ответ $H = 2$ м.

5.6 Человек с лодки рассматривает предмет, лежащий на дне. Глубина водоема везде одинакова и равна H, показатель преломления воды равен n. Определите зависимость кажущейся глубины h предмета от угла i, образуемого лучом зрения с нормалью к поверхности воды.

Ответ $$h = \frac{Hn^2\cos^3 i}{(n^2 - \sin^2 i)^{3/2}}.$$

5.7 Предельный угол полного отражения на границе стекло—жидкость $i_{\text{пр}} = 65°$. Определите показатель преломления жидкости, если показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Дано	*Решение*
$i_{\text{пр}} = 65°$ $n = 1{,}5$ $n_{\text{ж}}$ — ?	$\sin i_{\text{пр}} = \dfrac{n_{\text{ж}}}{n}$, $\qquad n_{\text{ж}} = n\sin i_{\text{пр}}$. **Ответ** $n_{\text{ж}} = 1{,}36$.

5.8

Луч света выходит из стекла в вакуум. Предельный угол $i_{\text{пр}} = 42°$. Определите скорость света в стекле.

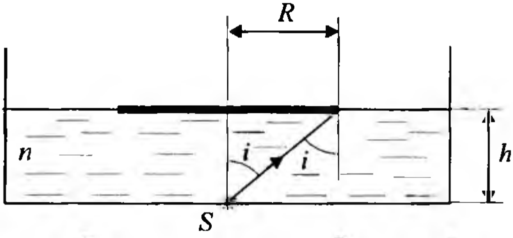
Дано	Решение
$i_{\text{пр}} = 42°$	$\sin i_{\text{пр}} = \dfrac{1}{n}$, $\qquad v = \dfrac{c}{n} = c \sin i_{\text{пр}}$.
v – ?	

Ответ $v = 201$ Мм/с.

5.9

На дне сосуда, наполненного водой ($n = 1{,}33$) до высоты $h = 25$ см, находится точечный источник света. На поверхности воды плавает непрозрачная пластинка так, что центр пластинки находится над источником света. Определите минимальный диаметр пластинки, при котором свет не пройдет сквозь поверхность воды.

Дано	Решение
$h = 25$ см $= 0{,}25$ м $n = 1{,}33$	
d — ?	



$$\sin i \geqslant \frac{1}{n}, \qquad \sin i = \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}}, \qquad \frac{R}{\sqrt{h^2 + R^2}} \geqslant \frac{1}{n},$$

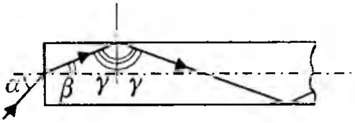
$$R^2 n^2 \geqslant h^2 + R^2, \qquad R^2(n^2 - 1) \geqslant h^2, \qquad R \geqslant \frac{h}{\sqrt{n^2 - 1}},$$

$$d = 2R, \qquad d \geqslant \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}}.$$

Ответ $d \geqslant 57$ см.

5.10 Длинное тонкое волокно, выполненное из прозрачного материала с показателем преломления $n = 1{,}35$, образует световод. Определите максимальный угол α к оси световода, под которым световой луч еще может падать на торец, чтобы пройти световод с минимальным ослаблением.

Дано	*Решение*
$n = 1{,}35$ α — ?	$\gamma = i_{\text{пр}}$, $\sin i_{\text{пр}} = \dfrac{1}{n}$,



$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n, \qquad \sin\beta = \cos\gamma, \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\gamma} = n, \qquad \sin\gamma = \frac{1}{n},$$

$$\sin\alpha = n\cos\gamma = n\sqrt{1-\sin^2\gamma} = n\sqrt{1-\frac{1}{n^2}} = \sqrt{n^2-1}, \qquad \alpha = \arcsin\sqrt{n^2-1}.$$

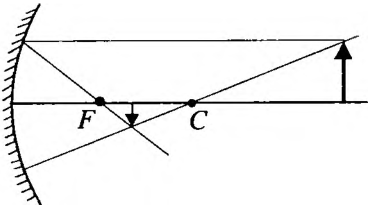
Ответ $\alpha = 65^\circ$.

5.11 Расстояние a от предмета до вогнутого сферического зеркала равно двум радиусам кривизны. Определите положение изображения предмета и постройте это изображение.

Дано	*Решение*
$a = 2R$ b — ?	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{2}{R} = \dfrac{1}{f}$, $a = 2R$,

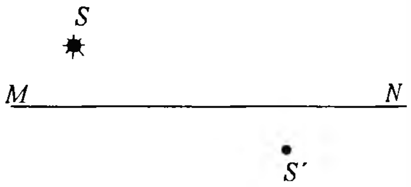
$$\frac{1}{2R} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R}, \qquad \frac{1}{b} = \frac{1}{R}\left(2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2R},$$

$$b = \frac{2}{3}R.$$

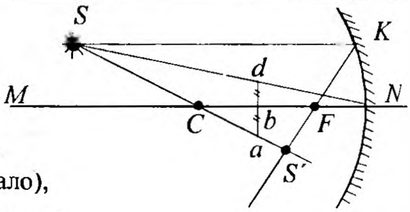


Ответ $b = \dfrac{2}{3}R$.

5.12 На рисунке показаны положения главной оптической оси MN сферического зеркала, светящейся точки S и ее изображения S'. Определите построением положение центра сферического зеркала и его фокуса. Укажите вид использованного зеркала.

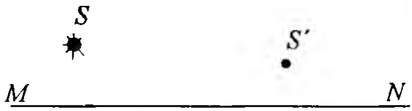


Дано	*Решение*
MN S S'	$SS' \to C$, $ab = bd$ (a — любая точка на SS'), $Sd \to P$ (зеркало), $SK \parallel MN$, $KS' \to F$.
C — ? F — ?	



Ответ C, F, зеркало вогнутое.

5.13 На рисунке показаны положения главной оптической оси MN сферического зеркала, светящейся точки S и ее изображения S'. Определите построением положение центра сферического зеркала и его фокуса. Укажите вид использованного зеркала.



5.14 Вогнутое сферическое зеркало дает действительное изображение, которое в три раза больше предмета. Определите фокусное расстояние зеркала, если расстояние между предметом и изображением равно 20 см.

Ответ $f = 7{,}5$ см.

5.15 Выпуклое сферическое зеркало имеет радиус кривизны 60 см. На расстоянии 10 см от зеркала поставлен предмет высотой 2 см. Определите: 1) положение изображения; 2) высоту изображения. Постройте чертеж.

Дано

$R = 60\ \text{см} = 0{,}6\ \text{м}$

$a = 10\ \text{см} = 0{,}1\ \text{м}$

$h = 2\ \text{см} = 0{,}02\ \text{м}$

1) b — ?

2) H — ?

Решение

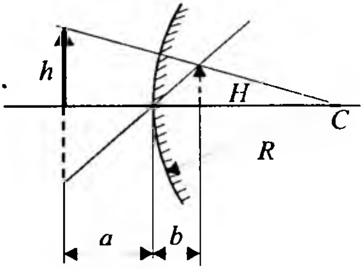
$$-\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{b} = \frac{2}{R} + \frac{1}{a},$$

$$b = \frac{aR}{2a + R},$$

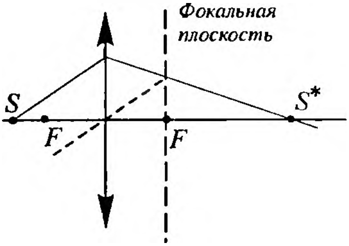
$$\frac{h}{H} = \frac{R + a}{R - b},$$

$$H = h\frac{R - b}{R + a}.$$

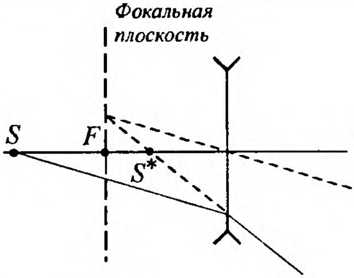


Ответ 1) $b = 7{,}5$ см; 2) $H = 1{,}5$ см.

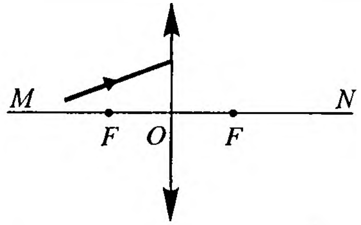
5.16 Постройте изображение произвольной точки S, которая лежит на главной оптической оси собирающей линзы.



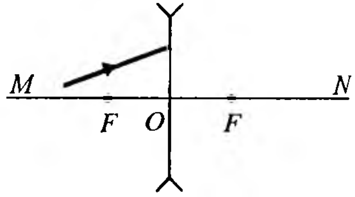
5.17 Постройте изображение произвольной точки S, которая лежит на главной оптической оси рассеивающей линзы.



5.18 Определите построением ход луча после преломления его собирающей (рис. *а*) и рассеивающей (рис. *б*) линзами. На рисунках *MN* — положение главной оптической оси; *O* — оптический центр линзы; *F* — фокусы линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

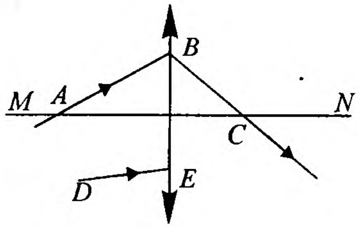


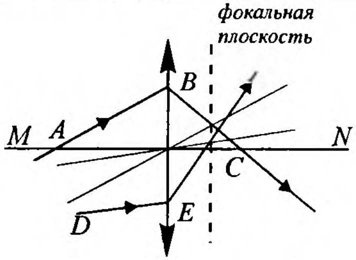
а)



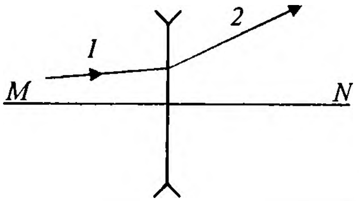
б)

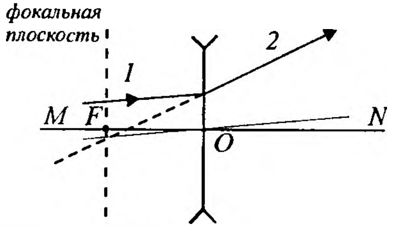
5.19 На рисунке показаны положение главной оптической оси *MN* тонкой собирающей линзы и ход одного луча *ABC* через эту линзу. Постройте ход произвольного луча *DE*. Среды по обе стороны линзы одинаковы.



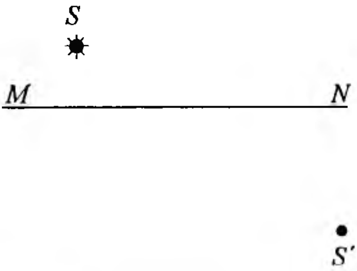

фокальная плоскость
B
M
A
N
C
D
E

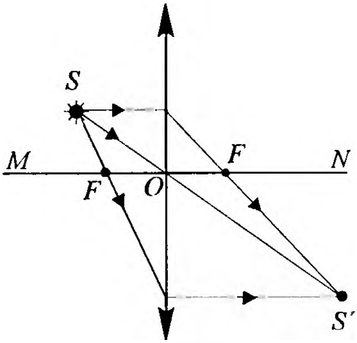
5.20 На рисунке показаны положение главной оптической оси *MN* тонкой рассеивающей линзы, ход луча *1*, падающего на линзу, и преломленного луча *2*. Определите построением оптический центр и фокусное расстояние линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.



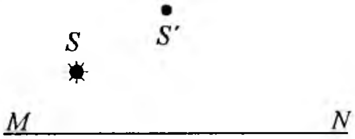

фокальная плоскость
2
1
M
F
N
O

5.21 На рисунке показаны положения главной оптической оси MN тонкой линзы, светящейся точки S и ее изображения S'. Определите построением оптический центр линзы и ее фокусы. Укажите вид линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.

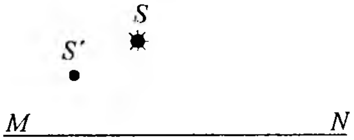




5.22 На рисунке показаны положения главной оптической оси MN тонкой линзы, светящейся точки S и ее изображения S'. Определите построением положения оптического центра линзы и ее фокусов. Укажите вид линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.



5.23 На рисунке показаны положения главной оптической оси MN тонкой линзы, светящейся точки S и ее изображения S'. Определите построением положения оптического центра линзы и ее фокусов. Укажите вид линзы. Среды по обе стороны линзы одинаковы.



5.24 Двояковыпуклая тонкая линза (показатель преломления n) с радиусами кривизны R_1 и R_2 находится в однородной среде с показателем преломления n_1. Выведите формулу этой линзы, используя принцип Ферма́.

5.25 Выпукло-вогнутая тонкая линза (показатель преломления n) с радиусами кривизны R_1 (передняя поверхность) и R_2 (задняя поверхность) находится в однородной среде с показателем преломления n_1. Выведите формулу этой линзы, рассматривая последовательное преломление света на двух сферических поверхностях.

Ответ $\left(\frac{N}{b}-\frac{1}{a}\right)=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$, где $N=n/n_1$.

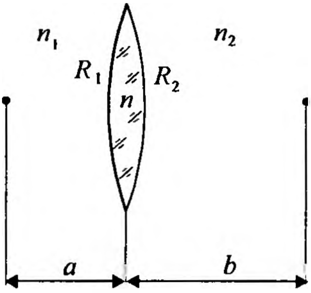
5.26 Необходимо изготовить плосковыпуклую линзу с оптической силой $\Phi=4$ дптр. Определите радиус кривизны выпуклой поверхности линзы, если показатель преломления материала линзы равен 1,6.

Дано	***Решение***
$\Phi=4$ дптр $n=1{,}6$ R — ?	$\frac{1}{f}=(N-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$, где $N=\frac{n}{n_1}$, $n_1=1$, $N=n$,

$\frac{1}{f}=\Phi$, $R_1=\infty$, $R_2=R$, $\Phi=(n-1)\frac{1}{R}$, $R=\frac{n-1}{\Phi}$.

Ответ $R=15$ см.

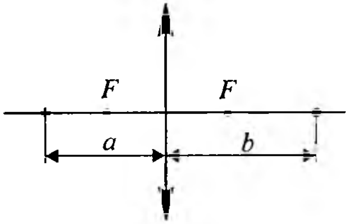
5.27 Тонкая линза с показателем преломления n и радиусами кривизны R_1 и R_2 находится на границе раздела двух сред с показателями преломления n_1 и n_2. Пусть a и b — соответственно расстояния от предмета до линзы и от изображения до линзы; f_1 и f_2 — соответствующие фокусные расстояния. Докажите справедливость соотношения $\frac{f_1}{a}+\frac{f_2}{b}=1$.



5.28

Определите расстояние a от двояковыпуклой линзы до предмета, при котором расстояние от предмета до действительного изображения будет минимальным.

Дано	Решение
$l = l_{\min}$	$l = a + b$,
a — ?	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{f}$,



$\dfrac{a+b}{ab} = \dfrac{1}{f}$, $\quad b = l - a$, $\quad lf = al - a^2$,

$l = \dfrac{a^2}{a-f}$, $\quad \dfrac{dl}{da} = 0$ (условие min): $\quad \dfrac{dl}{da} = \dfrac{2a(a-f)-a^2}{(a-f)^2} = 0$,

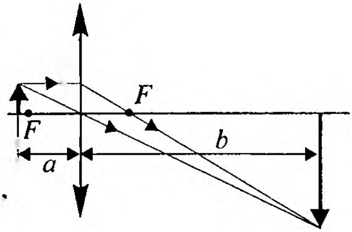
$2a(a-f) - a^2 = 0$, $\qquad a = 2f$.

Ответ $a = 2f$.

5.29

Двояковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1{,}5$ имеет одинаковые радиусы кривизны поверхностей, равные 10 см. Изображение предмета с помощью этой линзы оказывается в 5 раз больше предмета. Определите расстояние от предмета до изображения.

Дано	Решение
$n = 1{,}5$ $R = 10$ см $= 0{,}1$ м $\eta = 5$	$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} = (n-1)\dfrac{2}{R}$,
$(a+b)$ — ?	$\dfrac{b}{a} = \eta$, $\quad b = \eta a$,



$a + b = ab(n-1)\dfrac{2}{R}$.

$a(1+\eta) = a^2\eta(n-1)\dfrac{2}{R}$, $\qquad a = \dfrac{(1+\eta)R}{2\eta(n-1)}$, $\qquad a + b = (1+\eta)a = \dfrac{(1+\eta)^2 R}{2\eta(n-1)}$.

Ответ $(a+b) = 0{,}72$ м.

5.30 Из тонкой плоскопараллельной стеклянной пластинки изготовлены три линзы. Фокусное расстояние линз *1* и *2*, сложенных вместе, равно $-f'$, фокусное расстояние линз *2* и *3* равно $-f''$. Определите фокусное расстояние каждой из линз.

Дано

$-f'$

$-f''$

f_1 — ?

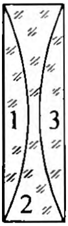
f_2 — ?

f_3 — ?

Решение

$$\frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}=0, \qquad \frac{1}{f_1}-\frac{1}{f_2}=-\frac{1}{f'},$$

$$-\frac{1}{f_2}+\frac{1}{f_3}=-\frac{1}{f''}.$$



Ответ $f_1=f''$, $\quad f_2=\dfrac{f'f''}{f'+f''}$, $\quad f_3=f'$.

5.31 Двояковыпуклая линза из стекла ($n=1{,}5$) обладает оптической силой $\Phi=4$ дптр. При ее погружении в жидкость ($n_1=1{,}7$) линза действует как рассеивающая. Определите: 1) оптическую силу линзы в жидкости; 2) фокусное расстояние линзы в жидкости; 3) положение изображения точки, находящейся на главной оптической оси на расстоянии трех фокусов от линзы ($a=3f$) для собирающей линзы и рассеивающей линзы. Постройте изображение точки для обоих случаев.

Дано

$n=1{,}5$

$\Phi=4$ дптр

$n_1=1{,}7$

$a=a_1=3f$

1) Φ_1 — ?

2) f_1 — ?

3) b — ?

b_1 — ?

Решение

$$\Phi=\frac{1}{f}=(n-1)\frac{2}{R}, \qquad R=\frac{2(n-1)}{\Phi}, \qquad f=\frac{1}{\Phi},$$

$$\Phi_1=\left(\frac{n}{n_1}-1\right)\frac{2}{R}, \quad f_1=\frac{1}{\Phi_1}, \quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}, \quad b=\frac{af}{a-f},$$

$$b=\frac{3f^2}{3f-f}=\frac{3f}{2}, \qquad \frac{1}{a_1}-\frac{1}{b_1}=-\frac{1}{f_1}, \qquad b_1=\frac{a_1f_1}{a_1+f_1},$$

$$b_1=\frac{3f\,f_1}{f_1+3f}.$$

Ответ 1) $\Phi_1=-0{,}94$ дптр;

2) $f_1=-1{,}06$ м;

3) $b=37{,}5$ см, $\quad b_1=44$ см.

5.32 Докажите, что освещенность, создаваемая изотропным (сила света источника не зависит от направления) точечным источником света I на бесконечно малой площадке, удаленной на расстояние r от источника, равна $E = \frac{I}{r^2}\cos i$, где i — угол падения луча на площадку.

Дано

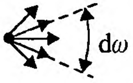
I
r
i

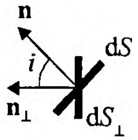
$E = \frac{I}{r^2}\cos i$ — ?

Решение

$$E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S},$$

$$\mathrm{d}S = \frac{\mathrm{d}S_\perp}{\cos i},$$





$$\mathrm{d}S_\perp = r^2\,\mathrm{d}\omega, \qquad E = \frac{\mathrm{d}\Phi}{r^2\,\mathrm{d}\omega}\cos i, \qquad I = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}\omega},$$

$$E = \frac{I}{r^2}\cos i.$$

5.33 На какую высоту над чертежной доской необходимо повесить лампочку мощностью $P = 300$ Вт, чтобы освещенность доски под лампочкой была равна $E = 60$ лк. Наклон доски составляет 30°, а световая отдача лампочки равна 15 лм/Вт. Примите, что полный световой поток, испускаемый изотропным точечным источником света, $\Phi_0 = 4\pi I$.

Дано

$P = 300$ Вт
$E = 60$ лк
$i = 30°$
$L = 15$ лм/Вт
$\Phi_0 = 4\pi I$

h — ?

Решение

$$\Phi_0 = LP, \qquad \Phi_0 = 4\pi I,$$

$$I = \frac{LP}{4\pi}, \qquad E = \frac{I}{h^2}\cos i = \frac{LP}{4\pi h^2}\cos i,$$

$$h = \sqrt{\frac{LP\cos i}{4\pi E}}.$$

Ответ $h = 2{,}27$ м.

5.34

Линза позволяет при последовательном применении получить два изображения одного и того же предмета, причем увеличения оказываются равными $\eta_1 = 5$ и $\eta_2 = 2$. Определите, как при этом изменяется освещенность изображений.

Дано

$\eta_1 = 5$

$\eta_2 = 2$

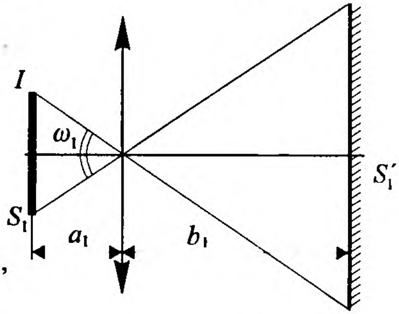
$\frac{E_1}{E_2} - ?$

Решение

$\Phi_1 = I\omega_1$, $\omega_1 = \frac{S_1}{a_1^2}$,

S_1 и S_1' — площади предмета и изображения.

$\frac{S_1'}{S_1} = \eta_1^2$,



$$E_1 = \frac{\Phi_1}{S_1'} = \frac{I\omega_1}{S_1'} = \frac{IS_1}{a_1^2 S_1'} = \frac{I}{a_1^2 \eta_1^2},$$

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f}, \quad \eta_1 = \frac{b_1}{a_1}, \quad a_1 = \frac{\eta_1 + 1}{\eta_1} \cdot f,$$

$$E_1 = \frac{I\eta_1^2}{(\eta_1 + 1)^2 f^2 \eta_1^2} = \frac{I}{(\eta_1 + 1)^2 f^2}, \quad E_2 = \frac{I}{(\eta_2 + 1)^2 f^2}, \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{(\eta_2 + 1)^2}{(\eta_1 + 1)^2}.$$

Ответ $\frac{E_1}{E_2} = \frac{1}{4}$.

5.35

Светильник в виде равномерно светящегося шара радиусом $r = 10$ см имеет силу света $I = 100$ кд. Определите для этого светильника: 1) полный световой поток Φ_0; 2) светимость R.

Дано

$r = 10$ см $= 0{,}1$ м

$I = 100$ кд

1) Φ_0 — ?

2) R — ?

Решение

$\Phi_0 = 4\pi I$, $R = \frac{\Phi_0}{S}$, $S = 4\pi r^2$,

$R = \frac{I}{r^2}$.

Ответ 1) $\Phi_0 = 1{,}26$ клм;

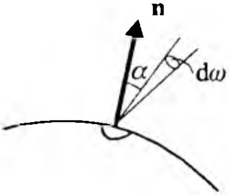
2) $R = 10$ клм/м².

5.36 Отверстие в корпусе фонаря закрыто идеально матовым стеклом (т. е. яркость источника не зависит от направления) размером 7,5×10 см. Сила света I фонаря в направлении, составляющем угол $\varphi = 30°$, равна 12 кд. Определите яркость B стекла.

Ответ $B = \dfrac{I}{S\cos\varphi} = 1{,}85$ ккд/м².

5.37 Докажите, что в том случае, когда яркость источника не зависит от направления, светимость R и яркость B связаны соотношением $R = \pi B$.

Дано	*Решение*
$B \neq B(\alpha)$	$R = \dfrac{\Phi}{S}$,
$R = \pi B$	$\mathrm{d}\Phi = B_\alpha S \cos\alpha \, \mathrm{d}\omega$,



$\mathrm{d}\omega = \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha \, \mathrm{d}\varphi$,

φ — азимутальный угол,

$\varphi \to 0$ до 2π, $\alpha \to 0$ до $\pi/2$,

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = S \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi/2} B_\alpha \sin\alpha \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 2\pi S \int_0^{\pi/2} B_\alpha \sin\alpha \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha =$$

$$= 2\pi BS \int_0^{\pi/2} \sin\alpha \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 2\pi BS \cdot \frac{1}{2} = \pi BS,$$

$$\boxed{B_\alpha = B} \qquad \left.\begin{aligned} \Phi &= \pi BS, \\ \Phi &= RS, \end{aligned}\right\} \qquad R = \pi B.$$

Ответ $R = \pi B$.

5.38 На лист белой бумаги размером 10×25 см нормально к поверхности падает световой поток $\Phi = 50$ лм. Принимая коэффициент рассеяния бумажного листа $\rho = 0{,}7$, определите для него: 1) освещенность; 2) светимость; 3) яркость.

Дано	*Решение*
$S = 250$ см² $= 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ м² $\Phi = 50$ лм $\rho = 0{,}7$	$E = \dfrac{\Phi}{S}$, $\quad R = \rho\dfrac{\Phi}{S}$, $R = \pi B$, $\quad B = \dfrac{R}{\pi}$.
1) E — ? 2) R — ? 3) B — ?	

Ответ 1) $E = 2$ клк; 2) $R = 1{,}4$ клк/м²; 3) $B = 446$ кд/м².

5.39 Объясните, чем отличаются просвечивающие и отражательные электронные микроскопы.

5.40 Объясните, почему в электронно-оптических преобразователях можно получить увеличенное изображение предмета большей интенсивности, чем интенсивность самого предмета.

● ●

Некоторые математические формулы

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{n!}{a^{n+1}} \qquad \int_0^\infty x\, e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2a} \qquad \int_0^\infty x^3 e^{-ax^2}\,dx = \frac{1}{2}a^{-2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \int_0^\infty \frac{x^3\,dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15} \qquad \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

5.2. Интерференция света

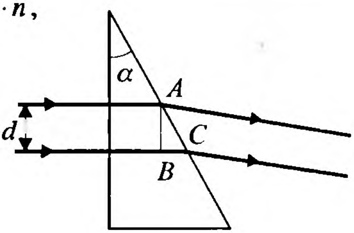
5.41 Определите длину отрезка l_1, на котором укладывается столько же длин волн монохроматического света в вакууме, сколько их укладывается на отрезке $l_2 = 5$ мм в стекле. Показатель преломления стекла $n = 1{,}5$.

Дано	Решение
$n_1 = 1$ $n_2 = 1{,}5$ $l_2 = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м $\dfrac{l_1}{\lambda_1} = \dfrac{l_2}{\lambda_2}$ l_1 — ?	$v = \lambda\nu$, $\quad v = \dfrac{c}{n}$, $\lambda = \dfrac{c}{n\nu}$, $\quad \dfrac{l_1}{\lambda_1} = \dfrac{l_2}{\lambda_2}$, $l_1 = l_2 \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $\quad l_1 = l_2 \dfrac{n_2}{n_1}$.

Ответ $l_1 = 7{,}5$ мм.

5.42 Два параллельных световых пучка, отстоящих друг от друга на расстоянии $d = 5$ см, падают на кварцевую призму ($n = 1{,}49$) с преломляющим углом $\alpha = 25°$. Определите оптическую разность хода Δ этих пучков на выходе их из призмы.

Дано	Решение
$d = 5$ см $= 5 \cdot 10^{-2}$ м $n = 1{,}49$ $\alpha = 25°$ Δ — ?	$\Delta = (l_2 - l_1)n = BC \cdot n$, $BC = d\,\mathrm{tg}\,\alpha$, $\Delta = nd\,\mathrm{tg}\,\alpha$.



Ответ $\Delta = 3{,}47$ см.

5.43 В опыте Юнга расстояние между щелями $d = 1$ мм, а расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определите: 1) положение первой светлой полосы; 2) положение третьей темной полосы, если щели освещать монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм.

Дано

$d = 1$ мм $= 10^{-3}$ м

$l = 3$ м

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

1) $x_{1\max}$ — ?

2) $x_{3\min}$ — ?

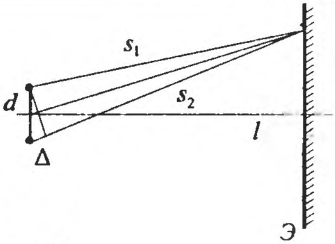
Решение

$\boxed{\text{max}}$ $\Delta = \pm m\lambda$

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$,

$\boxed{\text{min}}$ $\Delta = \pm(2m+1)\dfrac{\lambda}{2}$

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$,



$$\Delta = s_2 - s_1, \qquad \Delta = \frac{xd}{l}.$$

$\boxed{\text{max}}$ $\dfrac{xd}{l} = \pm m\lambda$, $x_{\max} = \pm m\dfrac{l}{d}\lambda$, $\quad x_{1\max} = \pm\dfrac{l}{d}\lambda \quad (m = 1)$.

$\boxed{\text{min}}$ $\dfrac{xd}{l} = \pm(2m+1)\lambda$, $\quad x_{\min} = \pm\left(m + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{l}{d}\lambda$, $\quad x_{3\min} = \pm\left(3 + \dfrac{1}{2}\right)\dfrac{l}{d}\lambda = \pm\dfrac{7\lambda l}{2d}$.

Ответ 1) $x_{1\max} = \pm 1{,}5$ мм; 2) $x_{3\min} = \pm 5{,}25$ мм.

5.44 В опыте с зеркалами Френеля расстояние d между мнимыми изображениями источника света равно 0,5 мм, расстояние l от них до экрана равно 5 м. В желтом свете ширина интерференционных полос равна 6 мм. Определите длину волны желтого света.

Дано

$d = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м

$l = 5$ м

$\Delta x = 6$ мм $= 6 \cdot 10^{-3}$ м

λ — ?

Решение

$\boxed{\text{max}}$ $\Delta = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$,

$\Delta = \dfrac{xd}{l}$, $\quad \dfrac{xd}{l} = \pm m\lambda$, $\quad x_{\max} = \pm m\dfrac{l}{d}\lambda$,

$\Delta x = \dfrac{l}{d}\lambda$, $\quad \lambda = \dfrac{\Delta x d}{l}$.

Ответ $\lambda = 0{,}6$ мкм.

5.45 Расстояние между двумя щелями в опыте Юнга $d = 0{,}5$ мм ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Определите расстояние l от щелей до экрана, если ширина Δx интерференционных полос равна 1,2 мм.

Дано

$d = 0{,}5$ мм $= 5 \cdot 10^{-4}$ м

$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$\Delta x = 1{,}2$ мм $= 1{,}2 \cdot 10^{-3}$ м

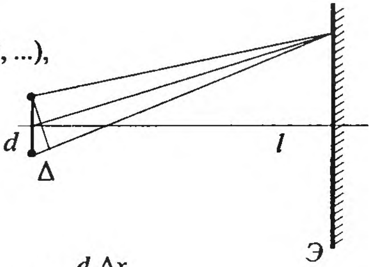
l — ?

Решение

$\boxed{\text{max}}$ $\Delta = \pm m\lambda$
$(m = 0, 1, 2, \ldots)$,

$$\Delta = \frac{xd}{l},$$

$$\frac{x_{\max} d}{l} = \pm m\lambda,$$



$$x_{\max} = \pm m \frac{l}{d} \lambda, \qquad \Delta x = \frac{l}{d} \lambda, \qquad l = \frac{d\, \Delta x}{\lambda}.$$

Ответ $l = 1$ м.

5.46 В опыте Юнга расстояние l от щелей до экрана равно 3 м. Определите угловое расстояние между соседними светлыми полосами, если третья световая полоса на экране отстоит от центра интерференционной картины на 4,5 мм.

Дано

$l = 3$ м

$m = 3$

$x = 4{,}5$ мм $= 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ м

$\Delta\alpha$ — ?

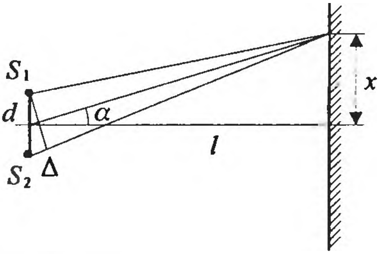
Решение

$\boxed{\text{max}}$ $\Delta = \pm m\lambda$,

$$\Delta = \frac{xd}{l},$$

$$m\lambda = \frac{xd}{l}$$

$(m = 0, 1, 2, \ldots)$,



$$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{l} = \frac{m\lambda}{d}, \qquad \Delta\alpha = \frac{m\lambda}{d} - \frac{(m-1)\lambda}{d} = \frac{\lambda}{d} = \frac{x}{ml}.$$

Ответ $\Delta\alpha = 5 \cdot 10^{-4}$ рад.

5.47 Если в опыте Юнга на пути одного из интерферирующих лучей поместить перпендикулярно этому лучу тонкую стеклянную пластинку ($n = 1{,}5$), то центральная светлая полоса смещается в положение, первоначально занимаемое пятой светлой полосой. Длина волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Определите толщину пластинки.

Дано

$n = 1{,}5$

$m = 5$

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

d — ?

Решение

$\Delta = nd - d = d(n-1)$, $\quad \Delta = m\lambda$

$m\lambda = d(n-1)$, $\quad d = \dfrac{m\lambda}{n-1}$.

Ответ $d = 5$ мкм.

5.48 Определите, во сколько раз изменится ширина интерференционных полос на экране в опыте с зеркалом Френеля, если фиолетовый светофильтр (0,4 мкм) заменить красным (0,7 мкм).

Дано

$\lambda_1 = 0{,}4$ мкм

$\lambda_2 = 0{,}7$ мкм

$\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1}$ — ?

Решение

$\boxed{\text{max}}$ $\Delta = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$,

$\Delta = \dfrac{xd}{l}$, $\quad \dfrac{xd}{l} = \pm m\lambda$,

$x = \pm \dfrac{ml}{d}\lambda$, $\quad \Delta x = \dfrac{ml\lambda}{d} - \dfrac{(m-1)l\lambda}{d} = \dfrac{l\lambda}{d}$.

$$\frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Ответ $\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = 1{,}75$.

5.49 Расстояние от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равно $a = 30$ см и $b = 1{,}5$ м. Бипризма стеклянная ($n = 1{,}5$) с преломляющим углом $\vartheta = 20'$. Определите длину волны света, если ширина интерференционных полос $\Delta x = 0{,}65$ мм.

Дано

$a = 30$ см $= 0{,}3$ м

$b = 1{,}5$ м

$n = 1{,}5$

$\vartheta = 20'$

$\Delta x = 0{,}65$ мм $= 6{,}5 \cdot 10^{-4}$ м

λ — ?

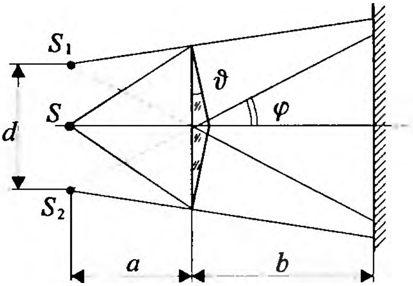
Решение

$\varphi = (n-1)\vartheta$,

$\Delta x = \dfrac{l}{d}\lambda$,

$\lambda = \dfrac{\Delta x d}{l}$,

$l = a + b$,



$d = 2a\sin\varphi \approx 2a\varphi = 2a(n-1)\vartheta$, $\qquad \lambda = \dfrac{2a(n-1)\vartheta\,\Delta x}{a+b}$.

Вычисления:

$\vartheta = 20' = 20 \cdot 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад $= 5{,}82 \cdot 10^{-3}$ рад;

$$\lambda = \frac{2 \cdot 30 \cdot 10^{-2}\text{ м} \cdot 0{,}5 \cdot 5{,}82 \cdot 10^{-3}\text{ рад} \cdot 0{,}65 \cdot 10^{-3}\text{ м}}{(1{,}5 + 0{,}3)\text{ м}} = 6{,}3 \cdot 10^{-7}\text{ м}.$$

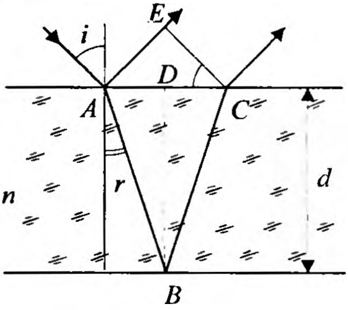
Ответ $\lambda = 0{,}63$ мкм.

5.50 Расстояние от бипризмы Френеля до узкой щели и экрана соответственно равно $a = 48$ см и $b = 6$ м. Бипризма стеклянная ($n = 1{,}5$) с преломляющим углом $\vartheta = 10'$. Определите максимальное число полос, наблюдаемых на экране, если $\lambda = 600$ нм.

Ответ $m = \dfrac{4ab(n-1)^2\vartheta^2}{(a+b)\lambda} = 6$.

5.51 На плоскопараллельную пленку с показателем преломления $n = 1{,}33$ под углом $i = 45°$ падает параллельный пучок белого света. Определите, при какой наименьшей толщине пленки зеркально отраженный свет наиболее сильно окрасится в желтый цвет ($\lambda = 0{,}6$ мкм).

Дано	*Решение*
$n = 1{,}33$ $i = 45°$ $\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м d — ?	$\boxed{\text{max}}$ $\Delta = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$ $\Delta = (AB + BC)n - \left(AE - \frac{\lambda}{2}\right),$ $AB = BC = \frac{d}{\cos r},$



$$AD = d\,\mathrm{tg}\,r, \qquad AE = 2d\,\mathrm{tg}\,r \sin i,$$

$$\Delta = \frac{2dn}{\cos r} - 2d\,\mathrm{tg}\,r \sin i + \frac{\lambda}{2},$$

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n, \qquad \mathrm{tg}\,r = \frac{\sin r}{\cos r},$$

$$\frac{2d}{\cos r}(n - \sin r \sin i) + \frac{\lambda}{2} = \lambda, \qquad (m = 1), \qquad \frac{2d}{\cos r}\left(n - \sin^2 r \frac{\sin i}{\sin r}\right) = \frac{\lambda}{2},$$

$$\frac{2dn}{\cos r}\left(1 - \sin^2 r\right) = \frac{\lambda}{2}, \qquad \frac{2dn}{\cos r}\cos^2 r = \frac{\lambda}{2},$$

$$2dn\cos r = \frac{\lambda}{2}, \qquad d = \frac{\lambda}{4n\cos r},$$

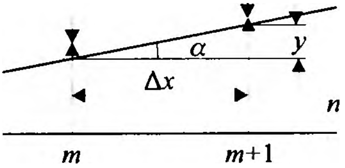
$$\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r} = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2 i},$$

$$d = \frac{\lambda}{4\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}.$$

Ответ $d = 133$ нм.

5.52 На стеклянный клин ($n = 1{,}5$) нормально падает монохроматический свет ($\lambda = 698$ нм). Определите угол между поверхностями клина, если расстояние между двумя соседними интерференционными минимумами в отраженном свете равно 2 мм.

Дано	***Решение***
$n = 1{,}5$ $\lambda = 698$ нм $= 6{,}98 \cdot 10^{-7}$ м $\Delta x = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м α — ?	$\alpha \approx \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{\Delta x}$, $\Delta = 2yn$,



$$\Delta = \left[2(m+1)+1\right]\frac{\lambda}{2} - \left[2m+1\right]\frac{\lambda}{2} = \lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$2yn = \lambda, \qquad y = \frac{\lambda}{2n}, \qquad \alpha = \frac{\lambda}{2n\,\Delta x}.$$

Ответ $\alpha = 24''$.

5.53 На стеклянный клин ($n = 1{,}5$) нормально падает монохроматический свет. Угол клина равен $4'$. Определите длину световой волны, если расстояние между двумя соседними интерференционными максимумами в отраженном свете равно 0,2 мм.

Ответ $\lambda = 698$ нм.

5.54 На тонкую мыльную пленку ($n = 1{,}33$) под углом $i = 30°$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определите угол между поверхностями пленки, если расстояние b между интерференционными полосами в отраженном свете равно 4 мм.

Ответ $\alpha = 12{,}5''$.

5.55 Монохроматический свет падает нормально на поверхность воздушного клина, причем расстояние между интерференционными полосами $\Delta x_1 = 0{,}4$ мм. Определите расстояние Δx_2 между интерференционными полосами, если пространство между пластинками, образующими клин, заполнить прозрачной жидкостью с показателем преломления $n = 1{,}33$.

Дано	***Решение***
$\Delta x_1 = 0{,}4$ мм $= 4 \cdot 10^{-4}$ м $n_1 = 1$ $n_2 = 1{,}33$	$\alpha = \frac{\lambda}{2n\,\Delta x}$ (см. задачу 5.52), $\alpha_1 = \alpha_2$, $\lambda_1 = \lambda_2$, $\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = \frac{n_2}{n_1}$, $\Delta x_2 = \frac{n_1}{n_2}\Delta x_1$.
Δx_2 — ?	***Ответ*** $\Delta x_2 = 0{,}3$ мм.

5.56 Плосковыпуклая линза радиусом кривизны 4 м выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Определите длину волны падающего монохроматического света, если радиус пятого светлого кольца в отраженном свете равен 3 мм.

Дано	***Решение***
$R = 4$ м $m = 5$ $r_m = 3$ мм $= 3 \cdot 10^{-3}$ м	$r_m = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda R}$, $\lambda = \frac{r_m^2}{\left(m - \frac{1}{2}\right)R}$.
λ — ?	***Ответ*** $\lambda = 0{,}5$ мкм.

5.57 Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм, падающим нормально. Определите толщину воздушного зазора, образованного плоскопараллельной пластинкой и соприкасающейся с ней плосковыпуклой линзой в том месте, где в отраженном свете наблюдается четвертое темное кольцо.

Ответ $d = 1{,}1$ мкм.

5.58 Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм, падающим нормально. Пространство между линзой и стеклянной пластинкой заполнено жидкостью, и наблюдение ведется в проходящем свете. Радиус кривизны линзы $R = 4$ м. Определите показатель преломления жидкости, если радиус второго светлого кольца $r = 1{,}8$ мм.

Дано

$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$R = 4$ м

$m = 2$

$r = 1{,}8$ мм $= 1{,}8 \cdot 10^{-3}$ м

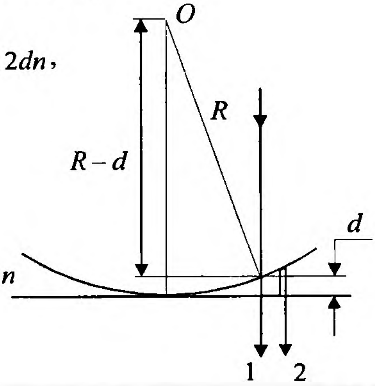
n — ?

Решение

$$r = \sqrt{R^2 - (R-d)^2} \approx \sqrt{2Rd},$$

$$d = \frac{r^2}{2R}, \qquad \Delta = 2dn,$$

$$n = \frac{\Delta}{2d},$$



$\boxed{\text{max}}$ $\Delta = m\lambda, \qquad 2dn = m\lambda,$

$$n = \frac{m\lambda}{2d}, \qquad n = \frac{m\lambda \cdot 2R}{2r^2} = \frac{m\lambda R}{r^2}.$$

Ответ $n = 1{,}48$.

5.59 Плосковыпуклая линза с показателем преломления $n = 1{,}6$ выпуклой стороной лежит на стеклянной пластинке. Радиус третьего светлого кольца в отраженном свете ($\lambda = 0{,}6$ мкм) равен 0,9 мм. Определите фокусное расстояние линзы.

Ответ $f = 0{,}9$ м.

5.60 Плосковыпуклая линза с радиусом сферической поверхности $R = 12{,}5$ см прижата к стеклянной пластинке. Диаметр десятого темного кольца Ньютона в отраженном свете равен 1 мм. Определите длину волны света.

Ответ $\lambda = \dfrac{D_{\text{m}}^2}{4mR} = 0{,}2$ мкм.

5.61 Установка для наблюдения колец Ньютона освещается монохроматическим светом, падающим нормально. При заполнении пространства между линзой и стеклянной пластинкой прозрачной жидкостью радиусы темных колец в отраженном свете уменьшились в 1,21 раза. Определите показатель преломления жидкости.

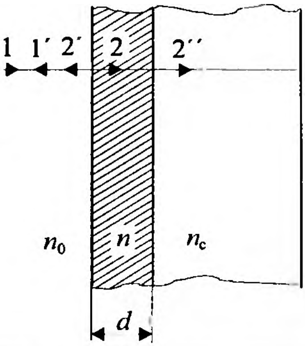
Дано	*Решение*
$\frac{r_1}{r_2} = 1{,}21$	$r_m \approx \sqrt{2Rd}$, $\quad \Delta = 2dn + \frac{\lambda}{2}$, $\quad \Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$,
n — ?	$2dn + \frac{\lambda}{2} = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$, $\quad d = \frac{m\lambda}{2n}$,

$$r_m = \sqrt{\frac{2Rm\lambda}{2n}} = \sqrt{\frac{m\lambda R}{n}}, \quad r_1 = \sqrt{m\lambda R}, \quad r_2 = \sqrt{\frac{m\lambda R}{n}}, \quad \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{n}, \quad n = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2.$$

Ответ $n = 1{,}46$.

5.62 Для уменьшения потерь света из-за отражения от поверхностей стекла осуществляют “просветление оптики”: на свободную поверхность линз наносят тонкую пленку с показателем преломления $n = \sqrt{n_c}$. В этом случае амплитуда отраженных волн от обеих поверхностей такой пленки одинакова. Определите толщину слоя, при которой отражение для света с длиной волны λ от стекла в направлении нормали равно нулю.

Дано	*Решение*
$n = \sqrt{n_c}$ λ	$\Delta = 2dn$, $\boxed{\text{min}}\ \Delta = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$,
d — ?	$2dn = (2m+1)\frac{\lambda}{2}$,



$$d = \frac{(2m+1)\lambda}{4n} = \frac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n_c}}.$$

Ответ $d = \frac{(2m+1)\lambda}{4\sqrt{n_c}}$ $\quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$.

5.63 На линзу с показателем преломления $n = 1{,}58$ нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. Для устранения потерь света в результате отражения на линзу наносится тонкая пленка. Определите: 1) оптимальный показатель преломления для пленки; 2) минимальную толщину пленки.

Ответ 1) $n_п = 1{,}26$; 2) $d = 109$ нм.

5.64 Определите длину волны света в опыте с интерферометром Майкельсона, если для смещения интерференционной картины на 112 полос зеркало пришлось переместить на расстояние $l = 33$ мкм.

Ответ $\lambda = 589$ нм.

5.65 Для измерения показателя преломления аммиака в одно из плеч интерферометра Майкельсона помещена закрытая с обеих сторон откачанная до высокого вакуума стеклянная трубка длиной $l = 15$ см. При заполнении трубки аммиаком интерференционная картина для длины волны $\lambda = 589$ нм сместилась на 192 полосы. Определите показатель преломления аммиака.

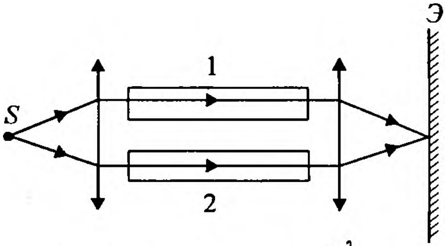
Дано	Решение
$l = 15$ см $= 0{,}15$ м $\lambda = 589$ нм $= 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м $m = 192$ n — ?	$\Delta = 2(ln - ln_0) = 2l(n-1)$, $(n_0 = 1)$, $\Delta = m\lambda$, $2l(n-1) = m\lambda$, $n = \dfrac{m\lambda}{2l} + 1$.

Вычисления:

$$n = \frac{192 \cdot 589 \cdot 10^{-9}\ \text{м}}{2 \cdot 15 \cdot 10^{-2}\ \text{м}} + 1 = 1{,}000377.$$

Ответ $n = 1{,}000377$.

5.66 На рисунке показана схема интерференционного рефрактометра, применяемого для измерения показателя преломления прозрачных веществ. S — узкая щель, освещаемая монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм; *1* и *2* — кюветы длиной $l = 10$ см, которые заполнены воздухом ($n_0 = 1{,}000277$). При замене в одной из кювет воздуха на аммиак интерференционная картина на экране сместилась на $m = 17$ полос. Определите показатель преломления аммиака.

Дано	*Решение*
$\lambda = 589$ нм $= 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м $l = 10$ см $= 0{,}1$ м $n_0 = 1{,}000277$ $m = 17$ n — ?	

$$\Delta = ln - ln_0 = l(n - n_0)\,, \qquad \Delta = m\lambda\,, \qquad l(n - n_0) = m\lambda\,, \qquad n = \frac{m\lambda}{l} + n_0\,.$$

Вычисления:

$$n = \frac{17 \cdot 589 \cdot 10^{-9}\ \text{м}}{0{,}1\ \text{м}} + 1{,}000277 = 1{,}000377\,.$$

Ответ $n = 1{,}000377$.

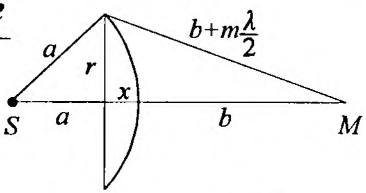
5.67 На пути лучей интерференционного рефрактометра помещаются трубки длиной $l = 2$ см с плоскопараллельными стеклянными основаниями, наполненные воздухом ($n_0 = 1{,}000277$). Одну трубку заполнили хлором, и при этом интерференционная картина сместилась на $m = 20$ полос. Определите показатель преломления хлора, если наблюдения производятся с монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 589$ нм.

Ответ $n = 1{,}000866$.

5.3. Дифракция света

5.68 Точечный источник света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) расположен на расстоянии $a = 1$ м перед диафрагмой с круглым отверстием диаметра $d = 2$ мм. Определите расстояние b от диафрагмы до точки наблюдения, если отверстие открывает три зоны Френеля.

Дано	*Решение*
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м	$r^2 = a^2 - (a - x)^2,$
$a = 1$ м	$\lambda \ll a,$
$d = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м	$\lambda \ll b,$
$m = 3$	
b — ?	$r^2 = \left(b + m\dfrac{\lambda}{2}\right)^2 - (b + x)^2,$ $\quad x = \dfrac{bm\lambda}{2(a+b)},$



$$r^2 = \frac{ab}{a+b}m\lambda - \frac{b^2}{4(a+b)^2}m^2\lambda^2, \qquad \frac{b^2}{4(a+b)^2}m^2\lambda^2 \text{ — пренебрежимо мало,}$$

$$r^2 = \frac{ab}{a+b}m\lambda, \qquad b = \frac{ar^2}{am\lambda - r^2}, \qquad r = \frac{d}{2}, \qquad b = \frac{ad^2}{4am\lambda - d^2}.$$

Ответ $b = 2$ м.

5.69 Определите радиус третьей зоны Френеля, если расстояние от точечного источника света ($\lambda = 0{,}6$ мкм) до волновой поверхности и от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1,5 м.

Ответ $r_3 = 1{,}16$ мм.

5.70 На диафрагму с круглым отверстием диаметром $d = 5$ мм падает нормально параллельный пучок света с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определите расстояние от точки наблюдения до отверстия, если отверстие открывает: 1) две зоны Френеля; 2) три зоны Френеля.

Ответ 1) 5,21 м; 2) 3,47 м.

5.71 Определите радиус третьей зоны Френеля для случая плоской волны. Расстояние от волновой поверхности до точки наблюдения равно 1,5 м. Длина волны $\lambda = 0{,}6$ мкм.

Дано

$m = 3$

$b = 1{,}5$ м

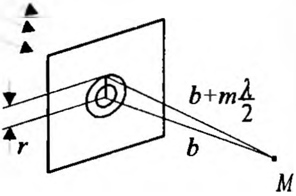
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

r — ?

Решение

$$r^2 + b^2 = \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2,$$

$$r^2 = bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4},$$



$$\lambda \ll b, \quad r = \sqrt{bm\lambda}\,.$$

Ответ $r = 1{,}64$ мм.

5.72 Определите радиус четвертой зоны Френеля, если радиус второй зоны Френеля для плоского волнового фронта равен 2 мм.

Дано

$m_1 = 2$

$m_2 = 4$

$r_1 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м

r_2 — ?

Решение

$r = \sqrt{bm\lambda}$ (см. задачу 5.71),

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\sqrt{bm_1\lambda}}{\sqrt{bm_2\lambda}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}, \qquad r_2 = r_1\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}\,.$$

Ответ $r_2 = 2{,}83$ мм.

5.73 Определите радиус первой зоны Френеля, если расстояние от точечного источника света ($\lambda = 0{,}5$ мкм) до зонной пластинки и от пластинки до места наблюдения $a = b = 1$ м.

Ответ $r_1 = 0{,}5$ мм.

5.74 На зонную пластинку падает плоская монохроматическая волна ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Определите радиус первой зоны Френеля, если расстояние от зонной пластинки до места наблюдения $b = 1$ м.

Ответ $r_1 = 707$ мкм.

5.75 Зонная пластинка дает изображение источника, удаленного от нее на 2 м, на расстоянии 1 м от своей поверхности. Где получится изображение источника, если его удалить в бесконечность?

Дано	*Решение*
$a = 2$ м	$r_m^2 = \dfrac{ab}{a+b} m\lambda$ (см. задачу 5.68),
$b = 1$ м	$r_m^2 = mb_1\lambda$ (см. задачу 5.71),
$a_1 = \infty$	
b_1 — ?	$b_1 = \dfrac{ab}{a+b}$.

Ответ $b_1 = 6{,}67$ см.

5.76 Дифракция наблюдается на расстоянии 1 м от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между источником света и экраном находится диафрагма с круглым отверстием. Определите радиус отверстия, при котором центр дифракционных колец на экране является наиболее темным.

Дано	*Решение*
$a + b = 1$ м	$r^2 = \dfrac{ab}{a+b} m\lambda$ (см. задачу 5.68).
$a = b$	Центр наиболее темный при $m = 2$.
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м	
r — ?	$r = \sqrt{\dfrac{ab}{a+b} m\lambda} = \sqrt{\dfrac{2ab}{a+b}\lambda}$.

Ответ $r = 0{,}5$ мм.

5.77 Сферическая волна, распространяющаяся из точечного монохроматического источника света ($\lambda = 0{,}6$ мкм), встречает на своем пути экран с круглым отверстием радиусом $r = 0{,}4$ мм. Расстояние a от источника до экрана равно 1 м. Определите расстояние от отверстия до точки экрана, лежащей на линии, соединяющей источник с центром отверстия, где наблюдается максимум освещенности.

Ответ $b = 36{,}3$ см.

5.78 На экран с круглым отверстием радиусом $r = 1{,}5$ мм нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Точка наблюдения находится на оси отверстия на расстоянии $b = 1{,}5$ м от него. Определите: 1) число зон Френеля, укладывающихся в отверстии; 2) темное или светлое кольцо наблюдается в центре дифракционной картины, если в месте наблюдения помещен экран.

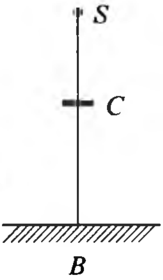
Дано	***Решение***
$r = 1{,}5$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-3}$ м $\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м $b = 1{,}5$ м 1) m – ? 2) min, max — ?	$r = \sqrt{bm\lambda}$ (см. рисунок к задаче 5.71), $m = \dfrac{r^2}{b\lambda}$. Если m — четное — min. Если m — нечетное — max. Вычисления: 1) $m = \dfrac{(1{,}5 \cdot 10^{-3})^2\ \text{м}^2}{1{,}5\ \text{м} \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6}\ \text{м}} = 3$; 2) m — нечетное, светлое кольцо.

Ответ 1) $m = 3$; 2) светлое кольцо.

5.79 На экран с круглым отверстием радиусом $r = 1{,}2$ мм нормально падает параллельный пучок монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Определите максимальное расстояние от отверстия на его оси, где еще можно наблюдать наиболее темное пятно.

Ответ $l = 1{,}2$ м.

5.80 Покажите, что за круглым экраном C в точке B, лежащей на линии, соединяющей точечный источник с центром экрана, будет наблюдаться светлое пятно. Размеры экрана примите достаточно малыми.



5.81 Дифракция наблюдается на расстоянии l от точечного источника монохроматического света ($\lambda = 0{,}5$ мкм). Посередине между источником света и экраном находится непрозрачный круглый диск диаметром 5 мм. Определите расстояние l, если диск закрывает только центральную зону Френеля.

Дано

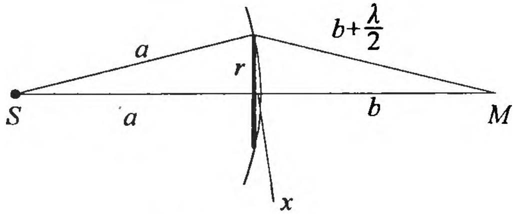
$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

$d = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м

$m = 1$

l — ?

Решение



$$\left.\begin{aligned} a^2 &= (a-x)^2 + r^2, \\ \left(b + m\frac{\lambda}{2}\right)^2 &= (b+x)^2 + r^2; \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} a^2 &= a^2 - 2ax + x^2 + r^2, \\ b^2 + bm\lambda + \frac{m^2\lambda^2}{4} &= b^2 + 2bx + x^2 + r^2; \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{x^2,\ \frac{m^2\lambda^2}{4} \text{ – пренебрежимо малы}}$$

$$a = b = \frac{l}{2}, \qquad r = \frac{d}{2}, \qquad x = \frac{r^2}{2a} = \frac{d^2}{4l},$$

$$bm\lambda = 2bx + r^2, \qquad bm\lambda = 2b\frac{r^2}{2a} + r^2, \qquad bm\lambda = 2r^2,$$

$$\frac{l}{2}m\lambda = 2\frac{d^2}{4}, \qquad l = \frac{d^2}{m\lambda}, \qquad m = 1, \qquad l = \frac{d^2}{\lambda}.$$

Ответ $l = 50$ м.

5.82 На узкую щель шириной $a = 0{,}05$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 694$ нм. Определите направление света на вторую дифракционную полосу (по отношению к первоначальному направлению света).

Дано

$a = 0{,}05$ мм $= 5 \cdot 10^{-5}$ м

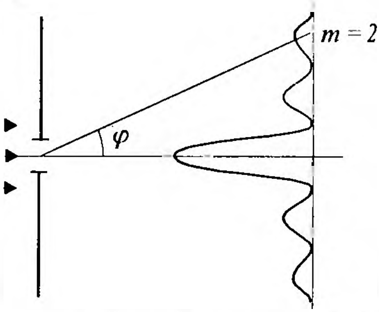
$\lambda = 694$ нм $= 6{,}94 \cdot 10^{-7}$ м

$m = 2$

φ — ?

Решение

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2}, \qquad m = 2,$$



$$\sin\varphi = \frac{(2m+1)\lambda}{2a} = \frac{5\lambda}{2a}.$$

Ответ $\varphi = 2°$.

5.83 На узкую щель падает нормально монохроматический свет. Его направление на четвертую темную дифракционную полосу составляет $2°12'$. Определите, сколько длин волн укладывается на ширине щели.

Дано

$\varphi = 2°12'$

$m = 4$

min

$\frac{a}{\lambda}$ — ?

Решение

$$a\sin\varphi = \pm m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{m}{\sin\varphi}.$$

Вычисления:

$\varphi = 2°12' = 2{,}2°$;

$$\frac{a}{\lambda} = \frac{4}{\sin 2{,}2°} = 104.$$

Ответ $\frac{a}{\lambda} = 104$.

5.84 На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет ($\lambda = 0{,}6$ мкм). Экран, на котором наблюдается дифракционная картина, расположен параллельно щели на расстоянии $l = 1$ м. Определите расстояние b между первыми дифракционными минимумами, расположенными по обе стороны центрального фраунгоферова максимума.

Дано

$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$l = 1$ м

$m = 1$

$a = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м

b — ?

Решение

См. рисунок к задаче 5.85,

$\boxed{\text{min}}$ $\quad a\sin\varphi = \pm m\lambda, \qquad m = 1,$

$$\sin\varphi = \frac{\lambda}{a}, \qquad \sin\varphi \approx \operatorname{tg}\varphi,$$

$$b = 2l\operatorname{tg}\varphi \approx 2l\sin\varphi = 2l\frac{\lambda}{a}.$$

Ответ $b = 1{,}2$ см.

5.85 На щель шириной $a = 0{,}1$ мм падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Дифракционная картина наблюдается на экране, расположенном параллельно щели. Определите расстояние l от щели до экрана, если ширина центрального дифракционного максимума $b = 1$ см.

Дано

$a = 0{,}1$ мм $= 10^{-4}$ м

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

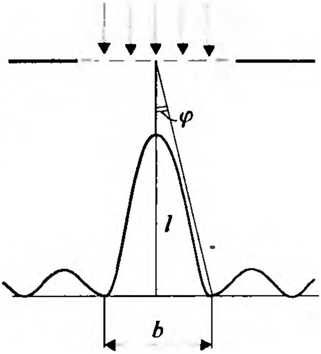
$b = 1$ см $= 10^{-2}$ м

l — ?

Решение

$\boxed{\text{min}}$ $\quad a\sin\varphi = \pm m\lambda,$

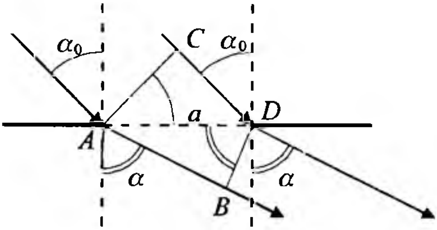
$$m = 1, \qquad \sin\varphi = \frac{\lambda}{a},$$



$$b = 2l\operatorname{tg}\varphi, \qquad l = \frac{b}{2\operatorname{tg}\varphi}, \qquad \varphi = \arcsin\frac{\lambda}{a}.$$

Ответ $l = 1$ м.

5.86 Монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм падает на длинную прямоугольную щель шириной $a = 12$ мкм под углом $\alpha_0 = 45°$ к ее нормали. Определите угловое положение первых минимумов, расположенных по обе стороны центрального фраунгоферова максимума.

Дано	*Решение*
$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м $a = 12$ мкм $= 12 \cdot 10^{-6}$ м $\alpha_0 = 45°$ α_{+1} — ? α_{-1} — ?	

$\Delta = AB - CD$, $\quad \Delta = a\sin\alpha - a\sin\alpha_0 = a(\sin\alpha - \sin\alpha_0)$,

$\boxed{\text{min}}$ $\quad \Delta = \pm m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$.

$m = +1$: $\quad a(\sin\alpha_{+1} - \sin\alpha_0) = \lambda$, $\quad \sin\alpha_{+1} = \sin\alpha_0 + \dfrac{\lambda}{a}$,

$$\alpha_{+1} = \arcsin\left(\sin\alpha_0 + \frac{\lambda}{a}\right).$$

$m = -1$: $\quad a(\sin\alpha_{-1} - \sin\alpha_0) = -\lambda$, $\quad \sin\alpha_{-1} = \sin\alpha_0 - \dfrac{\lambda}{a}$,

$$\alpha_{-1} = \arcsin\left(\sin\alpha_0 - \frac{\lambda}{a}\right).$$

Вычисления:

$$\alpha_{+1} = \arcsin\left(\sin 45° + \frac{0{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{м}}{12 \cdot 10^{-6}\ \text{м}}\right) = 49{,}2° = 49°12';$$

$$\alpha_{-1} = \arcsin\left(\sin 45° - \frac{0{,}6 \cdot 10^{-6}\ \text{м}}{12 \cdot 10^{-6}\ \text{м}}\right) = 41{,}1° = 41°6'.$$

Ответ $\quad \alpha_{+1} = 49°12'$, $\quad \alpha_{-1} = 41°6'$.

5.87 Монохроматический свет падает на длинную прямоугольную щель шириной $a = 12$ мкм под углом $\alpha = 30°$ к ее нормали. Определите длину волны λ света, если направление φ на первый минимум ($m = 1$) от центрального фраунгоферова максимума составляет 33°.

Ответ $\lambda = a(\sin\varphi - \sin\alpha) = 536$ нм.

5.88 На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 600$ нм. Определите наибольший порядок спектра, полученный с помощью этой решетки, если ее постоянная $d = 2$ мкм.

Дано

$\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$d = 2$ мкм $= 2 \cdot 10^{-6}$ м

$m_{\max}$ — ?

Решение

$d\sin\varphi = m\lambda$, $\quad d\sin\varphi_{\max} = m_{\max}\lambda$,

$\sin\varphi_{\max} = 1$, $\quad m_{\max} = \dfrac{d}{\lambda}$.

Ответ $m_{\max} = 3$.

5.89 На дифракционную решетку длиной $l = 15$ мм, содержащую $N = 3000$ штрихов, падает нормально монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 550$ нм. Определите: 1) число максимумов, наблюдаемых в спектре дифракционной решетки; 2) угол, соответствующий последнему максимуму.

Дано

$l = 15$ мм $= 1{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

$N = 3000$

$\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м

1) n — ?

2) $\varphi_{\max}$ — ?

Решение

$d\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$, $\quad d = \dfrac{l}{N}$,

$m_{\max} = \dfrac{d}{\lambda}$ при $\sin\varphi = 1$, $\quad m_{\max} = \dfrac{l}{N\lambda}$,

$n = 2m_{\max}$, $\quad d\sin\varphi_{\max} = m_{\max}\lambda$,

$$\sin\varphi_{\max} = \frac{m_{\max}\lambda}{d} = \frac{m_{\max}\lambda N}{l}, \quad \varphi_{\max} = \arcsin\frac{m_{\max}\lambda N}{l}.$$

Ответ 1) $n = 18$; 2) $\varphi_{\max} = 81°54'$.

5.90 Определите число штрихов на 1 мм дифракционной решетки, если углу $\varphi = 30°$ соответствует максимум четвертого порядка для монохроматического света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм.

Дано

$\varphi = 30°$

$m = 4$

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

n — ?

Решение

$\boxed{\text{max}}$ $d \sin\varphi = \pm m\lambda \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots),$

$$d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi}, \qquad d = \frac{l}{N}, \qquad n = \frac{N}{l} = \frac{1}{d} = \frac{\sin\varphi}{m\lambda}.$$

Ответ $n = 250$ мм$^{-1}$.

5.91 На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. На экран, находящийся от решетки на расстоянии $L = 1$ м, с помощью линзы, расположенной вблизи решетки, проецируется дифракционная картина, причем первый главный максимум наблюдается на расстоянии $l = 15$ см от центрального. Определите число штрихов на 1 см дифракционной решетки.

Дано

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

$L = 1$ м

$l = 15$ см $= 0{,}15$ м

n — ?

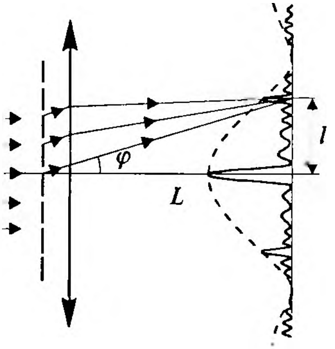
Решение

$\boxed{\text{max}}$ $d \sin\varphi = m\lambda, \qquad m = 1,$

$$\sin\varphi \approx \frac{l}{L},$$

$$d\frac{l}{L} = m\lambda,$$

$$n = \frac{1}{d} = \frac{l}{m\lambda L}.$$



Ответ $n = 3 \cdot 10^{3}$ см$^{-1}$.

5.92 Монохроматический свет нормально падает на дифракционную решетку. Определите угол дифракции, соответствующий максимуму четвертого порядка, если максимум третьего порядка отклонен на $\varphi_1 = 18°$.

Дано

$m_1 = 3$

$\varphi_1 = 18°$

$m_2 = 4$

φ_2 — ?

Решение

$$\boxed{\text{min}}\ d\sin\varphi_1 = m_1\lambda, \quad d\sin\varphi_2 = m_2\lambda, \quad \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2} = \frac{m_1}{m_2},$$

$$\sin\varphi_2 = \frac{m_2}{m_1}\sin\varphi_1, \qquad \varphi_2 = \arcsin\left(\frac{m_2}{m_1}\sin\varphi_1\right).$$

Ответ $\varphi_2 = 24°20'$.

5.93 На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет. Определите угол дифракции для линии 0,55 мкм в четвертом порядке, если этот угол для линии 0,6 мкм в третьем порядке составляет 30°.

Ответ $\varphi = 37°42'$.

5.94 На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет. В спектре, полученном с помощью этой дифракционной решетки, некоторая спектральная линия наблюдается в первом порядке под углом $\varphi = 11°$. Определите наивысший порядок спектра, в котором может наблюдаться эта линия.

Дано

$\varphi = 11°$

$m = 1$

$m_{\max}$ — ?

Решение

$$d\sin\varphi = m\lambda, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, m_{\max}.$$

$$d\sin\varphi_{\max} = m_{\max}\lambda, \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin\varphi_{\max}} = \frac{m}{m_{\max}},$$

$$\sin\varphi_{\max} \leqslant 1, \qquad m = 1, \qquad m_{\max} \leqslant \frac{1}{\sin\varphi}.$$

Ответ $m_{\max} = 5$.

5.95 Определите длину волны монохроматического света, падающего нормально на дифракционную решетку, имеющую 300 штрихов на 1 мм, если угол между направлениями на максимумы первого и второго порядка составляет 12°.

Дано

$n = 300\ \text{мм}^{-1} = 3\cdot10^5\ \text{м}^{-1}$

$\Delta\varphi = 12°$

$m_1 = 1$

$m_2 = 2$

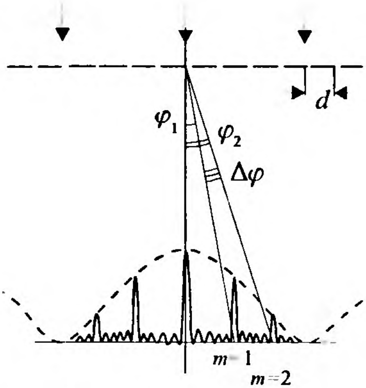
λ — ?

Решение

$$d = \frac{1}{n}, \qquad \left.\begin{aligned} d\sin\varphi_1 &= m_1\lambda,\\ d\sin\varphi_2 &= m_2\lambda;\end{aligned}\right\} \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2,$$

$$\sin\varphi_1 = \frac{\lambda}{d}, \quad \sin\varphi_2 = \frac{2\lambda}{d},$$

$$\sin\varphi_2 = 2\sin\varphi_1,$$



$$\varphi_2 = \varphi_1 + \Delta\varphi, \ \sin(\varphi_1 + \Delta\varphi) = 2\sin\varphi_1,$$

$$\sin\varphi_1\cos\Delta\varphi + \cos\varphi_1\sin\Delta\varphi = 2\sin\varphi_1,$$

$$\sin\varphi_1(2 - \cos\Delta\varphi) = \cos\varphi_1\sin\Delta\varphi,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{\sin\varphi_1}{\cos\varphi_1} = \frac{\sin\Delta\varphi}{2 - \cos\Delta\varphi},$$

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\Delta\varphi}{2 - \cos\Delta\varphi}\right), \qquad \lambda = d\sin\varphi_1 = \frac{1}{n}\sin\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\Delta\varphi}{2 - \cos\Delta\varphi}\right)\right].$$

Ответ $\lambda = 664$ нм.

5.96 Какой должна была бы быть толщина плоскопараллельной стеклянной пластинки ($n = 1{,}55$), чтобы в отраженном свете максимум второго порядка для $\lambda = 0{,}65$ мкм наблюдался под тем же углом, что и у дифракционной решетки с постоянной $d = 1$ мкм.

Ответ $x = 577$ нм.

5.97 На дифракционную решетку с постоянной $d = 5$ мкм под углом $\vartheta = 30°$ падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм. Определите угол φ дифракции для главного максимума третьего порядка.

Дано

$d = 5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-6}$ м

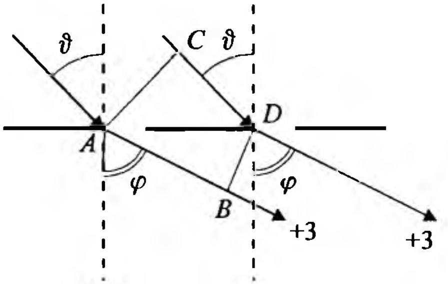
$\vartheta = 30°$

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

$m = 3$

φ — ?

Решение



$\Delta = AB - CD = d\sin\varphi - d\sin\vartheta$,

$d\sin\varphi - d\sin\vartheta = m\lambda$,

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{d} + \sin\vartheta .$$

Ответ $\varphi = 53°8'$.

5.98 На дифракционную решетку под углом ϑ падает монохроматический свет с длиной волны λ . Найдите условие, определяющее направления на главные максимумы, если $d \gg m\lambda$ (m — порядок спектра).

Ответ $d\cos\vartheta \cdot (\varphi - \vartheta) \approx m\lambda$.

5.99 Узкий параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 245$ пм падает на естественную грань монокристалла каменной соли. Определите расстояние d между атомными плоскостями монокристалла, если дифракционный максимум второго порядка наблюдается при падении излучения к поверхности монокристалла под углом скольжения $\vartheta = 61°$.

Ответ $d = 0{,}28$ нм.

5.100 Узкий параллельный пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на грань кристалла с расстоянием между его атомными плоскостями $d = 0{,}3$ нм. Определите длину волны рентгеновского излучения, если под углом $\vartheta = 30°$ к плоскости грани наблюдается дифракционный максимум первого порядка.

Дано	*Решение*
$d = 0{,}3$ нм $= 3 \cdot 10^{-10}$ м $\vartheta = 30°$ $m = 1$ λ — ?	$2d \sin\vartheta = m\lambda$, $\lambda = \dfrac{2d\sin\vartheta}{m}$.

Ответ $\lambda = 300$ пм.

5.101 Узкий пучок рентгеновского излучения с длиной волны $\lambda = 245$ пм падает под некоторым углом скольжения на естественную грань монокристалла NaCl ($M = 58{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), плотность которого $\rho = 2{,}16$ г/см³. Определите угол скольжения, если при зеркальном отражении от этой грани наблюдается максимум второго порядка.

Дано	*Решение*
$\lambda = 245$ пм $= 2{,}45 \cdot 10^{-10}$ м $M = 58{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $\rho = 2{,}16$ г/см³ $=$ $= 2{,}16 \cdot 10^3$ кг/м³ $m = 2$ ϑ — ?	$2d \sin\vartheta = m\lambda$, $\vartheta = \arcsin\dfrac{m\lambda}{2d}$. В ячейке NaCl 4 Na^+ и 4 Cl^-. Каждый ион входит в 8 ячеек. Число ячеек равно числу ионов. В 1 моль — $2N_A$ ячеек. $d = \sqrt[3]{V}$, $V = \dfrac{V_m}{2N_A}$, $V_m = \dfrac{M}{\rho}$,

$$d = \sqrt[3]{\frac{M}{2\rho N_A}}, \qquad \vartheta = \arcsin\frac{m\lambda}{2\sqrt[3]{\dfrac{M}{2\rho N_A}}}.$$

Ответ $\vartheta = 60°18'$.

5.102 Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает под углом скольжения $\vartheta = 60^\circ$ на естественную грань монокристалла NaCl ($M = 58{,}5 \cdot 10^{-3}$ кг/моль), плотность которого $\rho = 2{,}16$ г/см³. Определите длину волны излучения, если при зеркальном отражении от этой грани наблюдается максимум третьего порядка.

Ответ $\lambda = 163$ пм.

5.103 Диаметр D объектива телескопа равен 10 см. Определите наименьшее угловое расстояние φ между двумя звездами, при котором в фокальной плоскости объектива получатся их разрешимые дифракционные изображения. Считайте, что длина волны света $\lambda = 0{,}55$ мкм.

Дано	***Решение***
$D = 10$ см $= 0{,}1$ м $\lambda = 0{,}55$ мкм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м φ — ?	$\varphi = 1{,}22\dfrac{\lambda}{D}$.

Ответ $\varphi = 1{,}4''$.

5.104 Определите наименьшее угловое разрешение радиоинтерферометра, установленного на Земле, при работе на длине волны $\lambda = 10$ м.

Дано	***Решение***
$\lambda = 10$ м $R_3 = 6{,}37 \cdot 10^6$ м $\mathrm{d}\varphi$ — ?	$\mathrm{d}\varphi \approx \dfrac{\lambda}{2R_3}$.

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{10\ \text{м}}{2 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \text{м}} = 0{,}785 \cdot 10^{-6}\ \text{рад} = 0{,}2''.$$

Ответ $\mathrm{d}\varphi = 0{,}2''$.

5.105 На дифракционную решетку нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}6$ мкм. Угол дифракции для пятого максимума равен 30°, а минимальная разрешаемая решеткой разность длин волн составляет $\delta\lambda = 0{,}2$ нм. Определите: 1) постоянную дифракционной решетки; 2) длину дифракционной решетки.

Дано

$\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$m = 5$

$\varphi = 30°$

$\delta\lambda = 0{,}2$ нм $= 2 \cdot 10^{-10}$ м

1) d — ?

2) l — ?

Решение

$$d \sin\varphi = m\lambda, \qquad d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi}, \qquad R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN,$$

$$N = \frac{\lambda}{\delta\lambda\, m}, \qquad l = dN = \frac{m\lambda}{\sin\varphi}\cdot\frac{\lambda}{\delta\lambda\, m} = \frac{\lambda^2}{\delta\lambda \sin\varphi}.$$

Ответ 1) $d = 6$ мкм; 2) $l = 3{,}6$ мм.

5.106 Сравните наибольшую разрешающую способность для красной линии кадмия ($\lambda = 644$ нм) двух дифракционных решеток одинаковой длины ($l = 5$ мм), но разных периодов ($d_1 = 4$ мкм, $d_2 = 8$ мкм).

Дано

$\lambda = 644$ нм $= 6{,}44 \cdot 10^{-7}$ м

$l = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м

$d_1 = 4$ мкм $= 4 \cdot 10^{-6}$ м

$d_2 = 8$ мкм $= 8 \cdot 10^{-6}$ м

$R_{1\max}$ — ?

$R_{2\max}$ — ?

Решение

$$d_1 \sin\varphi = m_1\lambda, \qquad d_2 \sin\varphi = m_2\lambda, \qquad \sin\varphi_{\max} = 1,$$

$$m_1 = \frac{d_1}{\lambda}, \qquad m_2 = \frac{d_2}{\lambda}, \qquad m_1,\ m_2 \text{ — целые числа.}$$

$$N_1 = \frac{l}{d_1}, \qquad N_2 = \frac{l}{d_2}, \qquad R_{1\max} = m_1 N_1,$$

$$R_{2\max} = m_2 N_2. \qquad m_1 = \frac{4\cdot 10^{-6}\ \text{м}}{644\cdot 10^{-9}\ \text{м}} = 6,\ m_2 = 12;$$

$$N_1 = \frac{5\cdot 10^{-3}\ \text{м}}{4\cdot 10^{-6}\ \text{м}} = 1250, \qquad N_2 = 625; \qquad R_{1\max} = 6\cdot 1250 = 7500, \quad R_{2\max} = 7500.$$

Ответ $R_{1\max} = R_{2\max} = 7500$.

5.107 Покажите, что для данной λ максимальная разрешающая способность дифракционных решеток, имеющих разные периоды, но одинаковую длину, имеет одно и то же значение.

Ответ $R_{\max} = \dfrac{l}{\lambda}$.

5.108 Определите постоянную дифракционной решетки, если она в первом порядке разрешает две спектральные линии калия ($\lambda_1 = 578$ нм и $\lambda_2 = 580$ нм). Длина решетки $l = 1$ см.

Дано

$m = 1$

$\lambda_1 = 578$ нм $= 5{,}78 \cdot 10^{-7}$ м

$\lambda_2 = 580$ нм $= 5{,}8 \cdot 10^{-7}$ м

$l = 1$ см $= 10^{-2}$ м

d — ?

Решение

$$R = \frac{\lambda_1}{\delta\lambda} = mN, \qquad N = \frac{\lambda_1}{\delta\lambda\, m}, \qquad \delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1,$$

$$d = \frac{l}{N} = \frac{l\,\delta\lambda\, m}{\lambda_1}.$$

Ответ $d = 34{,}6$ мкм.

5.109 Постоянная d дифракционной решетки длиной $l = 2{,}5$ см равна 5 мкм. Определите разность длин волн, разрешаемую этой решеткой, для света с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм в спектре второго порядка.

Дано

$l = 2{,}5$ см $= 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ м

$d = 5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-6}$ м

$\lambda = 0{,}5$ мкм $= 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м

$m = 2$

$\delta\lambda$ — ?

Решение

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = mN, \qquad N = \frac{l}{d}, \qquad \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m\frac{l}{d},$$

$$\delta\lambda = \frac{\lambda d}{ml}.$$

Ответ $\delta\lambda = 50$ пм.

5.110 Дифракционная решетка имеет $N = 1000$ штрихов и постоянную $d = 10$ мкм. Определите угловую дисперсию для угла дифракции $\varphi = 30°$ в спектре третьего порядка. Найдите разрешающую способность дифракционной решетки в спектре пятого порядка.

Дано

$N = 1000$

$d = 10$ мкм $= 10^{-5}$ м

$\varphi = 30°$

$m_1 = 3$

$m_2 = 5$

D_φ — ? R — ?

Решение

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m_1}{d\cos\varphi}, \qquad R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = m_2 N.$$

Ответ $D_\varphi = 3{,}46 \cdot 10^5$ рад/м; $R = 5000$.

5.111 Определите длину волны, для которой дифракционная решетка с постоянной $d = 3$ мкм в спектре второго порядка имеет угловую дисперсию $D_\varphi = 7 \cdot 10^5$ рад/м.

Ответ $\lambda = 457$ нм.

5.112 Угловая дисперсия дифракционной решетки для $\lambda = 500$ нм в спектре второго порядка равна $4{,}08 \cdot 10^5$ рад/м. Определите постоянную дифракционной решетки.

Дано

$\lambda = 500$ нм $= 0{,}5 \cdot 10^{-6}$ м

$m = 2$

$D_\varphi = 4{,}08 \cdot 10^5$ рад/м

d — ?

Решение

$$D_\varphi = \frac{\delta\varphi}{\delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\varphi}, \qquad \cos\varphi = \frac{m}{D_\varphi d}, \qquad d\sin\varphi = m\lambda,$$

$$\sin\varphi = \frac{m\lambda}{d}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{m\lambda D_\varphi d}{d\,m} = \lambda D_\varphi,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\lambda D_\varphi\right), \qquad d = \frac{m\lambda}{\sin\varphi}.$$

Ответ $d = 5$ мкм.

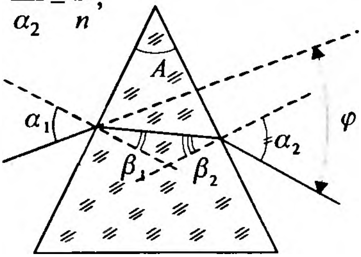
5.4. Взаимодействие электромагнитных волн с веществом

5.113 Докажите, что если монохроматический пучок света падает на грань призмы с показателем преломления n под малым углом, то при малом преломляющем угле A призмы угол отклонения φ лучей не зависит от угла падения и равен $A(n-1)$.

Дано	*Решение*
n A α_1 — мал $\varphi = A(n-1)$ — ?	$\beta_1 + \beta_2 = A$, $\quad \dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = n$, $\quad \dfrac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2} = \dfrac{1}{n}$, $\dfrac{\alpha_1}{\beta_1} = n$, $\quad \dfrac{\beta_2}{\alpha_2} = \dfrac{1}{n}$,

$$\alpha_2 = n\beta_2 = n(A-\beta_1) = nA - n\beta_1 = nA - \alpha_1,$$

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - A = \alpha_1 + nA - \alpha_1 - A = A(n-1).$$



Ответ $\varphi = A(n-1)$.

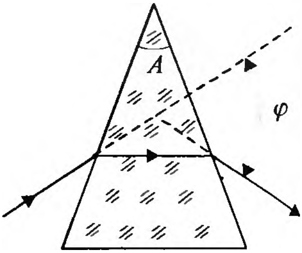
5.114 На стеклянную призму с преломляющим углом $A = 55°$ падает луч света под углом $\alpha_1 = 30°$. Определите угол отклонения φ луча призмой, если показатель преломления n стекла равен 1,5.

Ответ $\varphi = 35°40'$.

5.115 На грань стеклянной призмы ($n = 1{,}5$) нормально падает луч света. Определите угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол $A = 30°$.

Ответ $\varphi = 18°36'$.

5.116 На рисунке представлен симметричный ход луча в равнобедренной призме с преломляющим углом $A = 40°$ (внутри призмы луч распространяется параллельно основанию). Определите угол отклонения φ луча призмой, если показатель преломления n материла линзы равен 1,75.



Ответ $\varphi = 33°32'$.

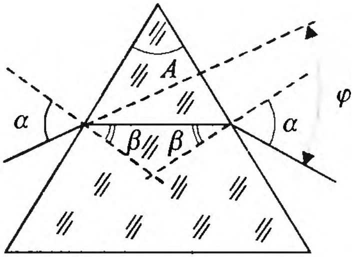
5.117 Луч света выходит из стеклянной призмы ($n = 1{,}5$) под тем же углом, что и входит в нее. Определите угол отклонения φ луча призмой, если ее преломляющий угол $A = 60°$.

Дано	***Решение***
$n = 1{,}5$ $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ $A = 60°$ φ — ?	$\beta_1 = \beta_2 = \beta = \dfrac{A}{2}$, $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$,

$$\sin\alpha = n\sin\beta = n\sin\left(\frac{A}{2}\right),$$

$$\alpha = \arcsin\left(n\sin\left(\frac{A}{2}\right)\right),$$

$$\varphi = 2\alpha - A = 2\arcsin\left(n\sin\frac{A}{2}\right) - A.$$



Ответ $\varphi = 37°11'$.

5.118 Определите максимальную скорость вынужденных колебаний свободного электрона, если в точке его нахождения радиопередатчик, работающий на частоте 500 кГц, создает поле электромагнитного излучения $E_0 = 10$ мВ/см.

Дано

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$\nu = 500$ кГц $= 5 \cdot 10^5$ Гц

$E_0 = 10$ мВ/см $= 1$ В/м

$\upsilon_{\max}$ — ?

Решение

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_{\text{вын}}}{m}\cos\omega t, \qquad \omega = 2\pi\nu, \qquad \omega_0 = 0,$$

$$F_{\text{вын}} = eE_0, \qquad \ddot{x} = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t, \qquad \dot{x} = \upsilon = \frac{eE_0}{m\omega}\sin\omega t,$$

$$\upsilon_{\max} = \frac{eE_0}{m\omega} = \frac{eE_0}{2m\pi\nu}.$$

Ответ $\upsilon_{\max} = 55{,}9$ км/с.

5.119 Электромагнитная волна с частотой ω распространяется в разреженной плазме. Концентрация свободных электронов в плазме равна n_0. Определите зависимость диэлектрической проницаемости ε плазмы от частоты ω. Взаимодействием волны с ионами плазмы пренебречь.

Дано

n_0

ω

$\varepsilon(\omega)$ — ?

Решение

$$\varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E}, \qquad P = n_0 e x, \qquad \varepsilon = 1 + \frac{n_0 e x}{\varepsilon_0 E},$$

$$E = E_0 \cos\omega t, \qquad x = A\cos\omega t, \qquad A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)},$$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t, \qquad \varepsilon = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m}\cdot\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

$$\omega_0 = 0, \qquad \varepsilon = 1 - \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}.$$

Ответ $\varepsilon = 1 - \dfrac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}$.

5.120

Определите концентрацию свободных электронов ионосферы, если для радиоволн с частотой $\nu = 97$ МГц ее показатель преломления $n = 0{,}91$.

Дано

$\nu = 97$ МГц $= 97 \cdot 10^6$ Гц

$n = 0{,}91$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

n_0 — ?

Решение

$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$, $\quad \mu = 1$, $\quad n = \sqrt{\varepsilon}$,

$\varepsilon = 1 + \varkappa$, $\quad P = \varkappa\,\varepsilon_0 E_0$, $\quad P = n_0 e x_{\max}$,

$$n^2 = \varepsilon = 1 + \varkappa = 1 + \frac{P}{\varepsilon_0 E_0} = 1 + \frac{n_0 e}{\varepsilon_0 E_0} x_{\max},$$

$$n^2 = (n^2 - 1)\frac{\varepsilon_0 E_0}{e x_{\max}}, \qquad \ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{eE_0}{m}\cos\omega t,$$

$$\omega = 2\pi\nu, \qquad x = A\cos\omega t, \qquad A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}, \qquad \omega_0 = 0, \qquad x_{\max} = A,$$

$$x_{\max} = -\frac{eE_0}{m\omega^2}, \qquad n_0 = (1 - n^2)\frac{\varepsilon_0 E_0 m\omega^2}{e^2 E_0} = (1 - n^2)\frac{4\pi^2\nu^2\varepsilon_0 m}{e^2}.$$

Ответ $n_0 = 2 \cdot 10^7$ см$^{-3}$.

5.121

При прохождении в некотором веществе пути x интенсивность света уменьшилась в 3 раза. Определите, во сколько раз уменьшится интенсивность света при прохождении пути $2x$.

Дано

x

$\dfrac{I_0}{I_1} = 3$

$2x$

$\dfrac{I_0}{I_2}$ — ?

Решение

$$I_1 = I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha x}, \qquad \frac{I_0}{3} = I_0\,\mathrm{e}^{-\alpha x}, \qquad \mathrm{e}^{-\alpha x} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha x = \ln 3, \qquad I_2 = I_0\,\mathrm{e}^{-2\alpha x} = I_0\,\mathrm{e}^{-2\ln 3}, \qquad \frac{I_0}{I_2} = \mathrm{e}^{2\ln 3}.$$

Ответ $\dfrac{I_0}{I_2} = 9$.

5.122 Коэффициент поглощения некоторого вещества для монохроматического света определенной длины волны $\alpha = 0{,}1$ см$^{-1}$. Определите толщину слоя вещества, которая необходима для ослабления света в 2 раза и в 5 раз. Потери на отражение света не учитывать.

Ответ $d_1 = 6{,}93$ см; $d_2 = 16{,}1$ см.

5.123 Плоская монохроматическая световая волна распространяется в некоторой среде. Коэффициент поглощения среды для данной длины волны $\alpha = 1{,}2$ м$^{-1}$. Определите, на сколько процентов уменьшится интенсивность света при прохождении данной волной пути: 1) 10 мм; 2) 1 м.

Дано	Решение
$\alpha = 1{,}2$ м$^{-1}$	
1) $x = 10$ мм $= 10^{-2}$ м	$I = I_0\,e^{-\alpha x}$, $\quad \frac{I_0 - I}{I_0} = \frac{I_0 - I_0\,e^{-\alpha x}}{I_0} = 1 - e^{-\alpha x}$.
2) $x = 1$ м	
$\frac{I_0 - I}{I_0}$ — ?	**Ответ** 1) 1,2%; 2) 70%.

5.124 Свет падает нормально поочередно на две пластинки, изготовленные из одного и того же вещества, имеющие соответственно толщины $x_1 = 5$ мм и $x_2 = 10$ мм. Определите коэффициент поглощения этого вещества, если интенсивность прошедшего света через первую пластинку составляет 82%, а через вторую — 67% от начальной интенсивности.

Дано	Решение
$x_1 = 5$ мм $= 5 \cdot 10^{-3}$ м	$I_1 = I_0\,e^{-\alpha x_1}$, $\quad I_2 = I_0\,e^{-\alpha x_2}$,
$x_2 = 10$ мм $= 10^{-2}$ м	$\frac{I_1}{I_2} = e^{\alpha(x_2 - x_1)}$, $\quad \alpha = \frac{\ln(I_1/I_2)}{x_2 - x_1}$.
$I_1 = 0{,}82 I_0$	
$I_2 = 0{,}67 I_0$	
α — ?	**Ответ** $\alpha = 0{,}404$ см$^{-1}$.

5.125 Источник монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = 0{,}5$ мкм движется по направлению к наблюдателю со скоростью $0{,}15c$ (c — скорость света в вакууме). Определите длину волны, которую зарегистрирует приемник наблюдателя.

Дано	*Решение*
$\lambda_0 = 0{,}5$ мкм $= 5\cdot10^{-7}$ м $v = 0{,}15c$ $\vartheta = \pi$ λ — ?	$\nu = \nu_0 \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\vartheta}$, $\lambda = \dfrac{c}{\nu}$, $\lambda = \lambda_0\cdot\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}}}$, ($\cos\pi = -1$).

Ответ $\lambda = 430$ нм.

5.126 При какой скорости красный свет (690 нм) будет казаться зеленым (530 нм)?

Ответ $v = 77{,}4$ Мм/с.

5.127 В спектральных линиях, излучаемых астрономическими объектами — квазарами, наблюдалось красное смещение, отвечающее трехкратному уменьшению частоты. Определите, с какой скоростью при этом должен был бы удаляться квазар.

Дано	*Решение*
$\nu = \dfrac{\nu_0}{3}$ $\vartheta = 0$ v — ?	$\nu = \nu_0 \dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\vartheta}$, $\vartheta = 0$, $\cos\vartheta = 1$, $\nu = \nu_0\sqrt{\dfrac{1-\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}}}$,

$$\frac{\nu}{\nu_0} = \frac{1}{3}, \qquad \frac{1-\dfrac{v}{c}}{1+\dfrac{v}{c}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2, \qquad 1+\frac{v}{c} = 9\left(1-\frac{v}{c}\right), \qquad 10\frac{v}{c} = 8, \qquad v = 0{,}8c.$$

Ответ $v = 0{,}8c$.

Известно, что при удалении от нас некоторой туманности линия излучения водорода ($\lambda = 656{,}3$ нм) в ее спектре смещена в красную сторону на $\Delta\lambda = 2{,}5$ нм. Определите скорость удаления туманности.

Ответ $v = 1{,}14$ Мм/с.

5.129 Выведите выражение для уширения $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий в случае продольного эффекта Доплера при $v \ll c$.

5.130 Исходя из общей формулы, описывающей эффект Доплера для электромагнитных волн в вакууме, выведите формулу для поперечного эффекта Доплера. Почему поперечный эффект Доплера является чисто релятивистским эффектом?

5.131 Выведите выражение для уширения $\Delta\lambda/\lambda$ спектральных линий в случае поперечного эффекта Доплера.

Дано	*Решение*
$\vartheta = \pi/2$ $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda}$ — ?	$\nu' = \nu\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\vartheta}$, $\quad \cos\vartheta = \cos\dfrac{\pi}{2} = 0$, $\quad \lambda = \dfrac{c}{\nu}$,

$$\lambda' = \frac{c}{\nu'},\ \frac{\lambda'}{\lambda} = \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \qquad \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{3}{8}\left(\frac{v^4}{c^4}\right)+\ldots,$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \qquad \lambda' = \lambda+\Delta\lambda, \qquad \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v^2}{2c^2}.$$

Ответ $\dfrac{\Delta\lambda}{\lambda} = \dfrac{v^2}{2c^2}$.

5.132 Определите доплеровское смещение $\Delta\lambda$ для спектральной линии атомарного водорода ($\lambda = 486{,}1$ нм), если ее наблюдать под прямым углом к пучку атомов водорода с кинетической энергией $T = 100$ кэВ.

Дано	*Решение*
$\lambda = 486{,}1$ нм $= 486{,}1 \cdot 10^{-9}$ м $\vartheta = \dfrac{\pi}{2}$ $T = 100$ кэВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-14}$ Дж $m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг $c = 3 \cdot 10^{8}$ м/с $\Delta\lambda$ — ?	$\nu' = \nu\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{1+\dfrac{v}{c}\cos\vartheta}$, $\cos\vartheta = 0$, $\nu' = \nu\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, $\nu' = \dfrac{c}{\lambda'}$, $\dfrac{\lambda'}{\lambda} = \left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}$, $\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} = 1+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v^2}{c^2}\right)+\dfrac{3}{8}\left(\dfrac{v^4}{c^4}\right)+\ldots$,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right), \qquad \lambda' = \lambda + \Delta\lambda, \qquad \frac{\lambda+\Delta\lambda}{\lambda} = 1+\frac{1}{2}\left(\frac{v^2}{c^2}\right),$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v^2}{2c^2}, \qquad T = \frac{mv^2}{2}, \qquad v^2 = \frac{2T}{m}, \qquad \Delta\lambda = \lambda\frac{T}{mc^2}.$$

Ответ $\Delta\lambda = 51{,}7$ пм.

5.133 Определите скорость электронов, при которой черенковское излучение происходит в среде с показателем преломления $n = 1{,}54$ под углом $\vartheta = 30°$ к направлению их движения. Скорость выразите в долях скорости света.

Дано	*Решение*
$n = 1{,}54$ $\vartheta = 30°$ v — ?	$\cos\vartheta = \dfrac{c}{nv}$, $v = \dfrac{c}{n\cos\vartheta}$. ***Ответ*** $v = 0{,}75c$.

5.134 Определите кинетическую энергию протонов, которые в среде с показателем преломления $n = 1{,}6$ излучают свет под углом $\vartheta = 20°$ к направлению своего движения. Ответ выразите в электрон-вольтах.

Дано	Решение
$m = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг $n = 1{,}6$ $\vartheta = 20°$ T(эВ) — ?	$\cos\vartheta = \dfrac{c}{nv}$, $\dfrac{v}{c} = \dfrac{1}{n\cos\vartheta}$, $T = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right)$,

$$T = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{n\cos\vartheta}\right)^2}} - 1\right).$$

Ответ $T = 0{,}319$ ГэВ.

5.135 Определите минимальный импульс, которым должен обладать электрон, чтобы эффект Вавилова—Черенкова наблюдался в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$.

Дано	Решение
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг $n = 1{,}5$ $p_{\min}$ — ?	$\cos\vartheta = \dfrac{c}{nv}$, $v = \dfrac{c}{n\cos\vartheta}$, $v_{\min} = \dfrac{c}{n}$ $(\cos\vartheta = 1)$,

$$p_{\min} = \frac{mc}{n\cdot\sqrt{1-\left(\dfrac{v_{\min}}{c}\right)^2}} = \frac{mc}{n\cdot\sqrt{1-\dfrac{1}{n^2}}}, \qquad p_{\min} = \frac{mc}{\sqrt{n^2-1}}.$$

Ответ $p_{\min} = 2{,}44 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

5.136 Определите минимальную кинетическую энергию, которой должен обладать электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$ возникло черенковское излучение. Ответ выразите в МэВ.

Ответ $T_{\min} = mc^2\left(\dfrac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right) = 0{,}175$ МэВ.

5.137 Определите минимальную ускоряющую разность потенциалов $U_{\min}$, которую должен пройти электрон, чтобы в среде с показателем преломления $n = 1{,}5$ возникло черенковское излучение.

Дано	*Решение*
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг $n = 1{,}5$	$\cos\vartheta = \dfrac{c}{n\upsilon}$, $\qquad \upsilon = \dfrac{c}{n\cos\vartheta}$,
$U_{\min}$ — ?	$\upsilon_{\min} = \dfrac{c}{n}$, $\qquad (\cos\vartheta = 1)$,

$$T_{\min} = mc^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\upsilon_{\min}^2/c^2}} - 1\right), \qquad T_{\min} = mc^2\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right),$$

$$T_{\min} = |e|U_{\min}, \qquad U_{\min} = \frac{mc^2}{|e|}\left(\frac{n}{\sqrt{n^2-1}} - 1\right).$$

Ответ $U_{\min} = 175$ кВ.

5.5. Поляризация света

5.138 Опишите поведение светового вектора **E** в данной точке пространства в случае эллиптически поляризованного света.

5.139 Определите степень поляризации частично поляризованного света, если амплитуда светового вектора, соответствующая максимальной интенсивности света, в 3 раза больше амплитуды, соответствующей его минимальной интенсивности.

Дано	*Решение*
$E_{0_{\max}}/E_{0_{\min}}=3$	$P=\dfrac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$, $\quad I\sim E_0^2$,
P — ?	

$$P=\frac{E_{0_{\max}}^2-E_{0_{\min}}^2}{E_{0_{\max}}^2+E_{0_{\min}}^2}=\frac{\left(E_{0_{\max}}^2/E_{0_{\min}}^2\right)^2-1}{\left(E_{0_{\max}}^2/E_{0_{\min}}^2\right)^2+1}.$$

Ответ $P=0{,}8$.

5.140 Степень поляризации частично поляризованного света составляет 0,75. Определите отношение максимальной интенсивности света, пропускаемого анализатором, к минимальной.

Дано	*Решение*
$P=0{,}75$	$P=\dfrac{I_{\max}-I_{\min}}{I_{\max}+I_{\min}}$, $\quad P=\dfrac{\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}}-1}{\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}}+1}$.
$\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}}$ — ?	

Ответ $\dfrac{I_{\max}}{I_{\min}}=7$.

5.141 Определите степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света равна интенсивности естественного.

Дано	*Решение*
$I_\text{п} = I_\text{ест}$	$P = \dfrac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$,
P — ?	

$$I_{\max} = I_\text{п} + \frac{1}{2} I_\text{ест} = I_\text{п} + \frac{1}{2} I_\text{п} = \frac{3}{2} I_\text{п}, \qquad I_{\min} = \frac{1}{2} I_\text{ест} = \frac{1}{2} I_\text{п},$$

$$P = \frac{\frac{3}{2} I_\text{п} - \frac{1}{2} I_\text{п}}{\frac{3}{2} I_\text{п} + \frac{1}{2} I_\text{п}} = \frac{I_\text{п}}{2 I_\text{п}} = 0{,}5.$$

Ответ $P = 0{,}5$.

5.142 Определите степень поляризации P света, который представляет собой смесь естественного света с плоскополяризованным, если интенсивность поляризованного света в 5 раз больше интенсивности естественного.

Ответ $P = 0{,}833$.

5.143 Угол между главными плоскостями поляризатора и анализатора составляет 30°. Определите изменение интенсивности прошедшего через них света, если угол между главными плоскостями равен 45°.

Дано	*Решение*
$\alpha_1 = 30°$ $\alpha_2 = 45°$	$I_1 = I_0 \cos^2 \alpha_1$, $\quad I_2 = I_0 \cos^2 \alpha_2$, $\dfrac{I_1}{I_2} = \dfrac{\cos^2 \alpha_1}{\cos^2 \alpha_2}$.
$\dfrac{I_1}{I_2}$ — ?	***Ответ*** $\dfrac{I_1}{I_2} = 1{,}5$.

5.144 Интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, уменьшилась в 8 раз. Пренебрегая поглощением света, определите угол между главными плоскостями николей.

Ответ $\alpha = 60°$.

5.145 Определите, во сколько раз ослабится интенсивность света, прошедшего через два николя, расположенные так, что угол между их главными плоскостями $\alpha = 60°$, а в каждом из николей теряется 8% интенсивности падающего на него света.

Дано

$\alpha = 60°$

$k = 0{,}08$

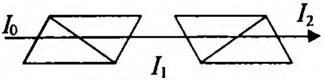
$\dfrac{I_0}{I_2}$ — ?

Решение

$$I_1 = \frac{1}{2} I_0 (1-k), \qquad I_2 = I_1 (1-k)\cos^2\alpha,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} I_0 (1-k)^2 \cos^2\alpha, \qquad \frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{(1-k)^2\cos^2\alpha}.$$

Ответ $\dfrac{I_0}{I_2} = 9{,}45$.



5.146 Определите, во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света, прошедшего через два николя, главные плоскости которых образуют угол в 60°, если каждый из николей как поглощает, так и отражает 5% падающего на них света.

Дано

$\alpha = 60°$

$k_1 = k_2 = 0{,}05$

$\dfrac{I_0}{I_2}$ — ?

Решение

$$I_1 = \frac{1}{2}(1-(k_1+k_2))I_0 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}9 \cdot I_0,$$

$$I_2 = I_1 \cdot 0{,}9\cos^2\alpha = \frac{1}{2}\cdot I_0 \cdot 0{,}9^2\cos^2\alpha,$$

$$\frac{I_0}{I_2} = \frac{2}{0{,}9^2\cdot\cos^2\alpha}.$$

Ответ $\dfrac{I_0}{I_2} = 9{,}88$.

5.147 Естественный свет проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых равен α. Поляризатор и анализатор как поглощают, так и отражают 10% падающего на них света. Определите угол α, если интенсивность света, вышедшего из анализатора, равна 12% интенсивности света, падающего на поляризатор.

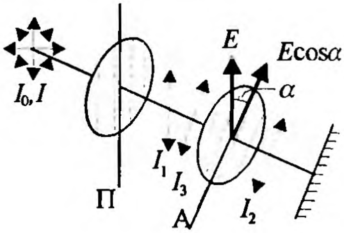
Дано	Решение
$k_1 = k_2 = 0{,}1$ $I_2 = 0{,}12 I_0$	$I_1 = \frac{1}{2}(1-(k_1+k_2))I_0 = \frac{1}{2}\cdot 0{,}8\cdot I_0$,
α — ?	$I_2 = I_1 \cdot 0{,}8\cos^2\alpha$, $\quad I_2 = \frac{1}{2}\cdot I_0 \cdot 0{,}8^2\cos^2\alpha$,

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{2I_2}{I_0\cdot 0{,}8}} = \sqrt{\frac{2\cdot 0{,}12 I_0}{I_0\cdot 0{,}8}} = 0{,}612\,, \qquad \alpha = \arccos 0{,}612 = 52{,}24° = 52°14'\,.$$

Ответ $\alpha = 52°14'$.

5.148 Естественный свет интенсивностью I_0 проходит через поляризатор и анализатор, угол между главными плоскостями которых составляет α. После прохождения света через эту систему он падает на зеркало и, отразившись, проходит вновь через нее. Пренебрегая поглощением света, определите интенсивность I света после его обратного прохождения.

Дано	Решение
I_0 α	$I_1 = \frac{1}{2} I_0$,
I — ?	$I_2 = I_1\cos^2\alpha$,



$$I_2 = \frac{1}{2} I_0\cos^2\alpha\,, \qquad I_3 = I_2 = \frac{1}{2} I_0 \cos^2\alpha\,,$$

$$I = I_3\cos^2\alpha = \frac{1}{2} I_0\cos^4\alpha\,.$$

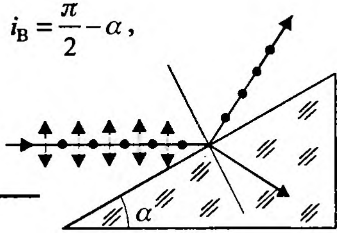
Ответ $I = \frac{1}{2} I_0 \cos^4\alpha\,.$

5.149 Докажите, что при падении света на границу раздела двух сред под углом Брюстера отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны.

5.150 Известно, что при падении света на прозрачный диэлектрик под углом Брюстера отраженный свет является плоскополяризованным. Чем необходимо воспользоваться, чтобы получить преломленный свет практически полностью поляризованным?

5.151 Пучок естественного света падает на стеклянную призму с углом $\alpha = 30°$. Определите показатель преломления стекла, если отраженный луч является плоскополяризованным.

Дано	***Решение***
$\alpha = 30°$ n — ?	$\operatorname{tg} i_B = n_{21} = n$, $\quad i_B = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $n = \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\right)$.



Ответ $n = 1{,}73$.

5.152 Определите показатель преломления стекла, если при отражении от него света отраженный луч полностью поляризован при угле преломления 35°.

Дано	***Решение***
$\gamma = 35°$ n — ?	$\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = n$, $\quad \alpha = i_B$, $\quad i_B = 90° - \gamma$, $\quad n = \dfrac{\sin(90° - \gamma)}{\sin\gamma}$.

Ответ $n = 1{,}43$.

5.153 Определите, под каким углом к горизонту должно находиться Солнце, чтобы лучи, отраженные от поверхности озера ($n = 1{,}33$), были максимально поляризованы.

Дано	**Решение**
$n = 1{,}33$	$\operatorname{tg} i_B = n_{21} = n$, $\quad i_B = \operatorname{arctg} n$,
φ — ?	$\varphi = \dfrac{\pi}{2} - i_B$.

Ответ $\varphi = 36°56'$.

5.154 Предельный угол полного отражения для пучка света на границе кристалла каменной соли с воздухом равен 40,5°. Определите угол Брюстера при падении света из воздуха на поверхность этого кристалла.

Дано	**Решение**
$i_{\text{пр}} = 40{,}5°$	$\dfrac{\sin i_{\text{пр}}}{\sin(\pi/2)} = \dfrac{n_1}{n_2}$, $\qquad \dfrac{n_2}{n_1} = \dfrac{1}{\sin i_{\text{пр}}}$,
i_B — ?	

$$\operatorname{tg} i_B = \frac{n_2}{n_1} = \frac{1}{\sin i_{\text{пр}}}, \qquad i_B = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sin i_{\text{пр}}}\right).$$

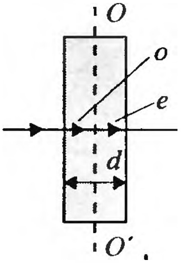
Ответ $i_B = 57°$.

5.155 Свет, проходя через жидкость, налитую в стеклянный сосуд ($n = 1{,}5$), отражается от дна, причем отраженный свет плоскополяризован при падении его на дно сосуда под углом 41°. Определите: 1) показатель преломления жидкости; 2) угол падения света на дно сосуда, чтобы наблюдалось полное отражение.

Ответ 1) $n = 1{,}73$; 2) $i = 60°7'$.

5.156 Параллельный пучок света падает нормально на пластинку из исландского шпата толщиной 50 мкм, вырезанную параллельно оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определите разность хода этих лучей, прошедших через пластинку.

Дано	*Решение*
$d = 50$ мкм $= 5 \cdot 10^{-5}$ м $n_o = 1{,}66$ $n_e = 1{,}49$ Δ — ?	$\Delta = dn_o - dn_e = d(n_o - n_e)$.



Ответ $\Delta = 8{,}5$ мкм.

5.157 Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 589$ нм, падает на пластинку исландского шпата перпендикулярно его оптической оси. Принимая показатели преломления исландского шпата для обыкновенного и необыкновенного лучей соответственно $n_o = 1{,}66$ и $n_e = 1{,}49$, определите длины волн этих лучей в кристалле.

Дано	*Решение*
$\lambda = 589$ нм $= 5{,}89 \cdot 10^{-7}$ м $n_o = 1{,}66$ $n_e = 1{,}49$ λ_o — ? λ_e — ?	$\lambda = cT$, $\quad \lambda_o = v_o T$, $\quad \lambda_e = v_e T$, $v_o = \dfrac{c}{n_o}$, $\quad v_e = \dfrac{c}{n_e}$, $\quad \lambda_o = \dfrac{\lambda}{n_0}$, $\lambda_e = \dfrac{\lambda}{n_e}$ (См. рисунок к задаче 5.156).

Ответ $\lambda_o = 355$ нм, $\lambda_e = 395$ нм.

5.158 Плоскополяризованный свет, длина волны которого в вакууме $\lambda = 530$ нм, падает на пластинку из кварца перпендикулярно ее оптической оси. Определите показатели преломления кварца для обыкновенного (n_o) и необыкновенного (n_e) лучей, если длины волн этих лучей в кристалле соответственно равны $\lambda_o = 344$ нм и $\lambda_e = 341$ нм.

Ответ $n_o = 1{,}54$, $n_e = 1{,}55$.

5.159 Определите наименьшую толщину кристаллической пластинки в четверть волны для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0{,}01$. Пластинкой в четверть волны называется кристаллическая пластинка, вырезанная параллельно оптической оси, при прохождении через которую в направлении, перпендикулярном оптической оси, обыкновенный и необыкновенный лучи, не изменяя своего направления, приобретают разность хода, равную $\lambda/4$.

Дано	*Решение*
$\lambda = 530$ нм $= 5{,}3 \cdot 10^{-7}$ м $n_e - n_o = 0{,}01$ $\Delta = \lambda/4$	$\Delta = d(n_e - n_o)$, $\quad \Delta = \dfrac{\lambda}{4}$, $d = \dfrac{\lambda}{4(n_e - n_o)}$.
d — ?	

Ответ $d = 13{,}3$ мкм.

5.160 Кристаллическая пластинка из исландского шпата с наименьшей толщиной $d = 0{,}86$ мкм служит пластинкой в четверть волны (см. задачу 5.159) для $\lambda = 0{,}59$ мкм. Определите разность Δn показателей преломления обыкновенного и необыкновенного лучей.

Ответ $\Delta n = 0{,}171$.

5.161 Используя задачу 5.159, дайте определение кристаллической пластинки в полволны и определите ее наименьшую толщину для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0{,}01$.

Ответ $d_{\min} = 26{,}5$ мкм.

5.162 Используя задачу 5.159, дайте определение кристаллической пластинки "в целую волну" и определите ее наименьшую толщину для $\lambda = 530$ нм, если разность показателей преломления необыкновенного и обыкновенного лучей для данной длины волны $n_e - n_o = 0{,}01$.

Дано	*Решение*
$\lambda = 530$ нм $= 5{,}3 \cdot 10^{-7}$ м $n_e - n_o = 0.01$ $\Delta = \lambda$ $d_{\min}$ — ?	$\Delta = d_{\min}(n_e - n_o)$, $\quad \Delta = \lambda$ (при $m = 0$). $d_{\min}(n_e - n_o) = \lambda$, $\quad d_{\min} = \dfrac{\lambda}{n_e - n_o}$.

Ответ $d_{\min} = 53$ мкм.

5.163 Объясните, изменится ли наблюдаемая оптическая картина в случае эффекта Керра, если направление напряженности электрического поля изменить на противоположное.

5.164 Определите толщину кварцевой пластинки, для которой угол поворота плоскости поляризации монохроматического света определенной длины волны $\varphi = 180°$. Удельное вращение в кварце для данной длины волны $\alpha = 0{,}52$ рад/мм.

Ответ $d = 6{,}04$ мм.

5.165 Пластинка кварца толщиной $d_1 = 2$ мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси кристалла, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света определенной длины волны на угол $\varphi_1 = 30°$. Определите толщину d_2 кварцевой пластинки, помещенной между параллельными николями, чтобы данный монохроматический свет гасился полностью.

Дано	*Решение*
$d_1 = 2$ мм $= 2 \cdot 10^{-3}$ м $\varphi_1 = 30°$ $\varphi_2 = 90°$	$\varphi_1 = \alpha d_1$, $\qquad \varphi_2 = \alpha d_2$, $\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2} = \dfrac{d_1}{d_2}$, $\qquad d_2 = \dfrac{d_1 \varphi_2}{\varphi_1}$.
d_2 — ?	**Ответ** $d_2 = 6$ мм.

5.166 Определите массовую концентрацию C сахарного раствора, если при прохождении света через трубку длиной $l = 20$ см с этим раствором плоскость поляризации света поворачивается на угол $\varphi = 10°$. Удельное вращение $[\alpha]$ сахара равно $1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад · м²/кг.

Дано	*Решение*
$l = 20$ см $= 0{,}2$ м $\varphi = 10°$ $[\alpha] = 1{,}17 \cdot 10^{-2}$ рад · м²/кг	$\varphi = [\alpha] C l$, $\qquad C = \dfrac{\varphi}{[\alpha] l}$. $1° = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад.
C — ?	**Ответ** $C = 74{,}8$ кг/м³.

Некоторые внесистемные величины

1 сут = 86400 с	$1° = 1{,}75 \cdot 10^{-2}$ рад
1 год = $3{,}16 \cdot 10^7$ с	$1' = 2{,}91 \cdot 10^{-4}$ рад
	$1'' = 4{,}85 \cdot 10^{-6}$ рад

5.167

Раствор глюкозы с массовой концентрацией $C_1 = 0{,}21$ г/см³, находящийся в стеклянной трубке, поворачивает плоскость поляризации монохроматического света, проходящего через раствор, на угол $\varphi_1 = 24°$. Определите массовую концентрацию C_2 глюкозы в другом растворе в трубке такой же длины, если он поворачивает плоскость поляризации на угол $\varphi_2 = 18°$.

Ответ $C_2 = 0{,}157$ г/см³.

5.168

Плоскополяризованный монохроматический свет, прошедший через поляроид, оказывается полностью погашенным. Если же на пути света поместить кварцевую пластинку, то интенсивность прошедшего через поляроид света уменьшается в 3 раза (по сравнению с интенсивностью света, падающего на поляроид). Принимая удельное вращение в кварце $[\alpha] = 0{,}52$ рад/мм и пренебрегая потерями света, определите минимальную толщину кварцевой пластинки.

Дано

$\dfrac{I_0}{I} = 3$

$[\alpha] = 0{,}52$ рад/мм $=$

$= 520$ рад/м

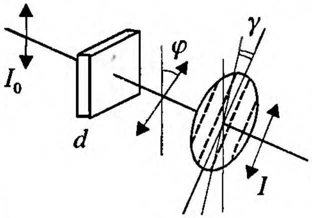
d — ?

Решение

$\varphi = [\alpha]d$,

$I = I_0 \cos^2\gamma$,

$\gamma = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$,



$I = I_0 \cos^2\left(\dfrac{\pi}{2} - [\alpha]d\right)$,

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - [\alpha]d\right) = \sqrt{\dfrac{1}{3}}$, $\quad \dfrac{\pi}{2} - [\alpha]d = \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$, $\quad [\alpha]d = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)$,

$$d = \frac{\dfrac{\pi}{2} - \arccos\left(\sqrt{\dfrac{1}{3}}\right)}{[\alpha]}.$$

Ответ $d = 1{,}18$ мм.

5.6. Квантовая природа излучения

5.169 Объясните, почему в неотапливаемом помещении температура всех тел одинакова.

5.170 Объясните, почему открытые окна домов со стороны улиц кажутся черными.

5.171 Чайная фарфоровая чашка на светлом фоне имеет темный рисунок. Если эту чашку быстро вынуть из печи, где она нагревалась до высокой температуры, и рассматривать в темноте, то наблюдается светлый рисунок на темном фоне. Объясните почему.

5.172 Имеются два одинаковых алюминиевых чайника, в которых до одной и той же температуры нагрето одинаковое количество воды. Один чайник закопчен, а другой чистый. Объясните, какой из чайников остынет быстрее и почему.

5.173 Определите, во сколько раз необходимо уменьшить термодинамическую температуру черного тела, чтобы его энергетическая светимость R_e ослабилась в 16 раз.

Дано	*Решение*
$\dfrac{R_{e1}}{R_{e2}} = 16$	$R_{e1} = \sigma T_1^4$, $\quad R_{e2} = \sigma T_2^4$,
$\dfrac{T_1}{T_2}$ — ?	$\dfrac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\dfrac{R_{e1}}{R_{e2}}}$.

Ответ $\dfrac{T_1}{T_2} = 2$.

5.174 Температура внутренней поверхности муфельной печи при открытом отверстии площадью 30 см^2 равна 1,3 кК. Принимая, что отверстие печи излучает как черное тело, определите, какая часть мощности рассеивается стенками, если потребляемая печью мощность составляет 1,5 кВт.

Дано	*Решение*
$S = 30\ \text{см}^2 = 3 \cdot 10^{-3}\ \text{м}^2$ $T = 1{,}3\ \text{кК} = 1{,}3 \cdot 10^3\ \text{К}$ $P = 1{,}5\ \text{кВт} = 1{,}5 \cdot 10^3\ \text{Вт}$ $\dfrac{P_{\text{рас}}}{P}$ — ?	$P_{\text{изл}} = R_e S = \sigma T^4 S$, $P_{\text{рас}} = P - P_{\text{изл}} = P - \sigma T^4 S$, $\dfrac{P_{\text{рас}}}{P} = 1 - \dfrac{\sigma T^4 S}{P}$. **Ответ** $\dfrac{P_{\text{рас}}}{P} = 0{,}676$.

5.175 Энергетическая светимость черного тела $R_e = 10\ \text{кВт/м}^2$. Определите длину волны, соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости этого тела.

Ответ $\lambda = 4{,}47\ \text{мкм}$.

5.176 Определите, как и во сколько раз изменится мощность излучения черного тела, если длина волны, соответствующая максимуму его спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_1 = 720\ \text{нм}$ до $\lambda_2 = 400\ \text{нм}$.

Дано	*Решение*
$\lambda_1 = 720\ \text{нм} = 7{,}2 \cdot 10^{-7}\ \text{м}$ $\lambda_2 = 400\ \text{нм} = 4 \cdot 10^{-7}\ \text{м}$ $\dfrac{P_2}{P_1}$ — ?	$\lambda_1 = \dfrac{b}{T_1}$, $\lambda_2 = \dfrac{b}{T_2}$, $P_1 = R_{e1} S = \sigma T_1^4 S$, $P_2 = R_{e2} S = \sigma T_2^4 S$, $\dfrac{P_2}{P_1} = \dfrac{T_2^4}{T_1^4} = \dfrac{\lambda_1^4}{\lambda_2^4}$. **Ответ** $\dfrac{P_2}{P_1} = 10{,}5$.

5.177 Черное тело находится при температуре $T_1 = 3$ кК. При остывании тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, изменилась на $\Delta\lambda = 8$ мкм. Определите температуру T_2, до которой тело охладилось.

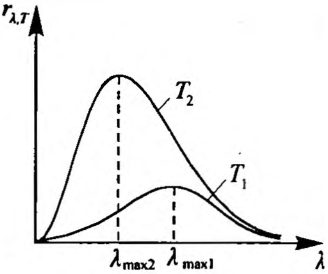
Ответ $T_2 = 323$ К.

5.178 Черное тело нагрели от температуры $T_1 = 600$ К до $T_2 = 2400$ К. Определите: 1) во сколько раз увеличилась его энергетическая светимость; 2) как изменилась длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости.

Ответ 1) $n = 256$; 2) уменьшилась на 3,62 мкм.

5.179 Площадь, ограниченная графиком спектральной плотности энергетической светимости $r_{\lambda,T}$ черного тела, при переходе от термодинамической температуры T_1 к температуре T_2 увеличилась в 5 раз. Определите, как изменится при этом длина волны $\lambda_{\max}$, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости черного тела.

Дано	*Решение*
$\dfrac{S_2}{S_1} = 5$	$S_1 = R_{e1} = \int\limits_0^\infty r_{\lambda,T_1}\,\mathrm{d}\lambda,$
$\dfrac{\lambda_{\max 1}}{\lambda_{\max 2}}$ — ?	$S_2 = R_{e2} = \int\limits_0^\infty r_{\lambda,T_2}\,\mathrm{d}\lambda,$



$R_{e1} = \sigma T_1^4,\qquad R_{e2} = \sigma T_2^4,\qquad T_1 = \dfrac{b}{\lambda_{\max 1}},\qquad T_2 = \dfrac{b}{\lambda_{\max 2}},$

$$\frac{\lambda_{\max 1}}{\lambda_{\max 2}} = \frac{T_2}{T_1} = \frac{\sqrt[4]{R_{e2}}}{\sqrt[4]{R_{e1}}} = \sqrt[4]{\frac{S_2}{S_1}}.$$

Ответ $\dfrac{\lambda_{\max 1}}{\lambda_{\max 2}} = 1{,}49$,

уменьшится в 1,49 раза.

5.180 В результате нагревания черного тела длина волны, соответствующая максимуму спектральной плотности энергетической светимости, сместилась с $\lambda_1 = 2{,}7$ мкм до $\lambda_2 = 0{,}9$ мкм. Определите, во сколько раз увеличилась: 1) энергетическая светимость тела; 2) максимальная спектральная плотность энергетической светимости тела. Максимальная спектральная плотность энергетической светимости черного тела возрастает по закону $\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = CT^5$, где $C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³ · К⁵).

Дано

$\lambda_1 = 2{,}7$ мкм $= 2{,}7 \cdot 10^{-6}$ м

$\lambda_2 = 0{,}9$ мкм $= 0{,}9 \cdot 10^{-6}$ м

$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = CT^5$

$C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³ · К⁵).

1) $\dfrac{R_{e1}}{R_{e2}}$ — ?

2) $\left(\dfrac{r_{\lambda_2,T_2}}{r_{\lambda_1,T_1}}\right)_{\max}$ — ?

Решение

$$R_e = \sigma T^4, \qquad \lambda = \frac{b}{T},$$

$$\frac{R_{e1}}{R_{e2}} = \frac{T_2^4}{T_1^4} = \frac{\lambda_1^4}{\lambda_2^4}, \qquad \left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = CT^5,$$

$$\left(\frac{r_{\lambda_2,T_2}}{r_{\lambda_1,T_1}}\right)_{\max} = \frac{T_2^5}{T_1^5} = \frac{\lambda_1^5}{\lambda_2^5}.$$

Ответ 1) $\dfrac{R_{e1}}{R_{e2}} = 81$; 2) $\left(\dfrac{r_{\lambda_2,T_2}}{r_{\lambda_1,T_1}}\right)_{\max} = 243$.

● ●

Основные физические постоянные

Постоянная Стефана—Больцмана	$\sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}$ Вт/(м² · К⁴)
Постоянная Вина	$b = 2{,}90 \cdot 10^{-3}$ м · К
Постоянная Планка	$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с
Постоянная в законе, связывающем максимальную спектральную плотность энергетической светимости черного тела с термодинамической температурой	$C = 1{,}3 \cdot 10^{-5}$ Вт/(м³ · К⁵)

5.181 Определите, какая длина волны соответствует максимальной спектральной плотности энергетической светимости $\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max}$, равной $1{,}3 \cdot 10^{11}$ Вт/м³.

Дано

$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = 1{,}3 \cdot 10^{11}$ Вт/м³

$C = 1{,}3 \cdot 10^{5}$ Вт/(м³ · К⁵)

$\lambda_{\max}$ — ?

Решение

$$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = CT^5, \qquad \lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \qquad T = \frac{b}{\lambda_{\max}},$$

$$\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} = C\left(\frac{b}{\lambda_{\max}}\right)^5, \qquad \left(r_{\lambda,T}\right)_{\max} \cdot \lambda_{\max}^5 = Cb^5,$$

$$\lambda_{\max} = b \cdot \sqrt[5]{\frac{C}{\left(r_{\lambda,T}\right)_{\max}}}.$$

Ответ $\lambda_{\max} = 183$ мкм.

5.182 Считая никель черным телом, определите мощность, необходимую для поддержания температуры расплавленного никеля 1453 °C неизменной, если площадь его поверхности равна 0,5 см². Потерями энергии пренебречь.

Дано

$t = 1453$ °C; $T = 1726$ К

$S = 0{,}5$ см² $= 5 \cdot 10^{-5}$ м²

P — ?

Решение

$$P = R_e S = \sigma T^4 S.$$

Ответ $P = 25{,}2$ Вт.

5.183 Металлическая поверхность площадью $S = 15$ см², нагретая до температуры $T = 3$ кК, излучает в одну минуту 100 кДж. Определите: 1) энергию, излучаемую этой поверхностью, считая ее черной; 2) отношение энергетических светимостей этой поверхности и черного тела при данной температуре.

Ответ 1) $W = 413$ кДж; 2) $\dfrac{R}{R_e} = 0{,}242$.

5.184 Принимая Солнце за черное тело и учитывая, что его максимальной спектральной плотности энергетической светимости соответствует длина волны 500 нм, определите: 1) температуру поверхности Солнца; 2) энергию, излучаемую Солнцем в виде электромагнитных волн за 10 мин; 3) массу, теряемую Солнцем за это время за счет излучения.

Дано

$\lambda_{\max} = 500$ нм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

$t = 10$ мин $= 600$ с

$R_C = 6{,}95 \cdot 10^8$ м

$m_C = 1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг

1) T — ?

2) W — ?

3) m — ?

Решение

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \qquad T = \frac{b}{\lambda_{\max}}.$$

$$W = R_e S t = \sigma T^4 \cdot 4\pi R_C^2 t, \qquad m = \frac{W}{c^2}.$$

Ответ

1) $T = 5{,}8$ кК;

2) $W = 2{,}34 \cdot 10^{29}$ Дж;

3) $m = 2{,}6 \cdot 10^{12}$ кг.

5.185 Определите температуру тела, при которой оно при температуре окружающей среды $t_0 = 27$ °C излучало энергии в 10 раз больше, чем поглощало.

Дано

$t_0 = 27$ °C; $T_0 = 300$ К

$\dfrac{W_{\text{изл}}}{W_{\text{погл}}} = 10$

T — ?

Решение

$$\frac{W_{\text{изл}}}{W_{\text{погл}}} = \frac{A_T \sigma T^4 S t}{A_T \sigma T_0^4 S t} = \frac{T^4}{T_0^4}, \qquad T = T_0 \cdot \sqrt[4]{\frac{W_{\text{изл}}}{W_{\text{погл}}}}.$$

Ответ

$T = 533$ К.

Некоторые астрономические величины

Радиус Земли $6{,}37 \cdot 10^6$ м

Масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{24}$ кг

Радиус Солнца $6{,}95 \cdot 10^8$ м

Масса Солнца $1{,}98 \cdot 10^{30}$ кг

5.186 Считая, что тепловые потери обусловлены только излучением, определите, какую мощность необходимо подводить к медному шарику диаметром $d = 2$ см, чтобы при температуре окружающей среды $t_0 = -13$ °C поддерживать его температуру равной $t = 17$ °C. Примите поглощательную способность меди $A_T = 0{,}6$.

Дано	*Решение*
$d = 2$ см $= 2 \cdot 10^{-2}$ м $t_0 = -13$ °C; $T_0 = 260$ К $t = 17$ °C; $T = 290$ К $A_T = 0{,}6$ P — ?	$P_{\text{изл}} = A_T \sigma T^4 S$, $\quad P_{\text{погл}} = A_T \sigma T_0^4 S$, $S = 4 \cdot \dfrac{\pi d^2}{4} = \pi d^2$, $P = P_{\text{изл}} - P_{\text{погл}} = A_T \sigma \pi d^2 (T^4 - T_0^4)$.

Ответ $P = 0{,}107$ Вт.

5.187 Определите силу тока, протекающего по вольфрамовой проволоке диаметром $d = 0{,}8$ мм, температура которой в вакууме поддерживается постоянной и равной $t = 2800$ °C. Поверхность проволоки считать серой с поглощательной способностью $A_T = 0{,}343$. Удельное сопротивление проволоки при данной температуре $\rho = 0{,}92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см. Температура окружающей проволоку среды $t_0 = 17$ °C.

Дано	*Решение*
$d = 0{,}8$ мм $= 8 \cdot 10^{-4}$ м $t = 2800$ °C; $T = 3073$ К $A_T = 0{,}343$ $\rho = 0{,}92 \cdot 10^{-4}$ Ом · см $=$ $= 9{,}2 \cdot 10^{-7}$ Ом · м $t_0 = 17$ °C; $T_0 = 290$ К I — ?	$P = I^2 R$, $\quad P = A_T \sigma (T^4 - T_0^4) S$ (см. задачу 5.186), $S = \pi d l$, $\quad R = \rho \dfrac{l}{S_{\text{се}}}$, $\quad S_{\text{сеч}} = \dfrac{\pi d^2}{4}$, $I = \sqrt{\dfrac{P}{R}} = \sqrt{\dfrac{A_T \sigma (T^4 - T_0^4) \pi^2 d^3}{4\rho}}$.

Ответ $I = 48{,}8$ А.

5.188 Преобразуйте формулу Планка для спектральной плотности энергетической светимости черного тела от переменной ν к переменной λ.

5.189 Пользуясь формулой Планка $r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)}-1}$, докажите, что в области малых частот ($h\nu \ll kT$) она совпадает с формулой Рэлея—Джинса.

5.190 Пользуясь формулой Планка $r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)}-1}$, выведите из нее закон Стефана — Больцмана.

5.191 Пользуясь формулой Планка $r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu^2}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)}-1}$, выведите из нее закон смещения Вина.

5.192 Используя формулу Планка, определите спектральную плотность потока излучения единицы поверхности черного тела, приходящегося на узкий интервал длин волн $\Delta\lambda = 5$ нм около максимума спектральной плотности энергетической светимости, если температура черного тела $T = 2500$ К.

Дано	*Решение*
$T = 2500$ К $\Delta\lambda = 5$ нм $= 5 \cdot 10^{-9}$ м	$r_{\lambda,T} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(k\lambda T)}-1}$, $\lambda = \frac{b}{T}$,
$(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda)$ — ?	$(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = \frac{2\pi hc^2 T^5}{b^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/(kb)}-1} \cdot \Delta\lambda$.

Ответ $(r_{\lambda,T} \cdot \Delta\lambda) = 6{,}26$ кВт/м².

5.193 Объясните: 1) происхождение радиационной, цветовой и яркостной температур; 2) может ли радиационная температура быть больше истинной.

5.194 Для вольфрамовой нити при температуре $T = 3500$ К поглощательная способность $A_T = 0{,}35$. Определите радиационную температуру нити.

Дано	*Решение*
$T = 3500$ К $A_T = 0{,}35$	$R_T = A_T \sigma T^4$, $\quad R_T = \sigma T_\text{р}^4$, $A_T \sigma T^4 = \sigma T_\text{р}^4$, $\quad T_\text{р}^4 = A_T T^4$,
$T_\text{р}$ — ?	$T_\text{р} = \sqrt[4]{A_T} \cdot T$.

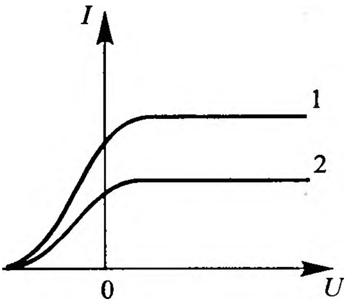
Ответ $T_\text{р} = 2{,}69$ кК.

5.195 Отношение энергетической светимости R_T^c серого тела к энергетической светимости R_e черного тела равно A_T. Выведите связь между истинной и радиационной температурами.

5.196 Определите максимальную скорость фотоэлектронов, вырываемых с поверхности металла, если фототок прекращается при приложении задерживающего напряжения $U_0 = 3{,}7$ В.

Дано	*Решение*
$U_0 = 3{,}7$ В $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	$\dfrac{m v_\text{max}^2}{2} = eU_0$, $\quad v_\text{max} = \sqrt{\dfrac{2eU_0}{m}}$.
v_max — ?	***Ответ*** $v_\text{max} = 1{,}14$ Мм/с.

5.197 Освещая поочередно фотокатод двумя разными монохроматическими источниками, находящимися на одинаковых расстояниях от катода, получили две зависимости (*1* и *2*) фототока от напряжения между катодом и анодом. Объясните, в чем отличие этих источников.

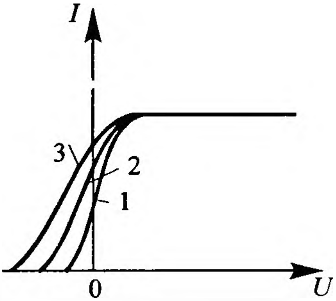


5.198 Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определите минимальное значение энергии фотона, вызывающего фотоэффект.

Дано	*Решение*
$\lambda_0 = 500$ нм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м	$\varepsilon_{\min} = h\nu_0$, $\quad \nu_0 = \dfrac{c}{\lambda_0}$,
$\varepsilon_{\min}$ — ?	$\varepsilon_{\min} = \dfrac{hc}{\lambda_0}$.

Ответ $\varepsilon_{\min} = 2{,}49$ эВ.

5.199 На рисунке схематически представлены вольт-амперные характеристики (кривые *1*, *2* и *3*) фотоэффекта для одного и того же металла. Объясните причину отличия этих кривых.



5.200 Фотоэлектроны, вырываемые с поверхности металла, полностью задерживаются при приложении обратного напряжения $U_0 = 3$ В. Фотоэффект для этого металла начинается при частоте падающего монохроматического света $\nu_0 = 6 \cdot 10^{14}$ с$^{-1}$. Определите: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) частоту применяемого излучения.

Ответ 1) $A = 2{,}48$ эВ; 2) $\nu = 1{,}32 \cdot 10^{15}$ с$^{-1}$.

5.201 Определите работу выхода A электронов из вольфрама, если “красная граница” фотоэффекта для него $\lambda_0 = 275$ нм.

Дано	Решение
$\lambda_0 = 275$ нм $= 2{,}75 \cdot 10^{-7}$ м A — ?	$A = h\nu_0$, $\nu_0 = \dfrac{c}{\lambda}$, $A = \dfrac{hc}{\lambda_0}$.

Ответ $A = 4{,}52$ эВ.

5.202 Калий освещается монохроматическим светом с длиной волны 400 нм. Определите наименьшее задерживающее напряжение, при котором фототок прекратится. Работа выхода электронов из калия равна 2,2 эВ.

Дано	Решение
$\lambda = 400$ нм $= 4 \cdot 10^{-7}$ м $A = 2{,}2$ эВ $= 3{,}52 \cdot 10^{-19}$ Дж $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Дж · с U_0 — ?	$h\nu = A + \dfrac{mv_{\max}^2}{2}$, $\dfrac{mv_{\max}^2}{2} = eU_0$, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, $\dfrac{hc}{\lambda} = A + eU_0$, $U_0 = \dfrac{\dfrac{hc}{\lambda} - A}{e}$.

Ответ $U_0 = 0{,}91$ В.

5.203 Красная граница фотоэффекта для некоторого металла равна 500 нм. Определите: 1) работу выхода электронов из этого металла; 2) максимальную скорость электронов, вырываемых из этого металла светом с длиной волны 400 нм.

Дано	*Решение*
$\lambda_0 = 500$ нм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м $\lambda = 400$ нм $= 4 \cdot 10^{-7}$ м 1) A — ? 2) $v_{\max}$ — ?	$A = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}$, $\quad h\nu = A + \frac{mv^2_{\max}}{2}$, $\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\nu_0} + \frac{mv^2_{\max}}{2}$, $\quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right)}$.

Ответ 1) $A = 2{,}49$ эВ; 2) $v_{\max} = 468$ км/с.

5.204 Выбиваемые светом при фотоэффекте электроны при облучении фотокатода видимым светом полностью задерживаются обратным напряжением $U_0 = 1{,}2$ В. Специальные измерения показали, что длина волны падающего света $\lambda = 400$ нм. Определите красную границу фотоэффекта.

Ответ $\lambda_0 = 652$ нм.

5.205 Задерживающее напряжение для платиновой пластинки (работа выхода 6,3 эВ) составляет 3,7 В. При тех же условиях для другой пластинки задерживающее напряжение равно 5,3 В. Определите работу выхода электронов из этой пластинки.

Дано	*Решение*
$A_1 = 6{,}3$ эВ $U_1 = 3{,}7$ В $U_2 = 5{,}3$ В A_2 — ?	$h\nu = A_1 + eU_1$, $\quad h\nu = A_2 + eU_2$, $A_1 + eU_1 = A_2 + eU_2$, $\quad A_2 = A_1 + eU_1 - eU_2$. **Ответ** $A_2 = 4{,}7$ эВ.

5.206 Определите, до какого потенциала зарядится уединенный серебряный шарик при облучении его ультрафиолетовым светом длиной волны $\lambda = 208$ нм. Работа выхода электронов из серебра $A = 4{,}7$ эВ.

Дано

$A = 4{,}7$ эВ $= 7{,}52 \cdot 10^{-19}$ Дж

$\lambda = 208$ нм $= 2{,}08 \cdot 10^{-7}$ м

φ — ?

Решение

$$h\nu = A + e\varphi, \qquad \nu = \frac{c}{\lambda}, \qquad \frac{hc}{\lambda} = A + e\varphi,$$

$$\varphi = \frac{hc}{\lambda e} - \frac{A}{e}.$$

Ответ $\varphi = 1{,}28$ В.

5.207 При освещении вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_1 = 0{,}4$ мкм он заряжается до разности потенциалов $\varphi_1 = 2$ В. Определите, до какой разности потенциалов зарядится фотоэлемент при освещении его монохроматическим светом с длиной волны $\lambda_2 = 0{,}3$ мкм.

Ответ $\varphi_2 = 3{,}04$ В.

5.208 Плоский серебряный электрод освещается монохроматическим излучением с длиной волны $\lambda = 83$ нм. Определите, на какое максимальное расстояние от поверхности электрода может удалиться фотоэлектрон, если вне электрода имеется задерживающее электрическое поле напряженностью $E = 10$ В/см. Красная граница фотоэффекта для серебра $\lambda_0 = 264$ нм.

Дано

$\lambda = 83$ нм $= 8{,}3 \cdot 10^{-8}$ м

$\lambda_0 = 264$ нм $= 2{,}64 \cdot 10^{-7}$ м

$E = 10$ В/см $= 10^3$ В/м

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

s — ?

Решение

$$\frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda_0} + eEs, \qquad s = \frac{hc}{eE}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_0}\right).$$

Ответ $s = 1{,}03$ см.

5.209 Фотоны с энергией $\varepsilon = 5$ эВ вырывают фотоэлектроны из металла с работой выхода $A = 4{,}7$ эВ. Определите максимальный импульс, передаваемый поверхности этого металла при вылете электрона.

Дано

$\varepsilon = 5$ эВ $= 8 \cdot 10^{19}$ Дж

$A = 4{,}7$ эВ $=$

$= 7{,}52 \cdot 10^{19}$ Дж

$p_{\max}$ — ?

Решение

$$p_{\max} = mv_{\max}, \qquad \varepsilon = A + \frac{mv_{\max}^2}{2},$$

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{m}(\varepsilon - A)}, \qquad p_{\max} = \sqrt{2m(\varepsilon - A)}.$$

Ответ $p_{\max} = 2{,}96 \cdot 10^{-25}$ кг · м/с.

5.210 При освещении катода вакуумного фотоэлемента монохроматическим светом с длиной волны $\lambda = 310$ нм фототок прекращается при некотором задерживающем напряжении. При увеличении длины волны на 25% задерживающее напряжение оказывается меньше на 0,8 В. Определите по этим экспериментальным данным постоянную Планка.

Дано

$\lambda_1 = 310$ нм $= 3{,}1 \cdot 10^{-7}$ м

$\lambda_2 = 1{,}25\lambda_1$

$U_2 = U_1 - \Delta U$

$\Delta U = 0{,}8$ В

h — ?

Решение

$$\frac{hc}{\lambda_1} = A + eU_1, \qquad \frac{hc}{\lambda_2} = A + eU_2,$$

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2}\right) = e(U_1 - U_2),$$

$$hc\left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{1{,}25\lambda_1}\right) = e\,\Delta U,$$

$$h = \frac{5e\lambda_1\,\Delta U}{c}.$$

Ответ $h = 6{,}61 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

5.211 Определите максимальную скорость $v_{\max}$ фотоэлектронов, вырываемых с поверхности цинка (работа выхода $A = 4$ эВ), при облучении γ-излучением с длиной волны $\lambda = 2{,}47$ пм.

Дано	Решение
$A = 4$ эВ $=$ $= 4 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж $\lambda = 2{,}47$ пм $=$ $= 2{,}47 \cdot 10^{-12}$ м	$\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda} = \left(\dfrac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{2{,}47 \cdot 10^{-12}} \Big/ 1{,}6 \cdot 10^{-19} \right)$ эВ $=$ $= 0{,}503 \cdot 10^{6}$ эВ $= 0{,}503$ МэВ. $\varepsilon \gg A = 4$ эВ.
$v_{\max}$ — ?	

$$\varepsilon = E_{\text{полн}} - E_0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} - mc^2 = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} - 1 \right),$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2}} - 1 \right) = \frac{\varepsilon}{mc^2} + 1 = \frac{\varepsilon + mc^2}{mc^2}, \qquad \sqrt{1 - v_{\max}^2/c^2} = \frac{mc^2}{\varepsilon + mc^2},$$

$$v_{\max}^2/c^2 = 1 - \frac{m^2c^4}{(\varepsilon + mc^2)^2}, \qquad v_{\max} = c \cdot \sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{(\varepsilon + mc^2)^2}}.$$

Ответ $v_{\max} = 259$ Мм/с.

5.212 Определите для фотона с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм: 1) его энергию; 2) импульс; 3) массу.

Ответ

1) $\varepsilon = 2{,}48$ эВ;

2) $p = 1{,}33 \cdot 10^{-27}$ кг · м/с;

3) $m = 4{,}43 \cdot 10^{-36}$ кг.

5.213 Определите энергию фотона, при которой его эквивалентная масса равна массе покоя электрона. Ответ выразите в электрон-вольтах.

Дано	*Решение*
$\varepsilon = m_e c^2$ ε (эВ) — ?	$\varepsilon = m_e c^2$, $\quad \varepsilon\ (\text{эВ}) = \dfrac{\varepsilon\ (\text{Дж})}{1{,}6 \cdot 10^{-19}}$.

Ответ $\varepsilon = 512$ кэВ.

5.214 Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, длина волны которого $\lambda = 0{,}5$ мкм.

Дано	*Решение*
$p_e = p$ $\lambda = 0{,}5$ мкм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м v_e — ?	$v_e = \dfrac{p_e}{m_e}$, $\quad p_e = p = \dfrac{h}{\lambda}$, $v_e = \dfrac{h}{\lambda m_e}$.

Ответ $v_e = 1{,}46$ км/с.

5.215 Определите длину волны фотона, импульс которого равен импульсу электрона, прошедшего разность потенциалов $U = 9{,}8$ В.

Дано	*Решение*
$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $U = 9{,}8$ В $p_e = p$ λ — ?	$eU = \dfrac{m_e v^2}{2}$, $\quad v = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_e}}$, $\quad p_e = m_e v = \sqrt{2 m_e e U}$, $p = \dfrac{h}{\lambda}$, $\quad p = p_e$, $\quad \lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2 m_e e U}}$.

Ответ $\lambda = 392$ пм.

5.216 Определите температуру, при которой средняя энергия молекул трехатомного газа равна энергии фотонов, соответствующих излучению $\lambda = 600$ нм.

Ответ $T = 8$ кК.

5.217 Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его кинетическая энергия была равна энергии фотона, длина волны которого $\lambda = 0{,}5$ мкм.

Ответ $\upsilon = 935$ км/с.

5.218 Определите, с какой скоростью должен двигаться электрон, чтобы его импульс был равен импульсу фотона, длина волны которого $\lambda = 2$ пм.

Дано	*Решение*
$p_e = p$ $\lambda = 2$ пм $= 2 \cdot 10^{-12}$ м υ — ?	$\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$, $\qquad E_0 = mc^2$.

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} \cdot 3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с}}{2 \cdot 10^{-12}\ \text{м}} = 9{,}9 \cdot 10^{-14}\ \text{Дж} = 0{,}62\ \text{МэВ};$$

$$E_0 = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{кг} \cdot (3 \cdot 10^{8}\ \text{м/с})^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-14}\ \text{Дж} = 0{,}51\ \text{МэВ};$$

$$\varepsilon \approx E_0, \qquad p = \frac{h}{\lambda}, \qquad p_e = \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}}, \qquad \frac{m\upsilon}{\sqrt{1 - \upsilon^2/c^2}} = \frac{h}{\lambda},$$

$$m^2\upsilon^2 = \frac{h^2}{\lambda^2}(1 - \upsilon^2/c^2), \qquad h^2c^2 = \upsilon^2(m^2\lambda^2c^2 + h^2), \qquad \upsilon = \frac{ch}{\sqrt{m^2\lambda^2c^2 + h^2}}.$$

Ответ $\upsilon = 0{,}77c$.

5.219 Докажите, что световое давление, оказываемое на поверхность тела потоком монохроматического излучения, падающего перпендикулярно поверхности, в случае идеального зеркала равно $2w$, а в случае полностью поглощающей поверхности равно w, где w — объемная плотность энергии излучения.

5.220 Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающим лучам, равно 0,12 мкПа. Определите число фотонов, падающих ежесекундно на 1 м^2 поверхности.

Дано	***Решение***
$\lambda = 500$ нм $= 5\cdot 10^{-7}$ м $\rho = 0$ $p = 0{,}12$ мкПа $=$ $= 1{,}2\cdot 10^{-7}$ Па $t = 1$ с $S = 1$ м^2	$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho)$, $\quad E_e = \frac{W}{St}$, $W = Nh\nu = Nh\frac{c}{\lambda}$, $\quad p = \frac{Nhc}{\lambda Stc}(1+\rho)$, $N = \frac{p\lambda St}{h(1+\rho)}$.
N — ?	

Ответ $N = 9{,}05\cdot 10^{19}$.

5.221 На идеально отражающую поверхность площадью $S = 5$ см^2 за время $t = 3$ мин нормально падает монохроматический свет, энергия которого $W = 9$ Дж. Определите: 1) облученность поверхности; 2) световое давление, оказываемое на поверхность.

Дано	***Решение***
$S = 5$ см$^2 = 5\cdot 10^{-4}$ м^2 $\rho = 1$ $t = 3$ мин $= 180$ с $W = 9$ Дж	$E_e = \frac{W}{St}$, $\quad p = \frac{E_e}{c}(1+\rho)\Big\vert_{\rho=1} = \frac{2E_e}{c}$.
1) E_e — ? 2) p — ?	

Ответ 1) $E_e = 100$ Вт/м^2;
2) $p = 667$ нПа.

5.222 Определите давление света на стенки электрической 150-ваттной лампочки, принимая, что вся потребляемая мощность идет на излучение и стенки лампочки отражают 15% падающего на них света. Считайте лампочку сферическим сосудом радиуса 4 см.

Дано

$P = 150$ Вт

$P = \Phi_e$

$\rho = 0{,}15$

$R = 4$ см $= 0{,}04$ м

p — ?

Решение

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho), \qquad E_e = \frac{W}{St} = \frac{\Phi_e}{S} = \frac{P}{S},$$

$$S = 4\pi R^2, \qquad p = \frac{P}{4\pi R^2 c}(1+\rho).$$

Ответ $p = 28{,}6$ мкПа.

5.223 Давление монохроматического света с длиной волны $\lambda = 500$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, равно 0,15 мкПа. Определите число фотонов, падающих на поверхность площадью 40 см^2 за одну секунду.

Дано

$\lambda = 500$ нм $= 5 \cdot 10^{-7}$ м

$p = 0{,}15$ мкПа $=$
$= 1{,}5 \cdot 10^{-7}$ Па

$\rho = 0$

$S = 40$ см^2 $= 4 \cdot 10^{-3}$ м^2

$t = 1$ с

N — ?

Решение

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho), \qquad E_e = \frac{W}{St},$$

$$p = \frac{W}{Stc}(1+\rho), \qquad \rho = 0,$$

$$W = pStc, \qquad W = \varepsilon N = \frac{hc}{\lambda}N,$$

$$N = \frac{W\lambda}{hc} = \frac{pSt\lambda}{h}.$$

Ответ $N = 4{,}52 \cdot 10^{17}$.

Давление p монохроматического света с длиной волны $\lambda = 600$ нм на зачерненную поверхность, расположенную перпендикулярно падающему излучению, составляет 0,1 мкПа. Определите: 1) концентрацию n фотонов в световом пучке; 2) число N фотонов, падающих ежесекундно на 1 м^2 поверхности.

Дано

$p = 0{,}1$ мкПа $= 10^{-7}$ Па

$\lambda = 600$ нм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$\rho = 0$

$t = 1$ с

$S = 1$ м^2

1) n — ?

2) N — ?

Решение

$$p = \frac{E_e}{c}(1+\rho) = w(1+\rho), \qquad n = \frac{w}{\varepsilon}, \qquad w = \frac{p}{1+\rho},$$

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}, \quad n = \frac{\lambda p}{hc(1+\rho)}, \quad W = E_e S t = \frac{hc}{\lambda} \cdot N,$$

$$E_e = \frac{pc}{(1+\rho)}, \qquad N = \frac{E_e S t \lambda}{hc} = \frac{pcSt\lambda}{(1+\rho)hc} = \frac{pSt\lambda}{h(1+\rho)},$$

$$N = ncSt.$$

Ответ 1) $n = 3{,}02 \cdot 10^{11}$ м$^{-3}$; 2) $N = 9{,}06 \cdot 10^{19}$.

5.225 На идеально отражающую плоскую поверхность нормально падает монохроматический свет с длиной волны $\lambda = 0{,}55$ мкм. Поток излучения Φ_e составляет 0,45 Вт. Определите: 1) число фотонов N, падающих на поверхность за время $t = 3$ с; 2) силу давления, испытываемую этой поверхностью.

Дано

$\lambda = 0{,}55$ мкм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м

$\rho = 1$

$\Phi_e = 0{,}45$ Вт

$t = 3$ с

1) N — ?

2) F — ?

Решение

$$W = \varepsilon N = \frac{hc}{\lambda} N, \qquad \Phi_e = \frac{W}{t} = \frac{hc}{\lambda t} N,$$

$$N = \frac{\Phi_e \lambda t}{hc}, \qquad F = pS = \frac{E_e S}{c}(1+\rho) = \frac{\Phi_e}{c}(1+\rho).$$

Ответ 1) $N = 3{,}73 \cdot 10^{18}$; 2) $F = 3$ нН.

5.226 Плоская световая волна интенсивностью $I = 0{,}1$ Вт/см^2 падает под углом $\alpha = 30°$ на плоскую отражающую поверхность с коэффициентом отражения $\rho = 0{,}7$. Используя квантовые представления, определите нормальное давление, оказываемое светом на эту поверхность.

Ответ $p_n = \dfrac{I(1+\rho)}{c}\cos^2\alpha = 4{,}25$ мкПа.

5.227 Рассматривая особенности механизма комптоновского рассеяния, объясните: 1)почему длина волны рассеянного излучения больше, чем длина волны падающего излучения; 2) наличие в составе рассеянного излучения “несмещенной” линии.

5.228 Определите длину волны рентгеновского излучения, если при комптоновском рассеянии этого излучения под углом $\vartheta = 60°$ длина волны рассеянного излучения оказалась равной 57 пм.

Ответ $\lambda = 55{,}8$ пм.

5.229 Фотон с энергией $\varepsilon = 1{,}025$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите угол рассеяния фотона, если длина волны рассеянного фотона оказалась равной комптоновской длине волны $\lambda_C = 2{,}43$ пм.

Дано	*Решение*
$\varepsilon = 1{,}025$ МэВ $=$ $= 1{,}64 \cdot 10^{13}$ Дж $\lambda' = \lambda_C$ $\lambda_C = 2{,}43$ пм $=$ $= 2{,}43 \cdot 10^{12}$ м ϑ — ?	$\varepsilon = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$, $\lambda = \dfrac{hc}{\varepsilon}$, $\lambda' = \lambda + \lambda_C(1-\cos\vartheta)$. $\lambda_C = \dfrac{hc}{\varepsilon} + \lambda_C(1-\cos\vartheta)$, $\cos\vartheta = \dfrac{hc}{\lambda_C\varepsilon}$, $\vartheta = \arccos\left(\dfrac{hc}{\lambda_C\varepsilon}\right)$.

Ответ $\vartheta = 60°$.

5.230 Узкий пучок монохроматического рентгеновского излучения падает на рассеивающее вещество. Оказывается, что длины волн рассеянного под углами $\vartheta_1 = 60°$ и $\vartheta_2 = 120°$ излучения отличаются в 1,5 раза. Определите длину волны падающего излучения, предполагая, что рассеяние происходит на свободных электронах.

Дано

$\vartheta_1 = 60°$

$\vartheta_2 = 120°$

$\dfrac{\lambda_2'}{\lambda_1'} = 1{,}5$

λ — ?

Решение

$$\lambda_1' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\vartheta_1), \qquad \lambda_2' = \lambda + \lambda_C(1 - \cos\vartheta_2),$$

$$\frac{\lambda_2'}{\lambda_1'} = \frac{\lambda + \lambda_C(1 - \cos\vartheta_2)}{\lambda + \lambda_C(1 - \cos\vartheta_1)} = 1{,}5,$$

$$\lambda + \lambda_C - \lambda_C\cos\vartheta_2 = 1.5\lambda + 1.5\lambda_C - 1{,}5\lambda_C\cos\vartheta_1,$$

$$\lambda = \lambda_C(3\cos\vartheta_1 - 2\cos\vartheta_2 - 1).$$

Ответ $\lambda = 3{,}64$ пм.

5.231 Фотон с длиной волны $\lambda = 5$ пм испытал комптоновское рассеяние под углом $\vartheta = 90°$ на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите: 1) изменение длины волны при рассеянии; 2) энергию электрона отдачи; 3) импульс электрона отдачи.

Дано

$\lambda = 5$ пм $= 5 \cdot 10^{-12}$ м

$\vartheta = 90°$

1) $\Delta\lambda$ — ?

2) W_e — ?

3) p_e — ?

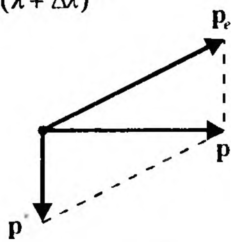
Решение

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C(1 - \cos\vartheta) = \lambda_C \quad (\cos\vartheta = 0),$$

$$W_e = \varepsilon - \varepsilon' = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} = hc\frac{\Delta\lambda}{\lambda(\lambda + \Delta\lambda)},$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{p_e} + \mathbf{p'},$$

$$(p_e)^2 = \left(\frac{h}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{h}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2,$$



$$p_e = h \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda + \Delta\lambda}\right)^2}.$$

Ответ 1) $\Delta\lambda = 2{,}43$ пм; 2) $W_e = 81{,}3$ кэВ; 3) $p_e = 1{,}6 \cdot 10^{-22}$ кг · м/с.

5.232 Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся на первоначально покоившемся свободном электроне. Определите кинетическую энергию электрона отдачи, если длина волны рассеянного фотона изменилась на 20%.

Дано	Решение
$\varepsilon = 0{,}25$ МэВ $=$ $= 4 \cdot 10^{-14}$ Дж $\lambda' = 1{,}2\lambda$ T_e — ?	$T_e = \varepsilon - \varepsilon'$, $\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$, $\lambda = \dfrac{hc}{\varepsilon}$, $\varepsilon' = \dfrac{hc}{\lambda'} = \dfrac{hc}{1{,}2\lambda} = \dfrac{\varepsilon}{1{,}2}$, $T_e = \varepsilon - \dfrac{\varepsilon}{1{,}2} = \dfrac{\varepsilon}{6}$.

Ответ $T_e = 41{,}7$ кэВ.

5.233 Фотон с энергией 0,3 МэВ рассеялся под углом $\vartheta = 180°$ на свободном электроне. Определите долю энергии фотона, приходящуюся на рассеянный фотон.

Ответ $\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon'} = 0{,}461$.

5.234 Фотон с энергией 100 кэВ в результате комптоновского эффекта рассеялся при соударении со свободным электроном на угол $\vartheta = \pi/2$. Определите энергию фотона после рассеяния.

Ответ $\varepsilon' = 83{,}7$ кэВ.

5.235 Фотон с энергией $\varepsilon = 0{,}25$ МэВ рассеялся под углом $\vartheta = 120°$ на первоначально покоившемся электроне. Определите кинетическую энергию электрона отдачи.

Ответ $T_e = 106$ кэВ.

6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

6.1. Теория атома водорода по Бору

6.1 Определите энергию фотона, испускаемого при переходе электрона в атоме водорода с третьего энергетического уровня на второй.

Дано

$Z = 1$
$m = 2$
$n = 3$
$R = 3{,}29 \cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$

$E_{3,2}$ — ?

Решение

$$E_{3,2} = h\nu_{3,2}, \qquad \nu_{3,2} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$E_{3,2} = hR\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad E_{3,2} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right).$$

Ответ $E_{3,2} = 1{,}89$ эВ.

6.2 Определите максимальную и минимальную энергии фотона в видимой серии спектра водорода (серии Бальмера).

Дано

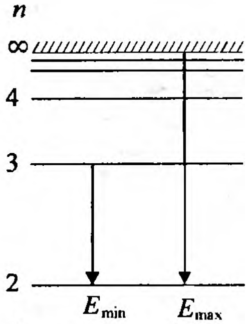
$Z = 1$
$m = 2$

$E_{\max}$ — ?
$E_{\min}$ — ?

Решение

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$n = 3, 4, 5, \ldots,$



$$E_{\min} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}hR, \qquad E_{\max} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = \frac{1}{4}hR.$$

Ответ $E_{\max} = 3{,}41$ эВ, $E_{\min} = 1{,}89$ эВ.

6.3 Определите длину волны λ, соответствующую второй спектральной линии в серии Пашена.

Ответ $\lambda = 1{,}28$ мкм.

6.4 Максимальная длина волны спектральной водородной линии серии Лаймана равна 0,12 мкм. Предполагая, что постоянная Ридберга неизвестна, определите максимальную длину волны линии серии Бальмера.

Дано

$Z = 1$

$\lambda_Л = 0{,}12\ мкм = 1{,}2 \cdot 10^{-7}\ м$

$m_Л = 1$

$m_Б = 2$

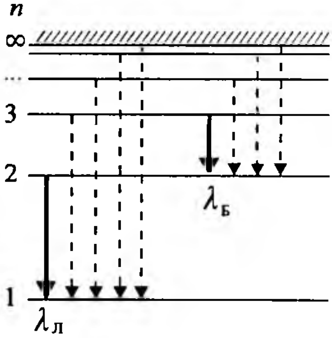
$\lambda_Б$ — ?

Решение

$$\frac{1}{\lambda} = R'\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda_Л} = R'\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right),$$

$$\frac{1}{\lambda_Б} = R'\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right),$$



$$\lambda_Б = \lambda_Л \frac{\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right)}{\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)}.$$

Ответ $\lambda_Б = 0{,}648$ мкм.

6.5 Определите длину волны спектральной линии, соответствующей переходу электрона в атоме водорода с шестой боровской орбиты на вторую. К какой серии относится эта линия и какая она по счету?

Дано

$m = 2$

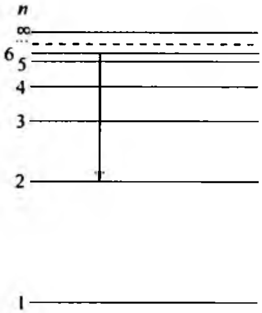
$n = 6$

λ — ?

Решение

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$\nu = R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{6^2}\right), \quad \lambda = \frac{c}{\nu}.$$



Ответ $\lambda = 0{,}41$ мкм, четвертая линия серии Бальмера.

6.6 Определите длины волн, соответствующие: 1) границе серии Лаймана; 2) границе серии Бальмера; 3) границе серии Пашена. Проанализируйте результаты.

Дано	*Решение*
1) серия Лаймана 2) серия Бальмера 3) серия Пашена	$\boxed{m=1,\ n=2,3,...,\infty}$ $\quad \dfrac{1}{\lambda}=R'\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{n^2}\right),$
1) λ_1 — ? 2) λ_2 — ? 3) λ_3 — ?	$R'=1{,}1\cdot10^7$ м$^{-1}$, $\quad \dfrac{1}{\lambda_1}=R'\cdot1,\quad n=\infty,$ $\lambda_1=\dfrac{1}{R'}=\dfrac{1}{1{,}1\cdot10^7\ \text{м}^{-1}}=91$ нм.

$$\boxed{m=2,\ \ n=3,4,...,\infty}\quad \frac{1}{\lambda}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{n^2}\right),\quad \frac{1}{\lambda_2}=R'\cdot\frac{1}{4},$$

$$n=\infty,\qquad \lambda_2=\frac{4}{R'}=364\ \text{нм}.$$

$$\boxed{m=3,\ \ n=4,5,...,\infty}\quad \frac{1}{\lambda}=R'\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right),\quad \frac{1}{\lambda_3}=R'\cdot\frac{1}{9},$$

$$n=\infty,\qquad \lambda_2=\frac{9}{R'}=820\ \text{нм}.$$

Ответ

1) $\lambda_1=91$ нм, область ультрафиолета;

2) $\lambda_2=364$ нм, вблизи видимого фиолетового излучения;

3) $\lambda_3=820$ нм, область инфракрасного излучения.

Обобщенная формула Бальмера

$$\nu=R\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right),$$

где ν — частота спектральных линий в спектре атома водорода; R — постоянная Ридберга; m определяет серию (m = 1, 2, 3, ...); n определяет отдельные линии соответствующей серии ($n = m + 1, m + 2, ...$): m = 1 (серия Лаймана), m = 2 (серия Бальмера), m = 3 (серия Пашена), m = 4 (серия Брэкета), m = 5 (серия Пфунда), m = 6 (серия Хэмфри).

6.7 Атом водорода находится в возбужденном состоянии, характеризуемом главным квантовым числом $n=4$. Определите возможные спектральные линии в спектре водорода, появляющиеся при переходе атома из возбужденного состояния в основное.

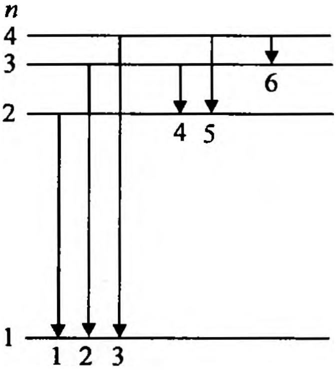
Дано	*Решение*
$Z=1$ $n=4$ $R'=1{,}1\cdot10^{7}$ м$^{-1}$ λ — ?	$\frac{1}{\lambda_1}=R'\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right)$, $\lambda_1=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{R'}$, $\frac{1}{\lambda_2}=R'\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{3^2}\right)$, $\lambda_2=\frac{9}{8}\cdot\frac{1}{R'}$,

$$\frac{1}{\lambda_3}=R'\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{4^2}\right),\qquad \lambda_3=\frac{16}{15}\cdot\frac{1}{R'},$$

$$\frac{1}{\lambda_4}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}\right),\qquad \lambda_4=\frac{36}{5}\cdot\frac{1}{R'},$$

$$\frac{1}{\lambda_5}=R'\left(\frac{1}{2^2}-\frac{1}{4^2}\right),\qquad \lambda_5=\frac{16}{3}\cdot\frac{1}{R'},$$

$$\frac{1}{\lambda_6}=R'\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right),\qquad \lambda_6=\frac{144}{7}\cdot\frac{1}{R'}.$$



Ответ $\lambda_1=1{,}21\cdot10^{-7}$ м; $\lambda_2=1{,}02\cdot10^{-7}$ м; $\lambda_3=0{,}97\cdot10^{-7}$ м; $\lambda_4=6{,}54\cdot10^{-7}$ м; $\lambda_5=4{,}85\cdot10^{-7}$ м; $\lambda_6=18{,}7\cdot10^{-7}$ м.

Основные физические постоянные

Постоянная Ридберга	$R=3{,}29\cdot10^{15}$ с$^{-1}$ $R'=1{,}10\cdot10^{7}$ м$^{-1}$
Постоянная Планка	$h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с $\hbar=1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж · с

6.8 В инфракрасной области спектра излучения водорода обнаружено четыре серии — Пашена, Брэкета, Пфунда и Хэмфри. Запишите спектральные формулы для них и определите самую длинноволновую линию: 1) в серии Пашена; 2) в серии Хэмфри.

Дано

$Z=1$

$m=3,\ 4,\ 5,\ 6$

$R'=1{,}1\cdot10^{7}\ \text{м}^{-1}$

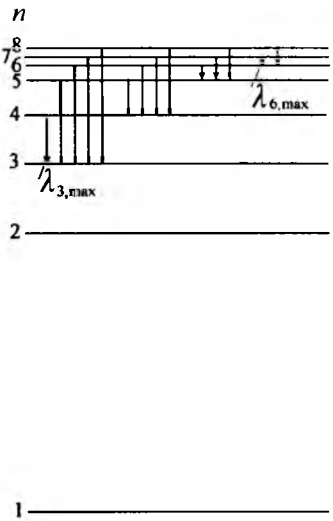
---

1) $\lambda_{3,\max}$ — ?

2) $\lambda_{6,\max}$ — ?

Решение

$$\frac{1}{\lambda}=R'\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$



Серия Пашена

$$\frac{1}{\lambda_3}=R'\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Серия Брэкета $$\frac{1}{\lambda_4}=R'\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Серия Пфунда $$\frac{1}{\lambda_5}=R'\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

Серия Хэмфри $$\frac{1}{\lambda_6}=R'\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{n^2}\right).$$

$$\lambda_{3,\max}=\frac{1}{R'\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)},\qquad \lambda_{6,\max}=\frac{1}{R'\left(\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}\right)}.$$

Ответ 1) $\lambda_{3,\max}=1{,}87$ мкм; 2) $\lambda_{6,\max}=12{,}3$ мкм.

6.9 Определите число спектральных линий, испускаемых атомарным водородом, возбужденным на n-й энергетический уровень.

Ответ $N=n(n-1)/2$.

6.10

На дифракционную решетку с периодом d нормально падает пучок света от разрядной трубки, наполненной атомарным водородом. Оказалось, что в спектре дифракционный максимум k-го порядка, наблюдаемый под углом φ, соответствовал одной из линий серии Лаймана. Определите главное квантовое число, соответствующее энергетическому уровню, с которого произошел переход.

Дано	*Решение*
$Z=1$ d k φ $m=1$	$\nu = R\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{n^2}\right)$, $\quad \nu=\frac{c}{\lambda}$,
n — ?	$d\sin\varphi = k\lambda$, $\quad d\sin\varphi = \frac{kc}{R\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}$,

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{ck}{Rd\sin\varphi}, \qquad n=\left(1-\frac{ck}{Rd\sin\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Ответ

$$n=\left(1-\frac{ck}{Rd\sin\varphi}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

6.11

Используя теорию Бора для атома водорода, определите: 1) радиус ближайшей к ядру орбиты (первый боровский радиус); 2) скорость движения электрона по этой орбите.

Дано	*Решение*
$Z=1$ $n=1$	$\frac{mv^2}{r}=\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\quad mvr=n\hbar$,
1) r_1 — ? 2) v_1 — ?	$Z=1$, $\quad n=1$, $\quad \hbar=h/2\pi$.

$$\left.\begin{aligned} \frac{mv_1^2}{r_1}&=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \\ mv_1r_1&=\hbar \end{aligned}\right| \quad \begin{aligned} &1)\ r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}, \\ &2)\ v_1=\frac{\hbar}{mr_1}. \end{aligned}$$

Ответ

1) $r_1 = 52{,}8$ пм;

2) $v_1 = 2{,}19$ Мм/с.

6.12 Определите, на сколько изменилась энергия электрона в атоме водорода при излучении атомом фотона с длиной волны $\lambda = 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м.

Дано	Решение
$Z = 1$ $\lambda = 4{,}86 \cdot 10^{-7}$ м ΔE — ?	$\Delta E = E_n - E_m = h\nu$, $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$, $\Delta E = \dfrac{hc}{\lambda}$.

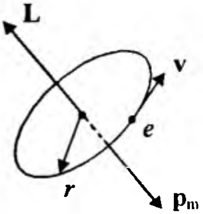
Ответ $\Delta E = 2{,}56$ эВ.

6.13 Определите длину волны λ спектральной линии, излучаемой при переходе электрона с более высокого уровня энергии на более низкий уровень, если при этом энергия атома уменьшилась на $\Delta E = 10$ эВ.

Ответ $\lambda = 124$ нм.

6.14 Используя теорию Бора, определите орбитальный магнитный момент электрона, движущегося по третьей орбите атома водорода.

Дано	Решение
$Z = 1$ $n = 3$ $\hbar = 1{,}05 \cdot 10^{-34}$ Дж · с p_m — ?	$p_m = IS$, $I = \dfrac{e}{T}$, $T = \dfrac{2\pi r}{v}$, $S = \pi r^2$,



$$p_m = \frac{evr}{2}, \quad mvr = n\hbar, \quad vr = \frac{n\hbar}{m}, \quad p_m = \frac{en\hbar}{2m}.$$

Ответ $p_m = 2{,}8 \cdot 10^{-23}$ А · м².

6.15 Определите изменение орбитального механического момента электрона при переходе его из возбужденного состояния в основное с испусканием фотона с длиной волны $\lambda = 1{,}02 \cdot 10^{-7}$ м.

Дано	***Решение***
$\lambda = 1{,}02 \cdot 10^{-7}$ м $m = 1$ $R' = 1{,}1 \cdot 10^{7}$ м$^{-1}$	$m_e v r = n\hbar$, $\quad L = n\hbar$, $\quad \Delta L = n\hbar - m\hbar = (n-m)\hbar$, $\dfrac{1}{\lambda} = R'\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $\quad \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{\lambda R'}$,
ΔL — ?	$n = \sqrt{\dfrac{m^2 \lambda R'}{\lambda R' - m^2}}$, $\quad \Delta L = \left(\sqrt{\dfrac{m^2 \lambda R'}{\lambda R' - m^2}} - m\right)\hbar$.

$$\Delta L = \left(\sqrt{\frac{1^2 \cdot 1{,}02 \cdot 10^{-7}\ \text{м} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{7}\ \text{м}^{-1}}{1{,}02 \cdot 10^{-7}\ \text{м} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{7}\ \text{м}^{-1} - 1^2}} - 1\right) \cdot \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с}}{2\pi} = 2{,}1 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с} = 2\hbar.$$

Ответ $\Delta L = 2\hbar = 2{,}1 \cdot 10^{-34}$ Дж · с.

6.16 Позитроний — атомоподобная система, состоящая из позитрона и электрона, вращающегося относительно общего центра масс. Применяя теорию Бора, определите минимальные размеры подобной системы.

Дано	***Решение***
e^- e^+	$(mvr)_+ + (mvr)_- = n\hbar$, $\left.\begin{aligned} &2mvr = n\hbar \\ &\dfrac{mv^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 (2r)^2} \end{aligned}\right\}$
$d_{\min}$ — ?	

$4m^2v^2r^2 = n^2\hbar^2$, $\quad 4\pi\varepsilon_0 m v^2 \cdot 4r = e^2$, $\quad n = 1$,

$r = \dfrac{h^2 \varepsilon_0}{\pi e^2 m}$, $\quad d_{\min} = 2r = \dfrac{2\varepsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$.

Ответ $d_{\min} = 106$ пм.

6.17 Предполагая, что в опыте Франка и Герца вакуумная трубка наполнена не парами ртути, а разреженным атомарным водородом, определите, через какие интервалы ускоряющего потенциала φ возникнут максимумы на графике зависимости силы анодного тока от ускоряющего потенциала.

Ответ $\varphi = 10{,}2$ В.

6.18 Используя постоянную Планка $\hbar$, электрическую постоянную ε_0, массу m и заряд e электрона, составьте формулу для величины, характеризующей атом водорода по Бору и имеющей размерность длины. Укажите, что это за величина.

6.19 Докажите, что энергетические уровни атома водорода могут быть описаны выражением $E_n = -\dfrac{2\pi\hbar}{n^2}R$, где R — постоянная Ридберга.

Дано	*Решение*
$Z = 1$	$m_e v r = n\hbar$, $\quad \dfrac{m_e v^2}{r} = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,
$E_n = -\dfrac{2\pi\hbar}{n^2}R$	$r_n = n^2\dfrac{\hbar\cdot 4\pi\varepsilon_0}{m_e e^2}$, $\quad E_n = -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$,

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} = -\frac{m_e e^4}{h\cdot 8h^2\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad \nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right),$$

$$R = \frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2}, \qquad E_n = -\frac{2\pi\hbar}{n^2}R = -\frac{2\pi\hbar}{n^2}\cdot\frac{m_e e^4}{8h^3\varepsilon_0^2} = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Ответ $E_n = -\dfrac{2\pi\hbar}{n^2}R$.

6.20 Определите скорость v электрона на третьей орбите атома водорода.

Дано	*Решение*
$Z=1$ $n=3$	$\frac{mv^2}{r}=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\quad r=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}$,
v_3 — ?	$mvr=n\hbar$, $\quad \frac{mve^2}{4\pi\varepsilon_0 mv^2}=n\hbar$.

$$v=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}, \qquad v_3=\frac{1}{3}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}.$$

Ответ $v_3 = 0{,}731$ Мм/с.

6.21 Электрон находится на первой боровской орбите атома водорода. Определите для электрона: 1) потенциальную энергию $E_п$; 2) кинетическую энергию $E_к$; 3) полную энергию E.

Ответ 1) $E_п=-27{,}2$ эВ; 2) $E_к=13{,}6$ эВ; 3) $E=-13{,}6$ эВ.

6.22 Определите частоту f вращения электрона по третьей орбите атома водорода в теории Бора.

Дано	*Решение*
$Z=1$ $n=3$	$\frac{mv^2}{r}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$, $\quad mvr=n\hbar$,
f — ?	$r_n=n^2\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar}{me^2}$, $\quad v_n=\frac{1}{n}\cdot\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar}$,

$$f=\frac{v_n}{2\pi r_n}=\frac{me^4}{32\pi^3\varepsilon_0^2\hbar^3 n^3}=\frac{me^4}{4\varepsilon_0^2 h^3 n^3}.$$

Ответ $f=2{,}42\cdot 10^{14}$ Гц.

6.23 Определите: 1) частоту f вращения электрона, находящегося на первой боровской орбите; 2) эквивалентный ток.

Дано	*Решение*
$n=1$ $r_1=52{,}8$ пм	$mvr=n\hbar$, $n=1$, $v_1=\frac{\hbar}{mr_1}$,
1) f — ? 2) I — ?	$T=\frac{2\pi r_1}{v_1}$, $f=\frac{1}{T}$, $f=\frac{v_1}{2\pi r_1}=\frac{\hbar}{2\pi m r_1^2}$,

$$I=\frac{e}{T}=ef.$$

Ответ 1) $f=6{,}58\cdot10^{15}$ Гц; 2) $I=1{,}05$ мА.

6.24 Определите частоту света, излучаемого атомом водорода, при переходе электрона на уровень с главным квантовым числом $n=2$, если радиус орбиты электрона изменился в $k=9$ раз.

Дано	*Решение*
$n=2$ $k=9$	$\nu=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$, $\frac{r_m}{r_n}=k$, $\frac{r_m}{r_n}=\frac{m^2}{n^2}$,
ν — ?	$\frac{n^2}{m^2}=\frac{1}{k}$, $\nu=\frac{R}{n^2}\left(1-\frac{1}{k}\right)$.

Ответ $\nu=0{,}731\cdot10^{15}$ Гц.

6.25 Пользуясь теорией Бора, найдите числовое значение постоянной Ридберга.

Ответ $R=\frac{me^4}{8h^3\varepsilon_0^2}=3{,}27\cdot10^{15}$ с$^{-1}$.

6.26 Определите потенциал ионизации атома водорода.

Дано	Решение
$Z = 1$ $R = 3{,}29\cdot 10^{15}\ \text{с}^{-1}$	$E_i = e\varphi_i$, $\quad E_i = h\nu_{1,\infty} = hR\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{\infty^2}\right) = hR$,
φ_i — ?	$\varphi_i = \frac{hR}{e}$.

Ответ $\varphi_i = 13{,}6$ В.

6.27 Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ, определите первый потенциал возбуждения φ_1 этого атома.

Дано	Решение
$E_i = 13{,}6$ эВ	$E_i = e\varphi_i = hR$, $\quad e\varphi_1 = h\nu_{1,2} = hR\left(\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}E_i$,
φ_1 — ?	$\varphi_1 = \frac{3}{4}\frac{E_i}{e}$.

Вычисления:

$$\varphi_1 = \frac{3\cdot 13{,}6\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Дж}}{4\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\ \text{Кл}} = 10{,}2\ \text{В}.$$

Ответ $\varphi_1 = 10{,}2$ В.

6.28 Определите первый потенциал возбуждения атома водорода.

Ответ $\varphi_1 = 10{,}2$ В.

● ●

Первый потенциал возбуждения

Первый потенциал возбуждения φ_1 — это ускоряющее напряжение, соответствующее переходу невозбужденного атома в первое возбужденное состояние.

6.29 Основываясь на том, что энергия ионизации атома водорода $E_i = 13{,}6$ эВ, определите в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую самой длинноволновой линии серии Бальмера.

Дано

$E_i = 13{,}6$ эВ

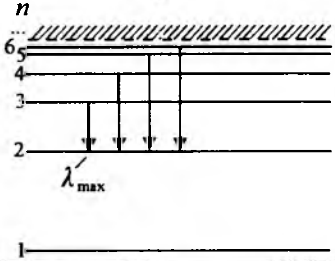
$E_{Б,\lambda_{\max}}$ — ?

Решение

$$E_i = h\nu_{1,\infty} = hR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right) = hR\,,$$

$$E_{Б,\lambda_{\max}} = E_{3,2} = h\nu_{3,2} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right),$$

$$E_{Б,\lambda_{\max}} = E_i\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right) = \frac{5}{36}E_i\,.$$



Ответ $E_{Б,\lambda_{\max}} = 1{,}89$ эВ.

6.30 Основываясь на том, что первый потенциал возбуждения атома водорода $\varphi_1 = 10{,}2$ В, определите в электрон-вольтах энергию фотона, соответствующую второй линии серии Бальмера.

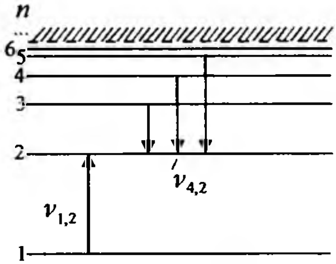
Дано

$\varphi_1 = 10{,}2$ В

$E_{4,2}$ — ?

Решение

$$e\varphi_1 = h\nu_{1,2}\,,$$



$$h\nu_{1,2} = hR\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right) = \frac{3}{4}hR\,, \qquad e\varphi_1 = \frac{3}{4}hR\,,$$

$$hR = \frac{4}{3}e\varphi_1\,, \quad E_{4,2} = hR\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right) = \frac{3}{16}hR = \frac{1}{4}e\varphi_1\,.$$

Ответ $E_{4,2} = 2{,}55$ эВ.

6.31 Определите работу, которую необходимо совершить, чтобы удалить электрон со второй боровской орбиты атома водорода за пределы притяжения его ядром.

Ответ $A = 5{,}45 \cdot 10^{-19}$ Дж.

[illegible] Электрон выбит из атома водорода, находящегося в основном состоянии, фотоном, энергия которого $\varepsilon = 17{,}7$ эВ. Определите скорость v электрона за пределами атома.

Дано	Решение
$Z = 1$ $n = 1$ $\varepsilon = 17{,}7$ эВ $=$ $= 28{,}3 \cdot 10^{-19}$ Дж	$\varepsilon = E_i + \frac{mv^2}{2}$, $E_i = 13{,}6$ эВ $= 21{,}8 \cdot 10^{-19}$ Дж, $v = \sqrt{\frac{2(\varepsilon - E_i)}{m}}$.
v — ?	

Ответ $v = 1{,}2$ Мм/с.

[illegible] Фотон с энергией $\varepsilon = 12{,}12$ эВ, поглощенный атомом водорода, находящимся в основном состоянии, переводит атом в возбужденное состояние. Определите главное квантовое число этого состояния.

Дано	Решение
$\varepsilon = 12{,}12$ эВ	$\varepsilon = E_2 - E_1$ (см. рисунок к задаче 6.34), $E_1 = -13{,}6$ эВ,
n — ?	$E_2 = \frac{E_1}{n^2}$, $n = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = \sqrt{\frac{E_1}{E_1 + \varepsilon}}$.

Ответ $n = 3$.

6.34 Определите, какие спектральные линии появятся в видимой области спектра излучения атомарного водорода под действием ультрафиолетового излучения с длиной волны $\lambda = 95$ нм.

Дано	*Решение*	
$Z = 1$ $\lambda = 95$ нм $= 9{,}5 \cdot 10^{-8}$ м	$\varepsilon = \dfrac{hc}{\lambda}$,	$E_2 = E_1 + \varepsilon$,
λ_n — ?	$E_1 = -13{,}6$ эВ,	$E_2 = \dfrac{1}{n^2} E_1$,

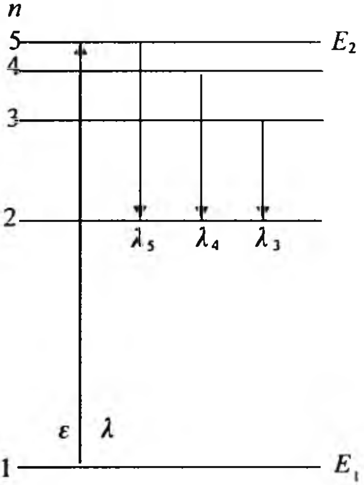
$$n = \sqrt{\frac{E_1}{E_2}}, \qquad \lambda_n = \frac{c}{R\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2}\right)}, \qquad n = n,\ n-1,\ ...,\ 3.$$

Вычисления:

$$\varepsilon = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^{8}}{95 \cdot 10^{-9} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19}} \text{ эВ} = 13{,}1 \text{ эВ};$$

$$E_2 = -13{,}6 \text{ эВ} + 13{,}1 \text{ эВ} = -0{,}5 \text{ эВ};$$

$$n = \sqrt{\frac{-13{,}6}{-0{,}5}} = 5;$$



$$\lambda_5 = \frac{3 \cdot 10^{8} \text{ м/с}}{3{,}29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{5^2}\right)} = 0{,}434 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\lambda_4 = \frac{3 \cdot 10^{8} \text{ м/с}}{3{,}29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{4^2}\right)} = 0{,}486 \cdot 10^{-6} \text{ м};$$

$$\lambda_3 = \frac{3 \cdot 10^{8} \text{ м/с}}{3{,}29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right)} = 0{,}656 \cdot 10^{-6} \text{ м}.$$

Ответ $\lambda_n = 0{,}434$ мкм; 0,486 мкм; 0,656 мкм.

6.35 В излучении звезды обнаружен водородоподобный спектр, длины волн которого в 9 раз меньше, чем у атомарного водорода. Определите элемент, которому принадлежит данный спектр.

Ответ $Z=3$, литий.

6.36 Применяя теорию Бора к мезоатому водорода (в мезоатоме водорода электрон заменен мюоном, заряд которого равен заряду электрона, а масса в 207 раз больше массы электрона), определите: 1) радиус первой орбиты мезоатома; 2) энергию ионизации мезоатома.

Дано	Решение
$Z=1$ $n=1$	$\frac{mv^2}{r}=\frac{ZQ^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$, $\quad mvr=n\hbar$,
$Q=e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл $m=207m_e$	$r=n^2\frac{\hbar^2\cdot4\pi\varepsilon_0}{mZQ^2}$, $\quad n=1, 2, \ldots,$
1) r_1 — ? 2) E_i — ?	$\boxed{n=1,\ Z=1}$ $\quad r_1=\frac{\hbar^2\cdot4\pi\varepsilon_0}{mQ^2}$,

$$E_i=E_\infty-E_1, \qquad E_1=-\frac{Z^2mQ^4}{8h^2\varepsilon_0^2}, \qquad Z=1,\ E_\infty=0, \qquad E_i=\frac{mQ^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Ответ 1) $r=0{,}254$ пм; 2) $E_i=2{,}8$ кэВ.

6.37 Определите, какая энергия требуется для полного отрыва электрона от ядра однократно ионизованного атома гелия, если: 1) электрон находится в основном состоянии; 2) электрон находится в состоянии, соответствующем главному квантовому числу $n=3$.

Ответ 1) $E_{i1}=54{,}2$ эВ; 2) $E_{i2}=6{,}02$ эВ.

6.2. Элементы квантовой механики

6.38 Определите импульс и энергию: 1) рентгеновского фотона; 2) электрона, если длина волны того и другого равна 10^{-10} м.

Дано

$\lambda = 10^{-10}$ м

γ

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

1) p_γ, E_γ — ?

2) p_e, E_e — ?

Решение

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda}, \qquad E_\gamma = p_\gamma c,$$

$$p_e = \frac{h}{\lambda} = p_\gamma, \qquad E_e = \frac{p_e^2}{2m}.$$

Ответ 1) $p_\gamma = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $E_\gamma = 12{,}4$ кэВ;

2) $p_e = 6{,}63 \cdot 10^{-24}$ кг · м/с, $E_e = 151$ эВ.

6.39 Определите длину волны де Бройля для электрона, находящегося в атоме водорода на третьей боровской орбите.

Дано

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$n = 3$

λ — ?

Решение

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \qquad mvr = n\hbar,$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad v = \frac{1}{n} \cdot \frac{e^2}{2\varepsilon_0 h},$$

$$\lambda = \frac{2h^2 n\varepsilon_0}{me^2}.$$

Ответ $\lambda = 1$ нм.

6.40 Определите длину волны де Бройля для нейтрона, движущегося со средней квадратичной скоростью при $T = 290$ К.

Дано	*Решение*
$\langle v_{кв} \rangle$ $m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг $T = 290$ К $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К λ — ?	$\langle v_{кв} \rangle = \sqrt{\dfrac{3kT}{m}}$, $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{m \langle v_{кв} \rangle} = \dfrac{h}{\sqrt{3kmT}}$.

Ответ $\lambda = 148$ пм.

6.41 Протон движется в однородном магнитном поле с индукцией $B = 15$ мТл по окружности радиусом $R = 1{,}4$ м. Определите длину волны де Бройля для протона.

Ответ $\lambda = 0{,}197$ пм.

6.42 Определите, какую ускоряющую разность потенциалов должен пройти протон, чтобы длина волны де Бройля λ для него была равна 1 нм.

Дано	*Решение*
$\lambda = 1$ нм $= 10^{-9}$ м $m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ м U — ?	$eU = \dfrac{p^2}{2m}$, $p = \sqrt{2meU}$, $\lambda = \dfrac{h}{p}$, $\lambda = \dfrac{h}{\sqrt{2meU}}$, $U = \dfrac{h^2}{2me\lambda^2}$.

Ответ $U = 0{,}822$ мВ.

6.43 Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов $U = 500$ В, имеет длину волны де Бройля $\lambda = 1{,}282$ пм. Принимая заряд этой частицы равным заряду электрона, определите ее массу.

Дано	Решение
$U = 500$ В $\lambda = 1{,}282$ пм $=$ $= 1{,}282 \cdot 10^{-12}$ м $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл m — ?	$eU = \dfrac{p^2}{2m}$, $\quad p = \sqrt{2meU}$, $\lambda = \dfrac{h}{p} = \dfrac{h}{\sqrt{2meU}}$, $\quad m = \dfrac{h^2}{2e\lambda^2 U}$.

Ответ $m = 1{,}672 \cdot 10^{-27}$ кг.

6.44 Выведите зависимость между длиной волны де Бройля λ релятивистской частицы и ее кинетической энергией.

Дано	Решение
λ, T $\lambda(T)$ — ?	$\lambda = \dfrac{h}{p}$, $\quad pc = \sqrt{T(T + 2mc^2)}$, $p = \dfrac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{c}$, $\quad \lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}$.

Ответ $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}$.

6.45 Выведите зависимость между длиной волны де Бройля λ релятивистского электрона и ускоряющим потенциалом U.

Ответ $\lambda = \dfrac{hc}{\sqrt{eU(2mc^2 + eU)}}$.

6.46 Кинетическая энергия электрона равна 1 кэВ. Определите длину волны де Бройля.

Дано

$T = 1$ кэВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-16}$ Дж

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

λ — ?

Решение

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \qquad T = \frac{mv^2}{2}, \qquad v = \sqrt{\frac{2T}{m}},$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mT}}.$$

Ответ $\lambda = 38{,}8$ пм.

6.47 Кинетическая энергия электрона равна 0,6 МэВ. Определите длину волны де Бройля.

Дано

$T = 0{,}6$ МэВ $=$

$= 9{,}6 \cdot 10^{-14}$ Дж

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

λ — ?

Решение

$$\lambda = \frac{h}{p}, \qquad p^2c^2 = T(T + 2mc^2),$$

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{c}, \qquad \lambda = \frac{hc}{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}.$$

Ответ $\lambda = 1{,}26$ пм.

6.48 Определите, при каком числовом значении скорости длина волны де Бройля для электрона равна его комптоновской длине волны.

Ответ $v = 2{,}12 \cdot 10^8$ м/с.

6.49 Определите, при каком числовом значении кинетической энергии T длина волны де Бройля электрона равна его комптоновской длине волны.

Ответ $T = 0{,}212$ МэВ.

6.50 Выведите связь между длиной круговой электронной орбиты и длиной волны де Бройля.

Ответ $2\pi r = n\lambda$.

6.51 Определите, как изменится длина волны де Бройля электрона в атоме водорода при переходе его с четвертой боровской орбиты на вторую.

Дано

$m = 2$

$n = 4$

$\dfrac{\lambda_4}{\lambda_2}$ — ?

Решение

$2\pi r = n\lambda$, $2\pi r_4 = 4\lambda_4$, $2\pi r_2 = 2\lambda_2$, $r_4 = 4^2 r_1$,

$r_2 = 2^2 r_1$, $\dfrac{\lambda_4}{\lambda_2} = \dfrac{2\pi r_4 \cdot 2}{4 \cdot 2\pi r_2} = \dfrac{r_4}{2r_2} = \dfrac{4^2 r_1}{2 \cdot 2^2 r_1} = 2$.

Ответ $\dfrac{\lambda_4}{\lambda_2} = 2$.

6.52 В опыте Дэвиссона и Джермера, обнаруживших дифракционную картину при отражении пучка электронов от естественной дифракционной решетки — монокристалла никеля, оказалось, что в направлении, составляющем угол $\alpha = 55°$ с направлением падающих электронов, наблюдается максимум отражения четвертого порядка при кинетической энергии электронов $T = 180$ эВ. Определите расстояние между кристаллографическими плоскостями никеля.

Дано

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$\alpha = 55°$

$k = 4$

$T = 180$ эВ =
= $2{,}88 \cdot 10^{-17}$ Дж

d — ?

Решение

$2d \sin\vartheta = k\lambda$, $\vartheta = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$, $\lambda = \dfrac{h}{p}$,

$T = \dfrac{p^2}{2m}$, $p = \sqrt{2mT}$, $\sin\left(90° - \dfrac{\alpha}{2}\right) = \cos\dfrac{\alpha}{2}$,

$2d \cos\dfrac{\alpha}{2} = k\dfrac{h}{\sqrt{2mT}}$, $d = \dfrac{kh}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\sqrt{2mT}}$.

Ответ $d = 0{,}206$ нм.

6.53 Моноэнергетический пучок нейтронов, получаемый в результате ядерной реакции, падает на кристалл с периодом $d = 0{,}15$ нм. Определите скорость нейтронов, если брэгговское отражение первого порядка наблюдается, когда угол скольжения $\vartheta = 30^\circ$.

Дано

$d = 0{,}15$ нм $= 1{,}5 \cdot 10^{-10}$ м

$m = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

$k = 1$

$\vartheta = 30^\circ$

v — ?

Решение

$$2d \sin\vartheta = k\lambda, \qquad \lambda = \frac{h}{mv},$$

$$v = \frac{h}{m\lambda}, \qquad v = \frac{kh}{2dm \sin\vartheta}.$$

Ответ $v = 2{,}64$ км/с.

6.54 Параллельный пучок моноэнергетических электронов направлен нормально на узкую щель шириной $a = 1$ мкм. Определите скорость этих электронов, если на экране, отстоящем на расстоянии $l = 20$ см от щели, ширина центрального дифракционного максимума составляет $\Delta x = 48$ мкм.

Дано

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

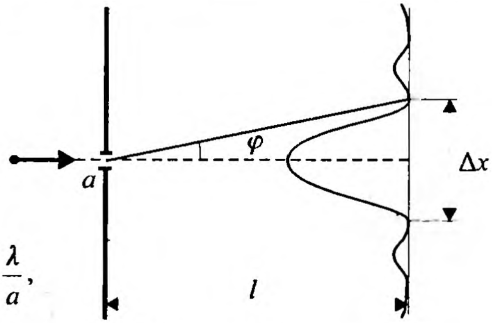
$a = 1$ мкм $= 10^{-6}$ м

$l = 20$ см $= 0{,}2$ м

$\Delta x = 48$ мкм $= 4{,}8 \cdot 10^{-5}$ м

v — ?

Решение



$\boxed{\text{min}}$ $a \sin\varphi = \pm k\lambda$, $k = 1$, $\sin\varphi = \dfrac{\lambda}{a}$,

$\Delta x = 2l \operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{tg}\varphi \approx \sin\varphi$ (угол φ мал), $\lambda = \dfrac{a\,\Delta x}{2l}$, $\lambda = \dfrac{h}{mv}$, $v = \dfrac{2lh}{am\,\Delta x}$.

Ответ $v = 6{,}06$ Мм/с.

6.55 Параллельный пучок электронов, ускоренный разностью потенциалов $U = 50$ В, направлен нормально на две параллельные, лежащие в одной плоскости щели, расстояние d между которыми равно 10 мкм. Определите расстояние между центральным и первым максимумом дифракционной картины на экране, который расположен от щелей на расстоянии $l = 0{,}6$ м.

Ответ $\Delta x = \dfrac{hl}{d\sqrt{2meU}} = 10{,}4$ мкм.

6.56 Исходя из общей формулы для фазовой скорости ($v_{\text{фаз}} = \omega/k$), определите фазовую скорость волны де Бройля свободно движущейся с постоянной скоростью v частицы в нерелятивистском и релятивистском случаях.

Дано	*Решение*
$v_{\text{фаз}} = \omega/k$	$\omega = 2\pi\nu$, $\quad k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$, $\quad v_{\text{фаз1}} = \dfrac{\hbar\omega}{\hbar k} = \dfrac{E}{p}$,
1) $v \ll c$ 2) $v \approx c$	$v \ll c$, $\quad E = \dfrac{p^2}{2m}$, $\quad v_{\text{фаз1}} = \dfrac{p^2}{2mp} = \dfrac{p}{2m} = \dfrac{mv}{2m} = \dfrac{v}{2}$,
$v_{\text{фаз1}}$ — ? $v_{\text{фаз2}}$ — ?	$v \approx c$, $\quad E = mc^2$, $\quad v_{\text{фаз2}} = \dfrac{E}{p} = \dfrac{mc^2}{mv} = \dfrac{c^2}{v}$.

Ответ 1) $v_{\text{фаз1}} = \dfrac{v}{2}$; $\quad$ 2) $v_{\text{фаз2}} = \dfrac{c^2}{v}$.

6.57 Можно вывести, что для релятивистского случая фазовая скорость $v_{\text{фаз}} = c^2/v$ (см. задачу 6.56), т.е. фазовая скорость волн де Бройля больше скорости света в вакууме. Объясните правомерность этого результата.

6.58 Объясните, почему представление о боровских орбитах не совместимо с принципом неопределенности.

6.59 Докажите, что групповая скорость волн де Бройля равна скорости свободно движущейся частицы. Рассмотрите нерелятивистский и релятивистский случаи.

Ответ $u = v$.

6.60 Докажите, что для свободно движущейся с постоянной скоростью v частицы выполняется соотношение $v_{\text{фаз}}u = c^2$ (u — групповая скорость).

Ответ $v_{\text{фаз}}u = c^2$.

6.61 Выведите закон дисперсии волн де Бройля, т.е. зависимость фазовой скорости волн де Бройля от их длины волны. Рассмотрите нерелятивистский и релятивистский случаи.

Ответ 1) $v_{\text{фаз}} = \dfrac{h}{2m\lambda}$; 2) $v_{\text{фаз}} = c\sqrt{\dfrac{m_0^2c^2\lambda^2}{h^2}+1}$.

6.62 Ширина следа электрона (обладающего кинетической энергией $T = 1{,}5$ кэВ) на фотопластинке, полученного с помощью камеры Вильсона, составляет $\Delta x = 1$ мкм. Определите, можно ли по данному следу обнаружить отклонение в движении электрона от законов классической механики.

Дано

$m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг

$T = 1{,}5$ кэВ $= 2{,}4\cdot10^{-16}$ Дж

$\Delta x = 1$ мкм $= 10^{-6}$ м

$\dfrac{\Delta p_x}{p_x}$ — ?

Решение

$$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{p_x^2}{2m}, \qquad p_x = \sqrt{2mT}, \qquad \Delta x\,\Delta p_x \geqslant h,$$

$$\Delta x\,\Delta p_x = h, \qquad \Delta p_x = \frac{h}{\Delta x}, \qquad \frac{\Delta p_x}{p_x} = \frac{h}{\Delta x\sqrt{2mT}}.$$

Ответ $\dfrac{\Delta p_x}{p_x} \ll 1$.

6.63 Электронный пучок ускоряется в электронно-лучевой трубке разностью потенциалов $U = 1$ кВ. Известно, что неопределенность скорости составляет 0,1% от ее числового значения. Определите неопределенность координаты электрона. Являются ли электроны в данных условиях квантовой или классической частицей?

Дано

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл

$U = 1$ кВ $= 10^3$ В

$\frac{\Delta v}{v} = 0{,}001$

Δx — ?

Решение

$$T = \frac{mv^2}{2} = eU\,, \qquad v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}\,,$$

$$\Delta x\,\Delta p \geqslant h\,, \qquad \frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta v}{v} \ll 1\,,$$

$$\Delta x \geqslant \frac{h}{\Delta p} = \frac{h}{m\,\Delta v} = \frac{h}{0{,}001\sqrt{2meU}}\,.$$

Ответ $\Delta x = 38{,}8$ нм.

6.64 Определите отношение неопределенностей скорости электрона, если его координата установлена с точностью до 10^{-5} м, и пылинки массой $m = 10^{-12}$ кг, если ее координата установлена с такой же точностью.

Дано

$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$\Delta x_e = 10^{-5}$ м

$m_п = 10^{-12}$ кг

$\Delta x_п = 10^{-5}$ м

$\frac{\Delta v_e}{\Delta v_п}$ — ?

Решение

$$\Delta x\,\Delta p_x \geqslant h\,, \qquad \Delta x_e m_e\,\Delta v_e = h\,,$$

$$m_п\,\Delta v_п\,\Delta x_п = h\,, \qquad \frac{\Delta v_e}{\Delta v_п} = \frac{h m_п\,\Delta x_п}{h m_e\,\Delta x_e} = \frac{m_п}{m_e}\,.$$

Ответ $\frac{\Delta v_e}{\Delta v_п} = 1{,}1 \cdot 10^{18}$.

6.65 Электронный пучок выходит из электронной пушки под действием разности потенциалов $U = 200$ В. Определите, можно ли одновременно измерить траекторию электрона с точностью до 100 пм (с точностью порядка диаметра атома) и его скорость с точностью до 10%.

Дано

$U = 200$ В

$\Delta x = 100$ пм $= 10^{-10}$ м

$\Delta v = 0{,}1v$

$\Delta x\, m_e\, \Delta v$ — ?

Решение

$$\frac{m_e v^2}{2} = eU, \qquad v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}},$$

$$\Delta v = 0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}, \qquad \Delta x\, m_e\, \Delta v = 0{,}1\sqrt{2m_e eU} \cdot \Delta x.$$

Ответ $\Delta x\, m_e\, \Delta v = 7{,}64 \cdot 10^{-35}$ Дж · с $< h$.

6.66 Электрон движется в атоме водорода по первой боровской орбите. Принимая, что допускаемая неопределенность скорости составляет 10% от ее числового значения, определите неопределенность координаты электрона. Применимо ли в данном случае для электрона понятие траектории?

Дано

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$n = 1$

$\Delta v = 0{,}1v$

Δx — ?

Решение

$$mvr = n\hbar, \qquad n = 1, \qquad mvr_1 = \hbar,$$

$$v = \frac{\hbar}{mr_1}, \qquad \Delta v_x = 0{,}1\frac{\hbar}{mr_1}, \qquad r_1 = 52{,}8 \text{ пм}, \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi},$$

$$\Delta x\, \Delta p_x \geqslant h, \qquad \Delta x\, m\, \Delta v_x = h, \qquad \Delta x = \frac{h}{m\, \Delta v_x}.$$

Ответ $\Delta x = 3{,}34$ нм $\gg r_1$.

6.67 Применяя соотношение неопределенностей, покажите, что для движущейся частицы, неопределенность координаты которой равна длине волны де Бройля, неопределенность скорости равна по порядку величины самой скорости частицы.

6.68 Используя соотношение неопределенностей в форме $\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \hbar$, оцените минимально возможную полную энергию электрона в атоме водорода. Примите неопределенность координаты равной радиусу атома. Сравните полученный результат с теорией Бора.

Дано	*Решение*
$\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \hbar$ $\Delta x = r$ $n = 1$ $Z = 1$ $E_{\min}$ — ?	$\Delta x\,\Delta p_x \geqslant \hbar$, $\quad \dfrac{\Delta p_x}{p_x} \approx 1$, $\quad p_x \approx \Delta p_x = \dfrac{\hbar}{\Delta x} = \dfrac{\hbar}{r}$, $E = T + \Pi = \dfrac{p^2}{2m} + \left(-\dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)$, $\quad E = \dfrac{\hbar^2}{2mr^2} - \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$,

$$\boxed{r_{\min}} \quad \frac{dE}{dr} = 0, \qquad \frac{dE}{dr} = -\frac{\hbar^2}{mr^3} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, \qquad \frac{1}{r^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0} - \frac{\hbar^2}{mr}\right) = 0,$$

$$r_{\min} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}, \qquad E_{\min} = \frac{\hbar^2}{2mr_{\min}^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_{\min}} = -\frac{me^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2},$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \qquad E_{\min} = -\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}.$$

Ответ $E_{\min} = -\dfrac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2} = -13{,}6$ эВ.

6.69 Объясните физический смысл соотношения неопределенности для энергии E и времени t: $\quad \Delta E\,\Delta t \geqslant h$.

Основные физические постоянные

Постоянная Планка	$h = 6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с
	$\hbar = 1{,}05\cdot10^{-34}$ Дж · с
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м

6.70 Воспользовавшись соотношением неопределенностей, оцените размытость энергетического уровня в атоме водорода: 1) для основного состояния; 2) для возбужденного состояния (время его жизни равно 10^{-8} с).

Дано

1) $n = 1$

2) $n > 1$

$\Delta t = 10^{-8}$ с

1) ΔE — ?

2) ΔE — ?

Решение

$\Delta E\,\Delta t \geqslant h$, $\quad \Delta E\,\Delta t = h$.

$\boxed{n=1}$ $\quad \Delta t = \infty$, $\quad \Delta E = 0$;

$\boxed{n>1}$ $\quad \Delta E = \dfrac{h}{\Delta t}$.

Ответ 1) $\Delta E = 0$; 2) $\Delta E = 414$ нэВ.

6.71 Длина волны λ излучаемого атомом фотона составляет 0,6 мкм. Принимая время жизни возбужденного состояния $\Delta t = 10^{-8}$ с, определите отношение естественной ширины энергетического уровня, на который был возбужден электрон, к энергии, излученной атомом.

Дано

$\Delta\lambda = 0{,}6$ мкм $= 6 \cdot 10^{-7}$ м

$\Delta t = 10^{-8}$ с

$\dfrac{\Delta E}{E}$ — ?

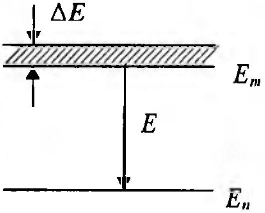
Решение

$\Delta E\,\Delta t \geqslant h$,

$\Delta E\,\Delta t = h$,

$\Delta E = \dfrac{h}{\Delta t}$, $\quad E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$,

$\dfrac{\Delta E}{E} = \dfrac{h}{\Delta t}\dfrac{\lambda}{hc} = \dfrac{\lambda}{c\,\Delta t}$.



Ответ $\dfrac{\Delta E}{E} = 2 \cdot 10^{-7}$.

6.72 Принимая, что электрон находится внутри атома диаметром 0,3 нм, определите (в электрон-вольтах) неопределенность энергии данного электрона.

Ответ $\Delta E = \dfrac{h^2}{2m(\Delta x)^2} = 16{,}7$ эВ.

6.73 Объясните, почему физический смысл имеет не сама Ψ-функция, а квадрат ее модуля $|\Psi|^2$?

6.74 Объясните, почему волновая функция должна быть конечной, однозначной и непрерывной.

6.75 Запишите выражение для вероятности W обнаружения частицы в конечном объеме V, если известна координатная пси-функция частицы $\psi(x, y, z)$.

6.76 Волновая функция, описывающая некоторую частицу, может быть представлена в виде $\Psi(x, t) = \psi(x)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$. Покажите, что плотность вероятности нахождения частицы определяется только координатной ψ-функцией.

Дано	*Решение*
$\Psi(x,t)=\psi(x)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$ w — ?	$w=\lvert\Psi(x,t)\rvert^2$, $\lvert\Psi(x,t)\rvert^2=\Psi(x,t)\cdot\Psi^*(x,t)$, $w=\psi(x)\cdot e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\cdot\psi^*(x)\cdot e^{\frac{i}{\hbar}Et}=\psi(x)\psi^*(x)=\lvert\psi(x)\rvert^2$.

Ответ $w=|\psi(x)|^2$.

Некоторые математические формулы

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

6.77 ψ -Функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — некоторая постоянная. Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A.

Дано

$\psi = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/a}$

$a = \mathrm{const}$

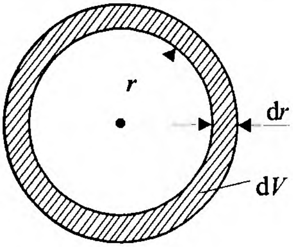
A — ?

Решение

$\int\limits_V |\psi|^2\,\mathrm{d}V = 1$,

$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$,

$\int\limits_0^\infty \frac{A^2}{r^2}\,\mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 1$,



$$4\pi A^2 \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r = -\frac{4\pi}{2}A^2 a\,\mathrm{e}^{-2r/a}\Big|_0^\infty = 2\pi A^2 a,$$

$2\pi A^2 a = 1$, $\quad A = \sqrt{\frac{1}{2\pi a}}$.

Ответ $A = \sqrt{\frac{1}{2\pi a}}$.

6.78 Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент A волновой функции $\psi = A\,\mathrm{e}^{-r/a}$, описывающей основное состояние электрона в атоме водорода, где r — расстояние электрона от ядра, a — первый боровский радиус.

Дано

$\psi(r) = A\,\mathrm{e}^{-r/a}$

A — ?

Решение

$\int\limits_V |\psi|^2\,\mathrm{d}V = 1$, $\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$, $|\psi(r)|^2 = A^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}$,

$\int\limits_0^\infty A^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi A^2 \int\limits_0^\infty r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r = 1$,

$$\int\limits_0^\infty r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r = \frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3} = \frac{a^3}{4},\qquad 4\pi A^2\cdot\frac{a^3}{4} = 1,\qquad \pi A^2 a^3 = 1,\qquad A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}.$$

Ответ $A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}$.

6.79 Используя условие нормировки вероятностей, определите нормировочный коэффициент волновой функции $\psi(r) = A\,\mathrm{e}^{-r^2/(2a^2)}$, описывающей поведение некоторой частицы, где r — расстояние частицы от силового центра; a — некоторая постоянная.

Ответ $A = \dfrac{1}{\sqrt{\pi^{3/2}a^3}}$.

6.80 Волновая функция $\psi = A\sin(2\pi x/l)$ определена только в области $0 \leqslant x \leqslant l$. Используя условие нормировки, определите нормировочный множитель A.

Дано	***Решение***
$\psi(x) = A\sin\dfrac{2\pi x}{l}$ $0 \leqslant x \leqslant l$ A – ?	$\int\limits_0^l \lvert\psi(x)\rvert^2\,\mathrm{d}x = 1$, $\lvert\psi(x)\rvert^2 = A^2\sin^2\dfrac{2\pi x}{l}$,

$$\int\limits_0^l \lvert\psi(x)\rvert^2\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^l A^2\sin^2\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{d}x = A^2\int\limits_0^l \sin^2\frac{2\pi x}{l}\,\mathrm{d}x =$$

$$= A^2\int\limits_0^l \frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x = \frac{A^2}{2}\int\limits_0^l \mathrm{d}x - \frac{A^2}{2}\int\limits_0^l \cos\frac{4\pi x}{l}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A^2}{2}x\Big|_0^l - \frac{A^2}{2}\frac{l}{4\pi}\sin\frac{4\pi x}{l}\Big|_0^l = \frac{A^2}{2}l,$$

$$\frac{A^2}{2}l = 1, \qquad A = \sqrt{\frac{2}{l}}.$$

Ответ $A = \sqrt{\dfrac{2}{l}}$.

6.81 ψ-Функция некоторой частицы имеет вид $\psi = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — некоторая постоянная. Определите среднее расстояние $\langle r\rangle$ частицы до силового центра.

Дано

$\psi = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r/a}$

$a = \mathrm{const}$

$\langle r\rangle$ — ?

Решение

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty r|\psi|^2\,\mathrm{d}V = \int_0^\infty r\psi\psi^*\,\mathrm{d}V, \qquad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r,$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} \qquad \text{(см. задачу 6.77)},$$

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty \frac{1}{2\pi a r^2}\,\mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a}\int_0^\infty r\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r = \frac{2}{a}\cdot\frac{1}{\left(\frac{2}{a}\right)^2} = \frac{a}{2}.$$

Ответ $\langle r\rangle = \frac{a}{2}$.

6.82 Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi = A\,\mathrm{e}^{-r^2/(2a^2)}$, где r — расстояние этой частицы до силового центра; a — некоторая постоянная. Определите среднее расстояние $\langle r\rangle$ частицы до силового центра.

Дано

$\psi = A\,\mathrm{e}^{-r^2/(2a^2)}$

$a = \mathrm{const}$

$\langle r\rangle$ — ?

Решение

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi^{3/2}a^3}} \qquad \text{(см. задачу 6.79)}, \qquad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r,$$

$$\langle r\rangle = \int_0^\infty r|\psi|^2\,\mathrm{d}V = \int_0^\infty rA^2\,\mathrm{e}^{-r^2/a^2}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r =$$

$$= \int_0^\infty 4\pi r^3\frac{1}{\pi^{3/2}a^3}\,\mathrm{e}^{-r^2/a^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{\pi}\cdot a^3}\int_0^\infty r^3\,\mathrm{e}^{-r^2/a^2}\,\mathrm{d}r = \frac{4}{\sqrt{\pi}\cdot a^3}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{1}{a^4}} = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}.$$

Ответ $\langle r\rangle = \frac{2a}{\sqrt{\pi}}$.

6.83

Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi = A\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра, a — первый боровский радиус. Определите среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ электрона до ядра в основном состоянии.

Дано

$\psi = A\,\mathrm{e}^{-r/a}$

$a = \text{const}$

$\langle r^2 \rangle$ — ?

Решение

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 |\psi(r)|^2\,\mathrm{d}V, \qquad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r,$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \quad \text{(см. задачу 6.78)},$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 \frac{1}{\pi a^3}\,\mathrm{e}^{-2r/a} \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = \frac{4}{a^3} \cdot \frac{4!}{\left(\frac{2}{a}\right)^5} = 3a^2.$$

Ответ $\langle r^2 \rangle = 3a^2$.

6.84

Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r^2/a^2}$, где A — нормировочный множитель, равный $\frac{1}{\sqrt{\pi a \sqrt{2\pi}}}$; r — расстояние частицы от силового центра; a — некоторая постоянная. Определите среднее значение квадрата расстояния $\langle r^2 \rangle$ частицы до силового центра.

Дано

$\psi(r) = \frac{A}{r}\,\mathrm{e}^{-r^2/a^2}$

$A = \frac{1}{\sqrt{\pi a \sqrt{2\pi}}}$

$a = \text{const}$

$\langle r^2 \rangle$ — ?

Решение

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 |\psi(r)|^2\,\mathrm{d}V, \qquad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r,$$

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^\infty r^2 \frac{A^2}{r^2}\,\mathrm{e}^{-2r^2/a^2} \cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi A^2 \int_0^\infty r^2\,\mathrm{e}^{-2r^2/a^2}\,\mathrm{d}r =$$

$$= 4\pi A^2 \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot \left(\frac{2}{a^2}\right)^{-3/2} = \frac{a^2}{4}.$$

Ответ $\langle r^2 \rangle = \dfrac{a^2}{4}$.

6.85 Волновая функция, описывающая основное состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi = A\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра, a — первый боровский радиус. Определите наиболее вероятное расстояние $r_\text{в}$ электрона до ядра.

Дано	*Решение*
$\psi = A\,\mathrm{e}^{-r/a}$ $a = \text{const}$ $r_\text{в}$ — ?	$\mathrm{d}W = \lvert\psi(r)\rvert^2\,\mathrm{d}V$, $\quad \mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r$, $\mathrm{d}W = 4\pi A^2 r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r$, $\quad w = \dfrac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}r} = 4\pi A^2 r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}$,

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = 8\pi A^2 r\,\mathrm{e}^{-2r/a} + 4\pi A^2 r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\cdot\left(-\frac{2}{a}\right).$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}r} = 0} \qquad 8\pi A^2 r\,\mathrm{e}^{-2r/a}\left(1 - \frac{r}{a}\right) = 0,$$

$$1 - \frac{r_\text{в}}{a} = 0, \qquad r_\text{в} = a.$$

Ответ $r_\text{в} = a$.

6.86 Волновая функция, описывающая некоторую частицу, имеет вид $\psi = A\,\mathrm{e}^{-r^2/(2a^2)}$, где r — расстояние частицы от силового центра; a — некоторая постоянная. Определите наиболее вероятное расстояние $r_\text{в}$ частицы до силового центра.

Ответ $r_\text{в} = a$.

6.87 Запишите уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода.

6.88 Запишите одномерное уравнение Шредингера (для стационарных состояний) для частицы, движущейся под действием квазиупругой силы.

6.89 Запишите общее уравнение Шредингера для свободной частицы, движущейся вдоль оси x, и решите это уравнение.

6.90 Исходя из принципа классического детерминизма и причинности в квантовой механике, объясните толкование причинности в классической и квантовой теориях.

6.91 Известно, что свободная квантовая частица описывается плоской монохроматической волной де Бройля. Плотность вероятности (вероятность, отнесенная к единице объема) обнаружения свободной частицы $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^* = |A|^2 = \text{const}$. Объясните, что означает постоянство этой величины.

6.92 Запишите уравнение Шредингера для стационарных состояний для свободной частицы, движущейся вдоль оси x, а также определите посредством его решения собственные значения энергии. Что можно сказать об энергетическом спектре свободной частицы?

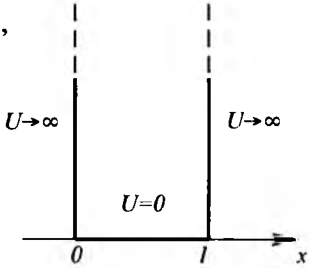
Ответ $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m}$, спектр непрерывный.

6.93 Волновая функция, описывающая частицу в момент времени $t = 0$, имеет вид $\Psi(x, 0) = A\,\mathrm{e}^{-x^2/a^2 + ikx}$, где a и k — некоторые положительные постоянные. Определите: 1) нормировочный коэффициент A; 2) область, в которой частица локализована.

Ответ 1) $A = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}}{a\sqrt{\pi}}}$; 2) $0 < x < a$.

6.94 Частица находится в одномерной прямоугольной “потенциальной яме” шириной l с бесконечно высокими “стенками”. Запишите уравнение Шредингера в пределах “ямы” ($0 \leqslant x \leqslant l$) и решите его.

Дано	***Решение***
$0 \leqslant x \leqslant l,\ U = 0$ $x < 0,\ U \to \infty$ $x > l,\ U \to \infty$ $\psi(x)$ — ?	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0$, $0 \leqslant x \leqslant l,\ U = 0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2}E\psi = 0$, $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0$,



$$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2},$$

$\psi(x) = A\sin kx + B\cos kx$, $\quad \psi(0) = 0$, $\quad B = 0$, $\quad \psi(x) = A\sin kx$,

$\psi(l) = A\sin kl = 0$, $\quad kl = n\pi$, $\quad k = \frac{n\pi}{l}$, $\quad \psi(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x$.

Ответ $\psi(x) = A\sin\frac{n\pi}{l}x$.

6.95 Частица находится в одномерной “потенциальной яме” шириной l с бесконечно высокими “стенками”. Выведите выражение для собственных значений энергии E_n.

Дано	***Решение***
$0 \leqslant x \leqslant l$ $U = 0$ E_n — ?	$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2\psi = 0$, $\quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $k = \frac{n\pi}{l}$ (см. задачу 6.94),

$\frac{n^2\pi^2}{l^2} = \frac{2mE}{\hbar^2}$, $\quad E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$, $\quad n = 1, 2, 3, \dots$

Ответ $E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$, $\quad n = 1, 2, 3, \dots$

6.96 Волновая функция, описывающая состояние частицы в одномерной прямоугольной “потенциальной яме” с бесконечно высокими “стенками”, имеет вид $\psi(x)=A\sin kx$. Определите: 1) вид собственной волновой функции $\psi_n(x)$; 2) коэффициент A , исходя из условия нормировки вероятностей.

Дано	*Решение*
$\psi(x)=A\sin kx$	$\psi(0)=\psi(l)=0$, $\quad \psi(l)=A\sin kl=0$,
1) $\psi_n(x)$ — ?	$kl=n\pi$, $\quad k=\frac{n\pi}{l}$, $\quad \psi_n(x)=A\sin\frac{n\pi}{l}x$,
2) A — ?	$\int\limits_0^l \lvert\psi_n(x)\rvert^2\,\mathrm{d}x=1$, $\quad \int\limits_0^l A^2\sin^2\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}A^2 l=1$.

Ответ 1) $\psi_n(x)=A\sin\frac{n\pi}{l}x$; $\quad$ 2) $A=\sqrt{\frac{2}{l}}$.

6.97 Известно, что нормированная собственная волновая функция, описывающая состояние электрона в одномерной прямоугольной “потенциальной яме” с бесконечно высокими “стенками”, имеет вид $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x$, где l — ширина “ямы”. Определите среднее значение координаты $\langle x\rangle$ электрона.

Дано	*Решение*
$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi n}{l}x$	$\langle x\rangle=\int\limits_0^l x\lvert\psi_n(x)\rvert^2\,\mathrm{d}x$, $\quad \langle x\rangle=\frac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin^2\frac{\pi n}{l}x\,\mathrm{d}x=$
$\langle x\rangle$ — ?	$=\frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cdot\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{2\pi n}{l}x\right)\mathrm{d}x=\frac{l}{2}$.

Ответ $\langle x\rangle=\frac{l}{2}$.

6.98 Докажите, что собственные волновые функции, описывающие состояние частицы в одномерной “потенциальной яме” с бесконечно высокими “стенками”, являются ортогональными, т. е. удовлетворяют условию $\int_0^l \psi_n(x)\psi_m(x)\,\mathrm{d}x = 0$, если $n \neq m$. Здесь l – ширина “ямы”; n и m — целые числа.

6.99 Частица в одномерной прямоугольной “потенциальной яме” шириной l с бесконечно высокими “стенками” находится в основном состоянии. Определите вероятность обнаружения частицы в левой трети “ямы”.

Дано

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$n = 1$

$0 \leqslant x \leqslant \frac{l}{3}$

W — ?

Решение

$$\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{\pi}{l}x,$$

$$W = \int_0^{l/3} |\psi_1|^2\,\mathrm{d}x = \int_0^{l/3} \frac{2}{l}\sin^2\frac{\pi}{l}x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^{l/3} \frac{1}{2}\left(1 - \cos\frac{2\pi}{l}x\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{l}\int_0^{l/3}\mathrm{d}x - \frac{1}{l}\int_0^{l/3}\cos\frac{2\pi}{l}x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{l}\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}x\Big|_0^{l/3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{3} = 0{,}195.$$

Ответ $W = 0{,}195$.

6.100 Частица в одномерной прямоугольной “ потенциальной яме” шириной l с бесконечно высокими “стенками” находится в возбужденном состоянии ($n = 2$). Определите вероятность обнаружения частицы в области $\frac{3}{8}l \leqslant x \leqslant \frac{5}{8}l$.

Ответ $W = 0{,}091$.

6.101 Электрон находится в одномерной прямоугольной “потенциальной яме” шириной l с бесконечно высокими “стенками”. Определите вероятность W обнаружения электрона в средней трети “ямы”, если электрон находится в возбужденном состоянии ($n=3$). Поясните физический смысл полученного результата, изобразив графически плотность вероятности обнаружения электрона в данном состоянии.

Дано

$$\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

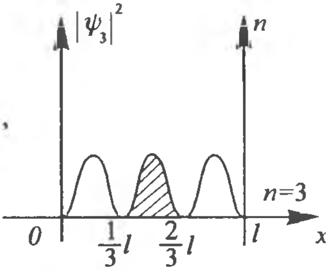
$n=3$

$\frac{1}{3}l \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}l$

W — ?

Решение

$$\psi_3(x)=\sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{3\pi}{l}x,$$



$$W=\int\limits_{l/3}^{2l/3}|\psi_3|^2\,dx=\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{2}{l}\sin^2\frac{3\pi}{l}x\,dx=\frac{2}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{6\pi}{l}x\right)dx=$$

$$=\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}dx-\frac{1}{l}\int\limits_{l/3}^{2l/3}\cos\frac{6\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}-\frac{1}{l}\frac{l}{6\pi}\sin\frac{6\pi}{l}x\Big|_{l/3}^{2l/3}=$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}\left(\sin\frac{6\pi}{l}\frac{2l}{3}-\sin\frac{6\pi}{l}\frac{l}{3}\right)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6\pi}(\sin 4\pi-\sin 2\pi)=\frac{1}{3}.$$

Ответ $W=\frac{1}{3}$.

6.102 Частица в одномерной прямоугольной “потенциальной яме” шириной l с бесконечно высокими “стенками” находится в возбужденном состоянии ($n=3$). Определите, в каких точках “ямы” ($0 \leqslant x \leqslant l$) плотность вероятности обнаружения частицы: 1) максимальна; 2) минимальна. Поясните полученный результат графически.

Ответ 1) $w=\max$ при $x=\frac{l}{6}, \frac{l}{2}, \frac{5l}{6}$; 2) $w=\min$ при $x=\frac{l}{3}, \frac{2l}{3}$.

6.103 Определите, при какой ширине одномерной прямоугольной “потенциальной ямы” с бесконечно высокими “стенками” дискретность энергетического спектра электрона сравнима с его средней кинетической энергией при температуре T.

Дано

$\Delta E_n = E_к$

T

l — ?

Решение

$$\Delta E_n = (2n+1)\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2},$$

$$E_к = \frac{3}{2}kT,$$

$$(2n+1)\frac{\hbar^2\pi^2}{2ml^2} = \frac{3}{2}kT, \qquad l = \hbar\pi\sqrt{\frac{2n+1}{3mkT}}.$$

Ответ $l = \hbar\pi\sqrt{\dfrac{2n+1}{3mkT}}$.

6.104 Докажите, что энергия свободных электронов в металле не квантуется. Примите, что ширина l прямоугольной “потенциальной ямы” с бесконечно высокими “ стенками” для электрона в металле составляет 10 см.

Дано

$m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг

$l = 10$ см $= 0{,}1$ м

ΔE_n — ?

Решение

$$E_n = n^2\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2},$$

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \left[(n+1)^2 - n^2\right]\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} =$$

$$= (2n+1)\frac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2} \approx n\frac{\pi^2\hbar^2}{ml^2}.$$

Ответ $\Delta E_n \approx 0{,}75n\cdot10^{-16}$ эВ.

6.105

Частица находится в одномерной прямоугольной "потенциальной яме" с бесконечно высокими "стенками". Определите, во сколько раз изменяется отношение разности соседних энергетических уровней $\Delta E_{n+1,n}/E_n$ частицы при переходе от $n=3$ к $n'=8$. Объясните физическую сущность полученного результата.

Дано	*Решение*
$n=3$ $n'=8$	$E_n = n^2\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$, $\Delta E_{n+1,n} = E_{n+1} - E_n = (2n+1)\dfrac{\pi^2\hbar^2}{2ml^2}$,
$\dfrac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n}$ — ? $n \to n'$	$\dfrac{\Delta E_{n+1,n}}{E_n} = \dfrac{2n+1}{n^2}$, $\dfrac{\Delta E_{n'+1,n'}}{E_{n'}} = \dfrac{2n'+1}{(n')^2}$.

Вычисления:

$\boxed{n=3}$ $\quad \dfrac{\Delta E_{4,3}}{E_3} = \dfrac{7}{9} = 0{,}78$.

$\boxed{n'=8}$ $\quad \dfrac{\Delta E_{9,8}}{E_8} = \dfrac{16}{64} = 0{,}26$.

Ответ Уменьшается в 3 раза.

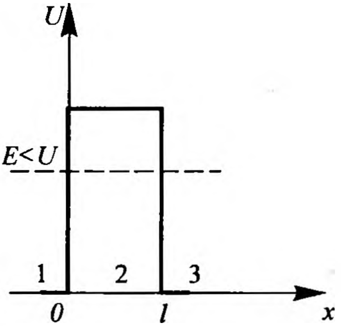
6.106

Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой U и конечной шириной l, причем $E<U$. Запишите уравнение Шредингера для областей *1*, *2* и *3*.

1) $\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k_1^2\psi_1 = 0$, $\qquad k_1^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}E$.

2) $\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + q^2\psi_2 = 0$, $\qquad q^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}(E-U)$.

3) $\dfrac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + k_3^2\psi_3 = 0$, $\qquad k_3^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}E$.



6.107 Для условия задачи 6.106 запишите решения уравнений Шредингера для областей *1*, *2* и *3*. ψ-Функция обычно нормируется так, что $A_1 = 1$. Представьте графически качественный вид ψ-функций.

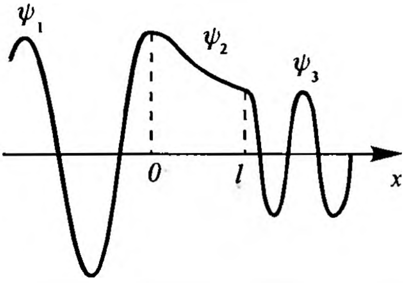
1) $\psi_1 = e^{ik_1x} + B_1\, e^{-ik_1x}$.

2) $\psi_2 = A_2\, e^{-\beta x} + B_2\, e^{\beta x}$.

3) $\psi_3 = A_3\, e^{ik_3x}$.

$$k_1 = k_3 = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}, \quad \beta = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar},$$

$$A_1 = 1, \qquad B_3 = 0.$$



6.108 Электрон с энергией $E = 5$ эВ движется в положительном направлении оси x, встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 0{,}1$ нм. Определите коэффициент D прозрачности потенциального барьера.

Дано	*Решение*
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-34}$ кг $E = 5$ эВ $= 8 \cdot 10^{-19}$ Дж $U = 10$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ Дж $l = 0{,}1$ нм $= 10^{-10}$ м D — ?	$D = \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m(U-E)}\right]$.

Ответ $D = 0{,}1$.

6.109 Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}1$ нм. Определите в электрон-вольтах разность энергий $U - E$, при которой вероятность прохождения электрона сквозь барьер составит 0,5.

Ответ $(U - E) = 0{,}454$ эВ.

6.110 Протон с энергией $E = 5$ эВ движется в положительном направлении оси x, встречая на своем пути прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 10$ эВ и шириной $l = 0{,}1$ нм. Определите вероятность прохождения протоном этого барьера. Во сколько раз надо сузить барьер, чтобы вероятность прохождения его протоном была такой же, как для электрона при вышеприведенных условиях.

Дано

$m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг

$E = 5$ эВ $= 8 \cdot 10^{-19}$ Дж

$U = 10$ эВ $= 1{,}6 \cdot 10^{-18}$ Дж

$l = 0{,}1$ нм $= 10^{-10}$ м

$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

W_p — ?

$\dfrac{l}{l'}$ — ?

Решение

$$W_p = D = \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_p(U-E)}\right],$$

$$W_e = \exp\left[-\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_e(U-E)}\right],$$

$$W'_p = W_e = \exp\left[-\frac{2l'}{\hbar}\sqrt{2m_p(U-E)}\right],$$

$$-\frac{2l'}{\hbar}\sqrt{2m_p(U-E)} = -\frac{2l}{\hbar}\sqrt{2m_e(U-E)},$$

$$\frac{l}{l'} = \sqrt{\frac{m_p}{m_e}}.$$

Ответ $W_p = 1{,}67 \cdot 10^{-43}$; $\dfrac{l}{l'} = 42{,}8$.

6.111 Прямоугольный потенциальный барьер имеет ширину $l = 0{,}1$ нм. Разность между высотой потенциального барьера и энергией движущегося в положительном направлении оси x электрона $U - E = 5$ эВ. Определите, во сколько раз изменится коэффициент прозрачности D потенциального барьера для электрона, если разность $U - E$ возрастает в 4 раза.

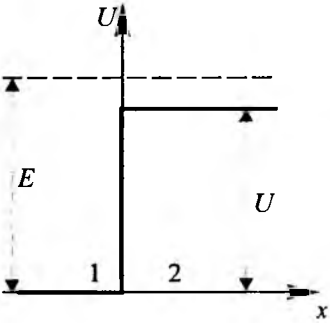
Ответ $\dfrac{D_1}{D_2} = 10$.

6.112 Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, причем $E > U$. Запишите уравнение Шредингера для областей *1* и *2*.

Ответ

1) $\dfrac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k_1^2\psi_1 = 0$, $\quad k_1^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}E$;

2) $\dfrac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + k_2^2\psi_2 = 0$, $\quad k_2^2 = \dfrac{2m}{\hbar^2}(E-U)$.



6.113 Для условия задачи 6.112 запишите решение уравнений Шредингера для областей *1* и *2*. ψ-Функция обычно нормируется так, что $A_1 = 1$. Представьте графически качественный вид ψ-функций.

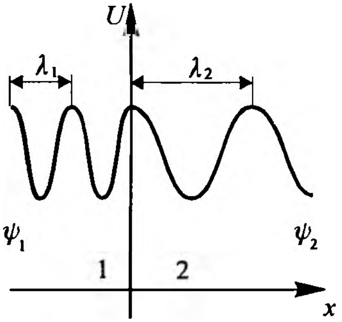
Ответ

1) $\psi_1(x) = \mathrm{e}^{ik_1x} + B_1\,\mathrm{e}^{-ik_1x}$,

$k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$;

2) $\psi_2(x) = A_2\,\mathrm{e}^{ik_2x}$, $\quad B_2 = 0$,

$k_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$.



6.114 Частица с энергией $E = 10$ эВ движется в положительном направлении оси x, встречая на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 5$ эВ. Определите коэффициент преломления n волн де Бройля на границе потенциального барьера.

Дано	Решение
$E = 10$ эВ $U = 5$ эВ	1) $\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + k_1^2\psi_1 = 0$, $\quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$;
n — ?	2) $\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + k_2^2\psi_2 = 0$, $\quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$.

$$n = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{E-U}{E}}.$$

Ответ $n = 0{,}707$.

6.115 Электрон с длиной волны де Бройля $\lambda_1 = 100$ пм, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 100$ эВ. Определите длину волны де Бройля после прохождения барьера.

Ответ $\lambda_2 = \frac{\lambda_1}{\sqrt{(E-U)/E}} = 172$ пм.

6.116 Частица с энергией $E = 50$ эВ, двигаясь в положительном направлении оси x, встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 20$ эВ. Определите вероятность отражения частицы от этого барьера.

Дано	Решение
$E = 50$ эВ $U = 20$ эВ	$W = R = \left\|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right\|^2$, $\quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\quad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$,
W — ?	$E > U$, $\quad k_1 > k_2$,

$$W = \frac{(\sqrt{E} - \sqrt{E-U})^2}{(\sqrt{E} + \sqrt{E-U})^2}.$$

Ответ $W = 0.016$.

6.117 Частица массой $m = 10^{-19}$ кг, двигаясь в положительном направлении оси x со скоростью $\upsilon = 20$ м/с, встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 100$ эВ. Определите коэффициент отражения R волн де Бройля на границе потенциального барьера.

Дано	***Решение***
$m = 10^{-19}$ кг $\upsilon = 20$ м/с $U = 100$ эВ R — ?	$E = T = \dfrac{m\upsilon^2}{2}$, $k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\quad k_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$,

$$R = \left|\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left|\frac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}}\right|^2 .$$

Вычисления:

$$E = \frac{10^{-19} \cdot (20\ \text{м/с})^2}{2} = 2 \cdot 10^{-17}\ \text{Дж} = 125\ \text{эВ}. \qquad \boxed{E > U}$$

$$R = \left|\frac{\sqrt{125} - \sqrt{25}}{\sqrt{125} + \sqrt{25}}\right|^2 = 0{,}146 .$$

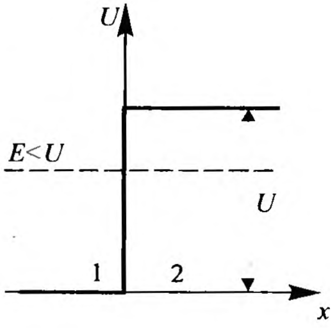
Ответ $R = 0{,}146$.

6.118 Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, причем $E < U$. Запишите уравнение Шредингера для областей *1* и *2*.

1) $\dfrac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + k_1^2 \psi_1 = 0$, $\qquad k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$;

2) $\dfrac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + k_2^2 \psi_2 = 0$, $\qquad k_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$;

$\boxed{E < U}$ $\quad k_2 = i\beta$, $\qquad \beta = \dfrac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$.

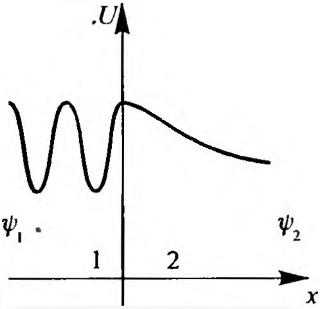


6.119 Для условия задачи 6.118 запишите решение уравнений Шредингера для областей *1* и *2*. ψ-Функция обычно нормируется так, что $A_1 = 1$. Представьте графически качественный вид ψ-функций.

1) $\psi_1 = e^{ik_1x} + B_1 e^{-ik_1x}$, $\quad k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$;

2) $\psi_2 = A_2 e^{-\beta x}$,

$\beta = \dfrac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$, $\quad \boxed{B_2 = 0}$



6.120 Электрон с длиной волны λ де Бройля, равной 120 пм, движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой $U = 200$ эВ. Определите коэффициент отражения R волн де Бройля на границе потенциального барьера.

Дано

$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

$\lambda = 120$ пм $= 1{,}2 \cdot 10^{-10}$ м

$U = 200$ эВ

R — ?

Решение

$R = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2$, $\qquad p = \dfrac{h}{\lambda}$,

$E = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{h^2}{2m\lambda^2}$ (см. рисунок к задаче 6.118),

$k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\qquad k_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$, $\qquad R = \left|\dfrac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left|\dfrac{\sqrt{E} - \sqrt{E-U}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}}\right|^2$.

Вычисления:

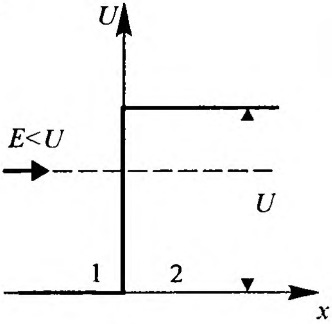
$$E = \frac{(6{,}63 \cdot 10^{-34}\ \text{Дж} \cdot \text{с})^2}{2 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\ \text{кг} \cdot (1{,}2 \cdot 10^{-10}\ \text{м})^2} = 1{,}67 \cdot 10^{-17}\ \text{Дж} \approx 100\ \text{эВ}. \qquad \boxed{E < U}$$

$$R = \left|\frac{\sqrt{100} - \sqrt{100-200}}{\sqrt{100} + \sqrt{100-200}}\right|^2 = \left|\frac{1-i}{1+i}\right|^2 = 1.$$

Ответ $R = 1$.

6.121 Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный барьер высотой U, причем $E < U$. Принимая $A_1 = 1$ (как это обычно делается) и используя условия непрерывности волновой функции и ее первой производной на границе областей *1* и *2*, определите плотность вероятности $|\psi_2(0)|^2$ обнаружения частицы в точке $x = 0$ области *2*.

Дано	*Решение*
$E < U$ $A_1 = 1$ $\psi_1(0) = \psi_2(0)$ $\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$ $\lvert\psi_2(0)\rvert^2$ — ?	$\psi_1(x) = \mathrm{e}^{ik_1x} + B_1\,\mathrm{e}^{-ik_1x}$, $\quad k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\psi_2(x) = A_2\,\mathrm{e}^{ik_2x}$, $\quad k_2 = \dfrac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar}$, $\psi_1'(x) = ik_1\,\mathrm{e}^{ik_1x} + B_1(-ik_1)\,\mathrm{e}^{-ik_1x}$, $\psi_2'(x) = A_2(ik_2)\,\mathrm{e}^{ik_2x}$,



$$\psi_1(0) = 1 + B_1, \qquad \psi_2(0) = A_2,$$

$$\psi_1'(0) = ik_1 - ik_1B_1, \quad \psi_2'(0) = ik_2A_2,$$

$$1 + B_1 = A_2, \qquad k_1 - k_1B_1 = k_2A_2,$$

$$B_1 = A_2 - 1, \qquad k_1 - (A_2 - 1)k_1 = k_2A_2,$$

$$2k_1 = (k_1 + k_2)A_2, \qquad A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2},$$

$$|\psi_2(0)|^2 = |A_2|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right|^2 = \left|\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + \sqrt{E-U}}\right|^2 = \left|\frac{2\sqrt{E}}{\sqrt{E} + i\sqrt{U-E}}\right|^2 =$$

$$= \frac{4E}{(\sqrt{E} + i\sqrt{U-E})(\sqrt{E} - i\sqrt{U-E})} = \frac{4E}{E + i\sqrt{U-E} - i\sqrt{U-E} + U - E} = \frac{4E}{U}.$$

Ответ $|\psi_2(0)|^2 = \dfrac{4E}{U}$.

6.122 Частица с энергией E движется в положительном направлении оси x и встречает на своем пути бесконечно широкий прямоугольный потенциальный барьер высотой U, причем $E < U$. Принимая $A_1 = 1$ (как это обычно делается) и используя условия непрерывности волновой функции и ее первой производной на границе областей *1* и *2*, определите плотность вероятности обнаружения частицы на расстоянии x от потенциального барьера.

Дано

$E < U$

$A_1 = 1$

$\psi_1(0) = \psi_2(0)$

$\psi_1'(0) = \psi_2'(0)$

$|\psi_2(x)|^2$ — ?

Решение

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar} E\psi_1 = 0, \qquad \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar}(E - U)\psi_2 = 0,$$

$$\psi_1(x) = e^{ik_1 x} + B_1\, e^{-ik_1 x}, \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar},$$

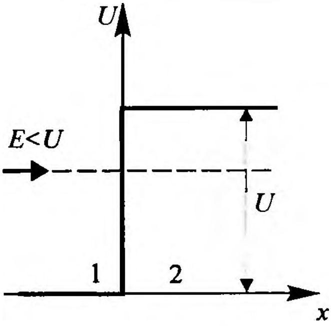
$$\psi_2(x) = A_2\, e^{ik_2 x}, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-U)}}{\hbar},$$

$$\boxed{\psi_1(0) = \psi_2(0)} \qquad 1 + B_1 = A_2,$$

$$\boxed{\psi_1'(0) = \psi_2'(0)} \qquad k_1 - B_1 k_1 = k_2 A_2,$$

$$A_2 = \frac{2k_1}{k_1 + k_2},$$

$$|\psi_2(x)|^2 = \left|A_2\, e^{ik_2 x}\right|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right|^2 e^{2ik_2 x},$$



$$k_2 = i\beta, \qquad \beta = \frac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}, \qquad |\psi_2(x)|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1 + i\beta}\right|^2 e^{-2\beta x}.$$

Ответ

$$|\psi_2(x)|^2 = \left|\frac{2k_1}{k_1 + i\beta}\right|^2 e^{-2\beta x},$$

где $k_1 = \dfrac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{2m(U-E)}}{\hbar}$.

6.123 Докажите, что волновая функция $\psi(x) = Ax\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$ может быть решением уравнения Шредингера для гармонического осциллятора, масса которого m и постоянная квазиупругой силы k. Определите собственное значение полной энергии осциллятора.

Дано

$\psi(x) = Ax\,\mathrm{e}^{-\frac{\sqrt{mk}}{2\hbar}x^2}$

m, k, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

E — ?

Решение

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar}\left(E - \frac{m\omega_0^2 x^2}{2}\right)\psi = 0, \qquad \frac{\sqrt{mk}}{2\hbar} = a\,,$$

$$\psi(x) = Ax\,\mathrm{e}^{-ax^2}, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial x} = A\,\mathrm{e}^{-ax^2} - 2aAx^2\,\mathrm{e}^{-ax^2},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -2aAx\,\mathrm{e}^{-ax^2} - 4aAx\,\mathrm{e}^{-ax^2} + 4a^2Ax^3\,\mathrm{e}^{-ax^2} = -6aAx\,\mathrm{e}^{-ax^2} + 4a^2Ax^3\,\mathrm{e}^{-ax^2},$$

$$-6aAx + 4a^2Ax^3 + \frac{2mEAx}{\hbar^2} - \frac{m^2\omega_0^2Ax^3}{\hbar^2} = 0,$$

$$-\frac{3\sqrt{mk}}{2\hbar} + \frac{2mk}{4\hbar^2}x^2 + \frac{mE}{\hbar^2} - \frac{m^2k}{m\cdot 2\hbar^2}x^2 = 0, \qquad \frac{mE}{\hbar^2} = \frac{3\sqrt{mk}}{2\hbar},$$

$$E = \frac{3\hbar\sqrt{mk}}{2m} = \frac{3}{2}\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{3}{2}\hbar\omega_0.$$

Ответ $E = \frac{3}{2}\hbar\omega_0$.

6.124 Частица массой m движется в одномерном потенциальном поле $U(x) = kx^2/2$ (гармонический осциллятор). Волновая функция, описывающая поведение частицы в основном состоянии, имеет вид $\psi(x) = A\,\mathrm{e}^{-ax^2}$, где A — нормировочный коэффициент; a — положительная постоянная. Используя уравнение Шредингера, определите: 1) постоянную a; 2) энергию частицы в этом состоянии.

Ответ 1) $a = \frac{m\omega_0}{2\hbar}$; 2) $E = \frac{\hbar\omega_0}{2}$, где $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

6.125 Объясните физический смысл существования энергии нулевых колебаний для квантового гармонического осциллятора. Зависит ли наличие нулевых колебаний от формы “потенциальной ямы”?

6.126 Математический маятник можно рассматривать в качестве гармонического осциллятора. Определите в электрон-вольтах энергию нулевых колебаний для маятника длиной $l = 1$ м, находящегося в поле тяготения Земли.

Дано	*Решение*
$l = 1$ м $g = 9{,}81$ м/с^2 E_0 — ?	$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega_0$, $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$,

$$E_0 = \frac{1}{2}\hbar\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Ответ $E_0 = 1{,}03 \cdot 10^{-15}$ эВ.

6.127 Рассматривая математический маятник массой $m = 100$ г и длиной $l = 0{,}5$ м в виде гармонического осциллятора, определите классическую амплитуду A маятника, соответствующую энергии нулевых колебаний этого маятника.

Ответ

$$A = \sqrt{\frac{\hbar\sqrt{\frac{l}{g}}}{m}} = 1{,}54 \cdot 10^{-17} \text{ м}.$$

6.3. Элементы современной физики атомов и молекул

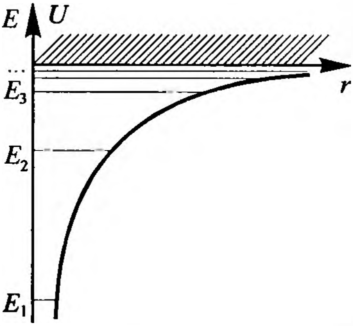
6.128 Представьте: 1) уравнение Шредингера для стационарных состояний электрона, находящегося в атоме водорода; 2) собственные значения энергии, удовлетворяющие уравнению; 3) график потенциальной энергии взаимодействия электрона с ядром; 4) возможные дискретные значения энергии на этом графике.

Ответ

1) $\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E-U)\psi = 0$, $\quad U = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$.

2) $E_n = -\frac{1}{n^2}\frac{me^4}{8h^2\varepsilon_0^2}$, $\quad n = 1, 2, 3, \dots$

3), 4) см. рисунок.



6.129 Как известно, уравнению Шредингера, описывающему атом водорода, удовлетворяют собственные функции $\psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi)$, определяемые тремя квантовыми числами: главным n, орбитальным l и магнитным m_l. Объясните физический смысл указанных квантовых чисел и запишите их возможные значения.

6.130 Волновая функция $\psi_{nlm_l}(r, \vartheta, \varphi)$, описывающая атом водорода, определяется главным квантовым числом n, орбитальным квантовым числом l и магнитным квантовым числом m_l. Определите, чему равно число различных состояний, соответствующих данному n.

Ответ n^2.

6.131 Запишите возможные значения орбитального квантового числа l и магнитного квантового числа m_l для главного квантового числа $n = 4$.

Ответ $n = 4$, $l = 0$, $m_l = 0$. $l = 1$, $m_l = 0, \pm 1$.
$l = 2$, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$. $l = 3$, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$.

6.132 Определите, сколько различных волновых функций соответствует главному квантовому числу $n = 3$.

Ответ $n = 3$; 9 различных волновых функций (без учета спина).

6.133 Учитывая число возможных состояний, соответствующих данному главному квантовому числу n, а также правила отбора, представьте на энергетической диаграмме спектральные линии атома водорода, образующие серии Лаймана и Бальмера.

6.134 Покажите возможные энергетические уровни атома с электроном в состоянии с главным квантовым числом $n = 6$, если атом помещен во внешнее магнитное поле.

6.135 Постройте и объясните диаграмму, иллюстрирующую расщепление энергетических уровней и спектральных линий (с учетом правил отбора) при переходах между состояниями с $l = 2$ и $l = 1$.

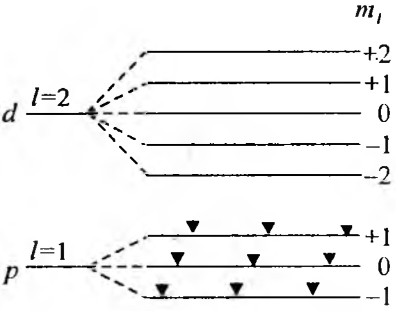
Ответ

p-состояние $l = 1$, $m_l = 0, \pm 1$.

d-состояние $l = 2$, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$.

$\Delta l = \pm 1$.

$\Delta m_l = 0, \pm 1$.



6.136 Постройте и объясните диаграмму, иллюстрирующую расщепление энергетических уровней и спектральных линий при переходах между состояниями с $l = 1$ и $l = 0$.

6.137 Волновая функция, описывающая 1s-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi(r) = C\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где r — расстояние электрона от ядра, a — первый боровский радиус. Определите нормированную волновую функцию, отвечающую этому состоянию.

Дано	***Решение***
$\psi(r) = C\,\mathrm{e}^{-r/a}$ $a = \mathrm{const}$	$\int\limits_V \lvert\psi\rvert^2\,\mathrm{d}V = 1,$
$\psi_{100}(r)$ — ?	$\mathrm{d}V = 4\pi r^2\,\mathrm{d}r,$

$$\int\limits_0^\infty \lvert\psi\rvert^2\,\mathrm{d}V = \int\limits_0^\infty C^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 4\pi C^2 \int\limits_0^\infty r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r = 4\pi C^2 \frac{2!}{\left(\frac{2}{a}\right)^3},$$

$$\frac{4\pi C^2\cdot 2a^3}{2^3} = 1, \qquad C = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}, \qquad \psi_{100}(r) = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-r/a}.$$

Ответ $\psi_{100}(r) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-r/a}$.

6.138 Предполагая, что нормированная волновая функция, описывающая 1s-состояние электрона в атоме водорода, известна (см. задачу 6.137), определите среднее значение функции $1/r$, принимая во внимание, что $\left\langle \dfrac{1}{r} \right\rangle = \int\limits_0^\infty \dfrac{1}{r}\psi^*\psi\,\mathrm{d}V$.

Ответ $\left\langle \dfrac{1}{r} \right\rangle = \dfrac{1}{a}$.

6.139 Нормированная волновая функция, описывающая 1*s*-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где a — первый боровский радиус. Определите: 1) вероятность $\mathrm{d}W$ обнаружения электрона на расстоянии от r до $r+\mathrm{d}r$ от ядра; 2) расстояния от ядра, на которых электрон может быть обнаружен с наибольшей вероятностью.

Ответ 1) $\mathrm{d}W=\frac{4}{a^3}r^2\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r$; 2) $r=a$.

6.140 Нормированная волновая функция, описывающая 1*s*-состояние электрона в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-r/a}$, где a — первый боровский радиус. Определите среднюю потенциальную энергию электрона в поле ядра.

Дано

$\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}\,\mathrm{e}^{-r/a}$

$a=\mathrm{const}$

$\langle U\rangle$ — ?

Решение

$$U=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

$$\langle U\rangle=\int_V U\psi^*\psi\,\mathrm{d}V, \qquad \mathrm{d}V=4\pi r^2\,\mathrm{d}r.$$

$$\langle U\rangle=\int_0^\infty\left(-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right)\frac{1}{\pi a^3}\,\mathrm{e}^{-2r/a}\cdot 4\pi r^2\,\mathrm{d}r=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{a^3}\int_0^\infty r\,\mathrm{e}^{-2r/a}\,\mathrm{d}r=$$

$$=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{a^3}\frac{1!}{\left(\frac{2}{a}\right)^2}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{4}{a^3}\frac{a^2}{4}=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}.$$

Ответ $\langle U\rangle=-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}$.

6.141 Нормированная волновая функция, описывающая 1s-состояние в атоме водорода, имеет вид $\psi_{100}(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi a^3}}e^{-r/a}$, где a — первый боровский радиус. Определите среднее значение модуля кулоновской силы, действующей на электрон.

Ответ $\langle F\rangle=\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$.

6.142 Электрон в атоме находится в f-состоянии. Определите возможные значения (в единицах $\hbar$) проекции момента импульса L_{lz} орбитального движения электрона в атоме на направление внешнего магнитного поля.

Ответ $L_{lz}=0,\ \pm\hbar,\ \pm2\hbar,\ \pm3\hbar$.

6.143 Электрон в атоме находится в d-состоянии. Определите: 1) момент импульса (орбитальный) L_l электрона; 2) максимальное значение проекции момента импульса $(L_{lz})_{\max}$ на направление внешнего магнитного поля.

Дано	Решение
d-состояние $l=2$ 1) L_l — ? 2) $L_{lz\max}$ — ?	$L_l=\hbar\sqrt{l(l+1)}$, $l=2$, $L_l=\hbar\sqrt{6}$, $m_l=0,\ \pm1,\ \pm2$, $m_{l\max}=2$, $L_{lz}=\hbar m_l$, $L_{lz\max}=2\hbar$.

Ответ 1) $L_l=2{,}45\hbar$; 2) $L_{lz\max}=2\hbar$.

6.144 Определите, во сколько раз орбитальный момент импульса L_l электрона, находящегося в f-состоянии, больше, чем для электрона в p-состоянии.

Дано	*Решение*
f, $l=3$ p, $l=1$	$L_l=\hbar\sqrt{l(l+1)}$, $\quad L_l^f=\hbar\sqrt{3(3+1)}=\hbar\sqrt{12}$,
$\dfrac{L_l^f}{L_l^p}$ — ?	$L_l^p=\hbar\sqrt{1(1+1)}=\hbar\sqrt{2}$, $\quad \dfrac{L_l^f}{L_l^p}=\dfrac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}=\sqrt{6}$.

Ответ $\dfrac{L_l^f}{L_l^p}=2{,}45$.

6.145 1s электрон атома водорода, поглотив фотон с энергией $E=12{,}1$ эВ, перешел в возбужденное состояние с максимально возможным орбитальным квантовым числом. Определите изменение момента импульса ΔL_l орбитального движения электрона.

Дано	*Решение*
$1s$, $l_1=0$ $E=12{,}1$ эВ $=$ $=1{,}94\cdot10^{-18}$ Дж $l_2=l_{\max}$	$\boxed{1s}$ $\quad l_1=0$, $\quad L_l=\hbar\sqrt{l(l+1)}$, $\quad L_{l1}=0$, $E=hR\left(\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{n^2}\right)$, $\quad n=\sqrt{\dfrac{hR}{hR-E}}$, $l=0,1,2,\ldots,(n-1)$, $\quad l_2=l_{\max}=n-1$,
ΔL_l — ?	$L_{l_{\max}}=\hbar\sqrt{(n-1)n}$, $\quad \Delta L_l=L_{l_{\max}}-L_{l1}=\hbar\sqrt{(n-1)n}$.

Ответ $\Delta L_l=2{,}57\cdot10^{-34}$ Дж · с.

6.146 Объясните, почему в опыте Штерна и Герлаха по обнаружению собственного механического момента импульса (спина) электрона использовался пучок атомов водорода, заведомо находящихся в 1s-состоянии.

6.147 Объясните, почему в опыте Штерна и Герлаха по обнаружению собственного механического момента импульса (спина) электрона использовалось неоднородное магнитное поле.

6.148 Определите числовое значение: 1) собственного механического момента импульса (спина) L_s; 2) проекции спина L_{sz} на направление внешнего магнитного поля.

1) $L_s = \hbar\sqrt{s(s+1)}$, $s = \frac{1}{2}$, $L_s = \hbar\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)} = \hbar\sqrt{\frac{3}{4}} = 9{,}09\cdot 10^{-35}$ Дж · с;

2) $L_{sz} = \hbar m_s$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$, $L_{sz} = \pm\hbar\cdot\frac{1}{2} = \pm 5{,}25\cdot 10^{-35}$ Дж · с.

6.149 Объясните, что лежит в основе классификации частиц на фермионы и бозоны, а также которые из них описываются симметричными волновыми функциями.

6.150 Исходя из принципа неразличимости тождественных частиц, дайте определение симметричной и антисимметричной волновой функций. Объясните, почему изменение знака волновой функции не влечет за собой изменение состояния.

6.151 Учитывая принцип Паули, определите максимальное число электронов, находящихся в состояниях, определяемых данным главным квантовым числом.

Ответ $l = 0, 1, 2, 3, \ldots, (n-1)$,

$m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm l$,

$m_s = \pm\frac{1}{2}$,

$$N = \sum_{l=0}^{n-1} 2(2l+1) = 2n^2 .$$

6.152 Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 3$. Определите число электронов на этой оболочке, которые имеют одинаковые квантовые числа: 1) $m_s = -1/2$; 2) $m_l = 0$; 3) $m_l = -1$, $m_s = 1/2$.

Дано	*Решение*
$n = 3$	$l = 0$, $m_l = 0$, $\qquad m_s = \pm\frac{1}{2}$;
1) $m_s = -1/2$, N — ? 2) $m_l = 0$, N — ?	$l = 1$, $m_l = 0, \pm 1$, $\qquad m_s = \pm\frac{1}{2}$;
3) $m_l = -1$, $m_s = 1/2$, N — ?	$l = 2$, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2$, $\qquad m_s = \pm\frac{1}{2}$.

Ответ 1) $m_s = -\frac{1}{2}$, $N = 9$;

2) $m_l = 0$, $N = 6$;

3) $m_l = -1$, $m_s = \frac{1}{2}$, $N = 2$.

6.153 Заполненной электронной оболочке соответствует главное квантовое число $n = 4$. Определите число электронов на этой оболочке, которые имеют одинаковые квантовые числа: 1) $m_l = -3$; 2) $m_s = 1/2$, $l = 2$; 3) $m_s = -1/2$, $m_l = 1$.

Ответ 1) 2; 2) 5; 3) 3.

6.154 Определите суммарное максимальное число s-, p-, d-, f- и g-электронов, которые могут находиться на N- и O-оболочках атома.

Ответ 82.

6.155 Запишите квантовые числа, определяющие внешний, или валентный, электрон в основном состоянии атома натрия.

Ответ $\boxed{11\ \mathrm{Na}}$ $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s$.

Валентный электрон: $n=3$, $l=0$, $m_l=0$, $m_s=\pm\frac{1}{2}$.

6.156 Пользуясь периодической системой элементов Д. И. Менделеева, запишите символически электронную конфигурацию следующих атомов в основном состоянии: 1) неон; 2) аргон; 3) криптон.

Ответ $\boxed{10\ \mathrm{Ne}}$ $1s^2\ 2s^2\ 2p^6$.

$\boxed{18\ \mathrm{Ar}}$ $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6$.

$\boxed{36\ \mathrm{Kr}}$ $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s^2\ 4p^6$.

6.157 Пользуясь периодической системой элементов Д. И. Менделеева, запишите символически электронную конфигурацию атома меди в основном состоянии.

6.158 Пользуясь периодической системой элементов Д. И. Менделеева, запишите символически электронную конфигурацию атома цезия в основном состоянии.

6.159 Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p$. Определите, что это за элемент.

6.160 Электронная конфигурация некоторого элемента $1s^2\ 2s^2\ 2p^6\ 3s^2\ 3p^6\ 3d^{10}\ 4s$. Определите, что это за элемент.

6.161 Определите в периодической системе элементов Д. И. Менделеева порядковый номер, у которого заполнены K, L, M-оболочки, а также $4s$-подоболочка.

6.162 Объясните: 1) почему тормозной рентгеновский спектр является сплошным; 2) почему сплошной рентгеновский спектр имеет резкую границу со стороны коротких волн и чем определяется ее положение.

6.163 Определите наименьшую длину волны рентгеновского излучения, если рентгеновская трубка работает при напряжении $U = 150$ кВ.

Дано	**Решение**
$U = 150\ \text{кВ} = 1{,}5\cdot10^5\ \text{В}$	$E_{\max} = h\nu_{\max} = eU$, $\qquad \lambda_{\min} = \dfrac{c}{\nu_{\max}} = \dfrac{ch}{eU}$.
$\lambda_{\min}$ — ?	**Ответ** $\lambda_{\min} = 8{,}29$ пм.

6.164 Минимальная длина волны рентгеновских лучей, полученных от трубки, работающей при напряжении $U = 60$ кВ, равна 20,7 пм. Определите по этим данным постоянную Планка.

Ответ $h = 6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж · с.

6.165 Определите длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если скорость v электронов, бомбардирующих анод рентгеновской трубки, составляет $0{,}8c$.

Дано	**Решение**
$v = 0{,}8c$ $m = 9{,}11\cdot10^{-31}$ кг	$eU = T$, $\qquad T = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$,
$\lambda_{\min}$ — ?	$eU = \dfrac{hc}{\lambda_{\min}}$, $\qquad \dfrac{hc}{\lambda_{\min}} = mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)$,

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{mc^2\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)} = \frac{h}{mc\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}-1\right)}.$$

Ответ $\lambda_{\min} = 3{,}64$ пм.

6.166 Определите длину волны коротковолновой границы сплошного рентгеновского спектра, если при увеличении напряжения на рентгеновской трубке в два раза она изменилась на 50 пм.

Дано	*Решение*
$U_2 = 2U_1$ $\Delta\lambda = 50$ пм $= 5 \cdot 10^{-11}$ м	$\lambda_2 = \lambda_1 - \Delta\lambda$, $\quad eU_1 = \dfrac{hc}{\lambda_1}$, $\quad eU_2 = \dfrac{hc}{\lambda_2}$,
λ_1 — ?	$U_2 = 2U_1$, $\quad \dfrac{hc}{\lambda_1 - \Delta\lambda} = \dfrac{2hc}{\lambda_1}$,

$$2(\lambda_1 - \Delta\lambda) = \lambda_1, \qquad \lambda_1 = 2\,\Delta\lambda .$$

Ответ $\lambda_1 = 100$ пм.

6.167 Определите порядковый номер элемента в периодической системе элементов Д. И. Менделеева, если граничная частота K-серии характеристического рентгеновского излучения составляет $5{,}55 \cdot 10^{18}$ Гц.

Дано	*Решение*
$\nu_\infty = 5{,}55 \cdot 10^{18}$ Гц K-серия $\sigma = 1$	$\nu = R(Z-\sigma)^2\left(\dfrac{1}{m^2} - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $\quad n = \infty$, $\quad m = 1$,
Z — ?	$\nu_\infty = R(Z-1)^2 \dfrac{1}{m^2}\Big\|_{m=1} = R(Z-1)^2$, $\quad Z = \sqrt{\dfrac{\nu_\infty}{R}} + 1$.

Ответ $Z = 42$, молибден.

6.168 Определите длину волны самой длинноволновой линии K-серии характеристического рентгеновского спектра, если анод рентгеновской трубки изготовлен из платины. Постоянную экранирования принять равной единице.

Ответ $\lambda = 20{,}4$ пм.

6.169 Определите порядковый номер элемента в периодической системе элементов Д. И. Менделеева, если длина волны λ линии K_α характеристического рентгеновского излучения составляет 72 пм.

Дано

K_α -линия

$\sigma = 1$

$\lambda = 72$ пм $= 7{,}2 \cdot 10^{-11}$ м

Z — ?

Решение

$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right), \qquad R' = 1{,}1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1},$$

$$m = 1, \quad n = 2, \qquad \frac{1}{\lambda} = R'(Z-1)^2\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2}\right),$$

$$(Z-1)^2 = \frac{4}{3R'\lambda}, \qquad Z = \sqrt{\frac{4}{3R'\lambda}} + 1.$$

Ответ $Z = 42$, молибден.

6.170 Определите постоянную экранирования σ для L-серии рентгеновского излучения, если при переходе электрона в атоме вольфрама с M-оболочки на L-оболочку длина волны λ испущенного фотона составляет 140 пм.

Дано

$Z = 74$

L_α

$\lambda = 140$ пм $= 1{,}4 \cdot 10^{-10}$ м

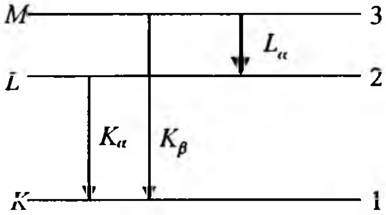
L_α -линия

σ — ?

Решение

L_α -линия:

$m = 2$, $n = 3$,



$$\frac{1}{\lambda} = R'(Z-\sigma)^2\left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2}\right), \qquad (Z-\sigma)^2 = \frac{36}{5R'\lambda}, \qquad \sigma = Z - \sqrt{\frac{36}{5R'\lambda}}.$$

Ответ $\sigma = 5{,}63$.

6.171 В атоме вольфрама электрон перешел с M-оболочки на L-оболочку. Принимая постоянную экранирования $\sigma = 5{,}63$, определите энергию испущенного фотона.

Ответ $E = 8{,}88$ кэВ.

6.172 Известно, что в спектре комбинационного рассеяния помимо несмещенной спектральной линии возникают стоксовы (или красные) и антистоксовы (или фиолетовые) спутники. Объясните механизм их возникновения и их свойства.

6.173 Объясните механизм возникновения, свойства и особенности вынужденного (индуцированного) излучения.

6.174 Объясните, почему для создания состояний с инверсией населенностей необходима накачка.

6.175 Объясните, почему активные среды, используемые в оптических квантовых генераторах, рассматриваются в качестве сред с отрицательным коэффициентом поглощения.

6.176 Объясните, какие три компонента обязательно содержит оптический квантовый генератор (лазер) и каково их назначение.

6.177 Перечислите и прокомментируйте основные свойства лазерного излучения.

6.4. Элементы квантовой статистики

6.178 Объясните отличие бозе-газа от ферми-газа, а также обоих этих газов от классического газа.

6.179 Покажите, что при очень малом параметре вырождения распределения Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака переходят в распределение Максвелла—Больцмана.

Ответ $A = e^{\mu/(kT)} \ll 1.$

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} \pm 1} = \frac{1}{e^{E_i/(kT)} \cdot e^{-\mu/(kT)} \pm 1} = \frac{1}{e^{E_i/(kT)} \cdot \frac{1}{A} \pm 1} =$$

$$= \frac{A}{e^{E_i/(kT)} \pm A} \approx A\, e^{-E_i/(kT)}.$$

6.180 Пользуясь распределениями Бозе—Эйнштейна и Ферми—Дирака, получите распределение Максвелла—Больцмана.

6.181 Объясните, при каких условиях к электронам в металле применима: 1) классическая статистика; 2) квантовая статистика.

6.182 Объясните, при каких условиях можно применять статистику Максвелла—Больцмана к электронам в металле. Пользуясь распределением Ферми—Дирака, получите распределение Максвелла—Больцмана.

Ответ $\boxed{(E_i - \mu) \gg kT}$ $\quad e^{(E_i-\mu)/(kT)} \gg 1,$

$$\langle N_i \rangle = \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)} + 1} \approx \frac{1}{e^{(E_i-\mu)/(kT)}} = e^{-(E_i-\mu)/(kT)} = e^{\mu/(kT)} \cdot \text{[illegible]}^{E_i/(kT)} = A\, e^{-E_i/(kT)}.$$

6.183 Определите функцию распределения для электронов, находящихся на энергетическом уровне E для случая $E - E_F \ll kT$, пользуясь: 1) статистикой Ферми — Дирака; 2) статистикой Максвелла — Больцмана.

Дано	*Решение*
$E - E_F \ll kT$	**Статистика Ферми—Дирака**
$\langle N(E)\rangle$ — ?	$\langle N(E)\rangle = \left.\dfrac{1}{e^{E-E_F/(kT)}+1}\right\vert_{(E-E_F)\ll kT} = \dfrac{1}{2}$

Статистика Максвелла—Больцмана

$$\langle N(E)\rangle = A\,e^{-\frac{E}{kT}} = e^{\frac{E_F}{kT}}\cdot e^{-\frac{E}{kT}} = e^{-\frac{(E-E_F)}{kT}} = \left. e^{-\frac{(E-E_F)}{kT}}\right\vert_{(E-E_F)\ll kT} = 1.$$

6.184 Определите функцию распределения Ферми — Дирака при $T \neq 0$ K для электронов, находящихся на уровне Ферми. Объясните полученный результат.

Ответ $E = E_F$, $\langle N(E)\rangle = \dfrac{1}{e^{(E-E_F)/(kT)}+1} = \dfrac{1}{e^0+1} = \dfrac{1}{2}$.

6.185 Объясните физический смысл энергии Ферми.

6.186 Объясните, почему работа выхода электрона из металла следует отсчитывать от уровня Ферми, а не от дна “потенциальной ямы”, как это делается в классической теории.

6.187 Определите число свободных электронов, занимающих в среднем уровень энергии, равной энергии Ферми.

Ответ $n = 1$.

6.188 Объясните на основе квантовой теории отсутствие заметного отличия в теплоемкостях металлов и диэлектриков.

6.189 Объясните целесообразность введения фононов, а также перечислите их свойства.

6.190 Какая статистика описывает фононный газ? Почему?

6.191 Определите в электрон-вольтах максимальную энергию E фонона, который может возбуждаться в кристалле NaCl, характеризуемом температурой Дебая $T_D = 320$ К. Фотон какой длины волны λ обладал бы такой энергией?

Дано	*Решение*
NaCl $T_D = 320$ К	$E = kT_D$,
E — ? λ — ?	$E = h\nu = \dfrac{hc}{\lambda}$, $\lambda = \dfrac{hc}{E}$.

Ответ $E = 0{,}028$ эВ, $\lambda = 45$ мкм.

6.192 Сравните выражения для удельной электрической проводимости металла по классической и квантовой теории и объясните, чем отличаются они по физическому содержанию.

6.193 Объясните причину электрического сопротивления металлов с точки зрения квантовой теории электропроводности металлов.

6.5. Элементы физики твердого тела

6.194 Объясните различие энергетических состояний электронов в кристалле и в изолированном атоме.

6.195 Объясните образование зонного энергетического спектра в кристалле, показав, что этот эффект — квантово-механический и вытекает из соотношения неопределенности Гейзенберга.

6.196 Объясните, как изменится энергетический спектр валентных электронов, если число образующих кристалл атомов увеличить в 3 раза.

6.197 Объясните различие в электрических свойствах металлов, диэлектриков и полупроводников с точки зрения зонной теории твердого тела.

6.198 Объясните различие между диэлектриками и полупроводниками с точки зрения зонной теории твердого тела.

6.199 Объясните различие между металлами и диэлектриками с точки зрения зонной теории твердого тела.

6.200 Объясните механизм дырочной проводимости собственных полупроводников.

6.201 Объясните электрические свойства полупроводников с точки зрения зонной теории твердого тела. Как меняется с температурой сопротивление полупроводника — увеличивается или уменьшается? Почему?

6.202 Докажите, что уровень Ферми в собственном полупроводнике действительно расположен в середине запрещенной зоны.

Ответ $E_F = \dfrac{\Delta E}{2}$.

6.203 Германиевый образец нагревают от 0 до 17 °С. Принимая ширину запрещенной зоны германия $\Delta E = 0{,}72$ эВ, определите, во сколько раз возрастает его удельная проводимость.

Ответ $\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = 2{,}45$.

6.204 Определите ширину запрещенной зоны собственного полупроводника, если при температуре T_1 и T_2 ($T_2 > T_1$) его сопротивление соответственно равно R_1 и R_2.

Дано	Решение
$T_2 > T_1$ R_1, R_2 $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К ΔE — ?	$\gamma = \gamma_0\, e^{-\frac{\Delta E}{kT}}$, $\gamma = \dfrac{1}{\rho}$, $R \sim \rho$, $\gamma \sim \dfrac{1}{R}$, $\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} = \dfrac{R_1}{R_2}$,

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\exp[-\Delta E/(2kT_2)]}{\exp[-\Delta E/(2kT_1)]} = \exp\left[\frac{\Delta E}{2k}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right)\right] = \frac{R_1}{R_2},$$

$$\Delta E = 2k\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\ln\frac{R_1}{R_2}.$$

Ответ $\Delta E = 2k\dfrac{T_1 T_2}{T_2 - T_1}\ln\dfrac{R_1}{R_2}$.

6.205 Нарисуйте зонные схемы полупроводников *n*-типа и *p*-типа и объясните механизм их проводимости.

6.206 В чистый германий введена небольшая примесь мышьяка. Пользуясь периодической системой элементов Д. И. Менделеева, определите и объясните тип проводимости примесного германия.

6.207 В чистый кремний введена небольшая примесь бора. Пользуясь периодической системой элементов Д. И. Менделеева, определите и объясните тип проводимости примесного кремния.

6.208 Объясните и нарисуйте на зонной схеме положение уровня Ферми для электронного и дырочного полупроводников: 1) при 0 К; 2) при повышении температуры.

6.209 Пользуясь периодической системой элементов Д. И. Менделеева, объясните, какой проводимостью будет обладать германий, если в него ввести небольшую примесь: 1) алюминий; 2) фосфор.

6.210 Объясните с помощью зонной теории механизмы собственной и примесной фотопроводимости.

6.211 Объясните, каким образом удалось установить, что люминесцентное излучение не является тепловым.

6.212 Объясните, по какому признаку удалось установить, что излучение Вавилова—Черенкова не является люминесценцией.

6.213 Какие признаки лежат в основе деления люминесцентного излучения на разные его виды?

6.214 Объясните с помощью зонной теории механизм возникновения флуоресценции и фосфоресценции.

6.215 Объясните на основе зонной теории контакт двух металлов с различными работами выхода.

6.216 Чем объясняется при контакте двух металлов: 1) возникновение внешней контактной разности потенциалов? 2) возникновение внутренней контактной разности потенциалов?

6.217 Используя зонную схему, объясните механизм физических процессов, происходящих при контакте металла с полупроводником *n*-типа для случаев: 1) $A_м > A$; 2) $A_м < A$ ($A_м$ — работа выхода из металла; A — работа выхода из полупроводника).

6.218 Используя зонную схему, объясните механизм физических процессов, происходящих при контакте металла с полупроводником *p*-типа для случаев: 1) $A_м > A$; 2) $A_м < A$ ($A_м$ — работа выхода из металла; A — работа выхода из полупроводника).

6.219 Объясните, почему возникает запирающий контактный слой при контакте: 1) донорного полупроводника с металлом, если $A < A_м$; 2) акцепторного полупроводника с металлом, если $A > A_м$ ($A_м$ — работа выхода из металла; A — работа выхода из полупроводника).

6.220 Объясните механизм возникновения для контакта металл—полупроводник пропускного и запорного направлений (для тока).

6.221 Какое направление (и почему) при контакте металл—полупроводник является для тока пропускным, если: 1) внешнее и контактное поля по направлению совпадают; 2) внешнее и контактное поля по направлению противоположны?

6.222 Используя зонную схему, объясните механизм физических процессов, происходящих в *p-n*-переходе.

6.223 Какое направление (и почему) в *p-n*-переходе является для тока пропускным, если: 1) внешнее и контактное поля противоположны по направлению; 2) внешнее и контактное поля по направлению совпадают?

6.224 Объясните, в каком направлении не могут проходить через запирающий слой контакта полупроводников *n*- и *p*-типа: 1) свободные электроны; 2) дырки.

6.225 Объясните механизм односторонней (вентильной) проводимости *p-n*-перехода.

6.226 Объясните принцип устройства и действия полупроводникового триода (транзистора). Сравните работу транзистора и лампового триода.

7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

7.1. Элементы физики атомного ядра

7.1 Определите массу нейтрального атома ${}^{54}_{24}\mathrm{Cr}$.

Ответ $m = 8{,}64 \cdot 10^{-26}$ кг.

7.2 Объясните отличие изотопов и изобаров.

7.3 Определите, какую часть массы нейтрального атома ${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ ($m = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг) составляет масса его электронной оболочки.

Дано	*Решение*
${}^{12}_{6}\mathrm{C}$ $m = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	$Z = 6$, $\dfrac{Zm_e}{m} = \dfrac{6 \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}\text{ кг}}{19{,}9272 \cdot 10^{-27}\text{ кг}} = 2{,}74 \cdot 10^{-4}$.

$\dfrac{Zm_e}{m}$ – ?

Ответ $\dfrac{Zm_e}{m} = 2{,}74 \cdot 10^{-4}$.

7.4 Определите число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов бора 1) ${}^{9}_{5}\mathrm{B}$; 2) ${}^{10}_{5}\mathrm{B}$; 3) ${}^{11}_{5}\mathrm{B}$.

7.5 Определите число протонов и нейтронов, входящих в состав ядер трех изотопов кислорода: 1) ${}^{16}_{8}\mathrm{O}$; 2) ${}^{17}_{8}\mathrm{O}$; 3) ${}^{18}_{8}\mathrm{O}$.

7.6 Определите, пользуясь таблицей Менделеева, число нейтронов и протонов в атомах платины и урана.

Дано	Решение
Pt U	$\boxed{{}^{195}_{78}\mathrm{Pt}}$ $Z = 78$, $N = A - Z = 117$.
Z — ? N — ?	$\boxed{{}^{238}_{92}\mathrm{U}}$ $Z = 92$, $N = 146$.

7.7 Определите зарядовые числа ядер, массовые числа и символы ядер, которые получатся, если в ядрах ${}^{9}_{4}\mathrm{Be}$, ${}^{13}_{7}\mathrm{N}$, ${}^{23}_{11}\mathrm{Na}$ нейтроны заменить протонами, а протоны — нейтронами.

7.8 Определите плотность ядерного вещества, выражаемую числом нуклонов в 1 см³, если в ядре с массовым числом A все нуклоны плотно упакованы в пределах его радиуса.

Дано	Решение
A $V = 1\ \text{см}^3 = 10^{-6}\ \text{м}^3$ $R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м	$N = \dfrac{A}{V}$, $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$,
N — ?	$R = R_0 A^{1/3}$, $N = \dfrac{A}{\frac{4}{3}\pi R_0^3 A} = \dfrac{3}{4\pi R_0^3}$.

Ответ $N = 8{,}7 \cdot 10^{37}\ \text{см}^{-3}$.

7.9 Объясните, почему плотность ядерного вещества примерно одинакова для всех ядер.

7.10 Определите, что больше — масса атомного ядра или масса свободных нуклонов (протонов и нейтронов), входящих в его состав.

7.11

Определите, какая энергия в электрон-вольтах соответствует дефекту массы $\Delta m = 3 \cdot 10^{-20}$ мг.

Ответ $E = 16{,}9$ ГэВ.

7.12

Определите энергию связи ядра атома гелия ${}_2^4\mathrm{He}$. Масса нейтрального атома гелия равна $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано	*Решение*
${}_2^4\mathrm{He}$	$E_{\text{св}} = \left[Zm_H + (A-Z)m_n - m\right]c^2$,
$m_{He} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг	$Z = 2$, $A = 4$, $A - Z = 2$.
$m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг	
$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг	
$E_{\text{св}}$ — ?	

Ответ $E_{\text{св}} = 28{,}4$ МэВ.

7.13

Определите удельную энергию связи $\delta E_{\text{св}}$ (энергию связи, отнесенную к одному нуклону) для ядер: 1) ${}_2^4\mathrm{He}$; 2) ${}_6^{12}\mathrm{C}$. Массы нейтральных атомов гелия и углерода соответственно равны $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ и $19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано	*Решение*
1) ${}_2^4\mathrm{He}$	$E_{\text{св}} = \Delta mc^2$,
2) ${}_6^{12}\mathrm{C}$	$E_{\text{св}} = \left[Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_n - m\right]c^2$,
$\delta E_{\text{св}}$ — ?	$\delta E_{\text{св}} = \dfrac{\left[Zm_{\text{H}} + (A-Z)m_n - m\right]c^2}{A}$.

$m_{{}_2^4\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг. $m_{{}_6^{12}\mathrm{C}} = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг. $m_{\text{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг.

Ответ 1) $\delta E_{\text{св}} = 7{,}1$ МэВ/нуклон; 2) $\delta E_{\text{св}} = 7{,}7$ МэВ/нуклон.

7.14 Используя данные задачи 7.13, определите, какая необходима энергия, чтобы разделить ядро $^{12}_{6}\mathrm{C}$ на три альфа-частицы.

Ответ $E = 7{,}26$ МэВ.

7.15 Определите массу изотопа $^{15}_{7}\mathrm{N}$, если изменение массы при образовании ядра $^{15}_{7}\mathrm{N}$ составляет $0{,}2058 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано	***Решение***
$^{15}_{7}\mathrm{N}$	$\Delta m = Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - m$,
$\Delta m = 0{,}2058 \cdot 10^{-27}$ кг	$m = Zm_{\mathrm{H}} + (A - Z)m_n - \Delta m$,
m — ?	$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг, $\quad m_{\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг, $Z = 7$, $\quad A = 15$.

Ответ $m = 2{,}4909 \cdot 10^{-26}$ кг.

7.16 При отрыве нейтрона от ядра гелия $^{4}_{2}\mathrm{He}$ образуется ядро $^{3}_{2}\mathrm{He}$. Определите энергию связи, которую необходимо для этого затратить. Масса нейтральных атомов $^{4}_{2}\mathrm{He}$ и $^{3}_{2}\mathrm{He}$ соответственно равна $6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг и $5{,}0084 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано	***Решение***
$^{4}_{2}\mathrm{He}$	$E_{\text{св}} = \Delta mc^2 = \left\| m_{^{3}_{2}\mathrm{He}} + m_n - m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} \right\| c^2$.
$m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг	
$m_{^{3}_{2}\mathrm{He}} = 5{,}0084 \cdot 10^{-27}$ кг	
$E_{\text{св}}$ — ?	

Ответ $E_{\text{св}} = 0{,}3303 \cdot 10^{-11}$ Дж $= 20{,}64$ МэВ.

7.17

Энергия связи $E_{св}$ ядра, состоящего из трех протонов и четырех нейтронов, равна 39,3 МэВ. Определите массу m нейтрального атома, обладающего этим ядром.

Дано

$E_{св} = 39{,}3$ МэВ $= 6{,}288 \cdot 10^{-12}$ Дж

$Z = 3$

$N = 4$

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_H = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

m — ?

Решение

$$E_{св} = \left[Zm_H + (A - Z)m_n - m\right]c^2,$$

$$\frac{E_{св}}{c^2} = Zm_H + (A - Z)m_n - m,$$

$$m = Zm_H + (A - Z)m_n - \frac{E_{св}}{c^2}.$$

Ответ $m = 1{,}165 \cdot 10^{-26}$ кг.

7.18

Определите, какую долю кинетической энергии теряет нейтрон при упругом столкновении с покоящимся ядром углерода ${}^{12}_{6}C$, если после столкновения частицы движутся вдоль одной прямой. Массу нейтрального атома углерода принять равной $19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг.

Дано

n

${}^{12}_{6}C$

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_C = 19{,}9272 \cdot 10^{-27}$ кг

$\frac{\Delta T}{T}$ — ?

Решение

$$m_n v_n = m_n v'_n + m_C v'_C,$$

$$\frac{m_n v_n^2}{2} = \frac{m_n (v'_n)^2}{2} + \frac{m_C (v'_C)^2}{2},$$

$$\boxed{\text{удар упругий}} \quad v'_n = \frac{(m_n - m_C)v_n}{m_n + m_C}, \quad v'_C = \frac{2m_n v_n}{m_n + m_C},$$

$$\Delta T = \frac{m_C v_C'^2}{2}, \qquad T = \frac{m_n v_n^2}{2},$$

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{v'_C}{v_n}\right)^2 = \frac{m_C}{m_n}\left(\frac{2m_n}{m_n + m_C}\right)^2 = \frac{4m_n m_C}{(m_n + m_C)^2}.$$

Ответ $\frac{\Delta T}{T} = 0{,}286$.

7.19 Определите число нуклонов, которые могут находиться в ядре на низшем квантовом уровне.

Ответ $N = 4$.

7.20 Определите, во сколько раз магнетон Бора (единица магнитного момента электрона) больше ядерного магнетона (единица магнитного момента ядра).

Дано	**Решение**
$\frac{\mu_Б}{\mu_я}$ — ?	$\mu_Б = \frac{e\hbar}{2m_e}$, $\mu_я = \frac{e\hbar}{2m_p}$, $\frac{\mu_Б}{\mu_я} = \frac{m_p}{m_e}$.

Ответ $\frac{\mu_Б}{\mu_Я} = 1835$.

7.21 Охарактеризуйте свойства и особенности сил, действующих между составляющими ядро нуклонами.

7.22 Объясните принципы построения капельной и оболочечной моделей ядра.

7.23 Объясните, почему радиоактивные свойства элементов обусловлены только структурой их ядер.

7.24 Считая постоянную λ радиоактивного распада известной и используя закон радиоактивного распада, выведите выражение: 1) для периода полураспада $T_{1/2}$ радиоактивного ядра; 2) для среднего времени жизни τ радиоактивного ядра.

Ответ 1) $T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$; 2) $\tau = \frac{1}{\lambda}$.

7.25 Определите постоянную радиоактивного распада λ для изотопов: 1) тория ${}^{229}_{90}\mathrm{Th}$; 2) урана ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$; 3) иода ${}^{131}_{53}\mathrm{I}$. Период полураспада этих изотопов соответственно равен: 1) $7 \cdot 10^3$ лет; 2) $4{,}5 \cdot 10^9$ лет; 3) 8 сут.

Ответ 1) $3{,}13 \cdot 10^{-12}$ с$^{-1}$; 2) $4{,}87 \cdot 10^{-18}$ с$^{-1}$; 3) 10^{-6} с$^{-1}$.

7.26 Определите, что (и во сколько раз) продолжительнее — три периода полураспада или два средних времени жизни радиоактивного ядра.

Дано	*Решение*
$3T_{1/2}$ 2τ	$T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, $\tau = \dfrac{1}{\lambda}$, $3T_{1/2} = \dfrac{3\ln 2}{\lambda}$, $2\tau = \dfrac{2}{\lambda}$, $3\ln 2 > 2$, следовательно, $3T_{1/2} > 2\tau$.

7.27 Определите, во сколько раз начальное количество ядер радиоактивного изотопа уменьшится за три года, если за один год оно уменьшилось в 4 раза.

Дано	*Решение*
$t_1 = 1$ год $t_2 = 3$ год $\dfrac{N_0}{N_1} = 4$ $\dfrac{N_0}{N_2}$ — ?	$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, $N_1 = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_1}$, $N_2 = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t_2}$, $\dfrac{N_0}{N_1} = \mathrm{e}^{\lambda t_1} = 4$, $\lambda = \dfrac{\ln 4}{t_1}$, $\dfrac{N_0}{N_2} = \mathrm{e}^{\lambda t_2} = \mathrm{e}^{\frac{\ln 4 \cdot t_2}{t_1}} = \mathrm{e}^{3\ln 4}$.

Ответ $\dfrac{N_0}{N_2} = 64$.

7.28 Определите, какая часть (%) начального количества ядер радиоактивного изотопа останется нераспавшейся по истечении времени t, равного двум средним временам жизни τ радиоактивного ядра.

Дано	*Решение*
$t = 2\tau$	$N = N_0\, e^{-\lambda t}$, $\quad \tau = \frac{1}{\lambda}$, $\quad t = 2\tau = 2\cdot\frac{1}{\lambda} = \frac{2}{\lambda}$,
$\frac{N}{N_0}$(%) — ?	$N = N_0\, e^{-\lambda\cdot\frac{2}{\lambda}} = N_0\, e^{-2}$, $\quad \frac{N}{N_0} = e^{-2} = 0{,}135$.

Ответ $\frac{N}{N_0} = 13{,}5\%$.

7.29 Определите, какая часть начального количества ядер радиоактивного изотопа распадется за время t, равное двум периодам полураспада $T_{1/2}$.

Ответ $\frac{\Delta N}{N} = 0{,}75$.

7.30 Определите период полураспада радиоактивного изотопа, если 5/8 начального количества ядер этого изотопа распалось за время $t = 849$ с.

Дано	*Решение*
$\frac{\Delta N}{N_0} = \frac{5}{8}$ $t = 849$ c	$N = N_0\, e^{-\lambda t}$, $\quad \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - e^{-\lambda t} = \frac{5}{8}$, $\quad e^{-\lambda t} = \frac{3}{8}$.
$T_{1/2}$ — ?	$-\lambda t = \ln\frac{3}{8}$, $\quad \lambda = \frac{\ln\frac{8}{3}}{t}$, $\quad T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{\ln 2\cdot t}{\ln\frac{8}{3}}$.

Ответ $T_{1/2} = 10$ мин.

7.31 Период полураспада радиоактивного изотопа актиния $^{225}_{89}\mathrm{Ac}$ составляет 10 сут. Определите время, за которое распадется 1/3 начального количества ядер актиния.

Ответ $t = 5{,}85$ сут.

7.32 Постоянная радиоактивного распада изотопа $^{210}_{82}\mathrm{Pb}$ равна $10^{-9}\ \mathrm{c}^{-1}$. Определите время, в течение которого распадется 2/5 начального количества ядер этого радиоактивного изотопа.

Дано

$\lambda = 10^{-9}\ \mathrm{c}^{-1}$

$^{210}_{82}\mathrm{Pb}$

$\dfrac{\Delta N}{N_0} = \dfrac{2}{5}$

t — ?

Решение

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \frac{\Delta N}{N_0} = \frac{N_0 - N}{N_0} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} = \frac{2}{5},$$

$$-\lambda t = \ln\frac{3}{5}, \qquad \lambda t = \ln\frac{5}{3}, \qquad t = \frac{\ln\frac{5}{3}}{\lambda}.$$

Ответ $t = 16{,}2$ год.

7.33 Выведите формулу для скорости (активности) радиоактивного распада через период полураспада $T_{1/2}$ и начальное число N_0 радиоактивных атомов.

Дано

N_0

$T_{1/2}$

A — ?

Решение

$$\mathrm{d}N = -\lambda N\,\mathrm{d}t, \qquad A = \left|\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right| = \lambda N, \qquad N = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t},$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}, \qquad A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2\cdot t}{T_{1/2}}}.$$

Ответ

$$A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{(\ln 2)\cdot t}{T_{1/2}}}.$$

7.34 Первоначальная масса радиоактивного изотопа иода $^{131}_{53}\mathrm{I}$ (период полураспада $T_{1/2} = 8$ сут) равна 1 г. Определите: 1) начальную активность изотопа; 2) его активность через 3 сут.

Дано

$M = 131 \cdot 10^{-3}$ кг/моль

$m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг

$T_{1/2} = 8$ сут $= 6{,}91 \cdot 10^5$ с

$t = 3$ сут $= 2{,}59 \cdot 10^5$ с

1) A_0 — ?

2) A — ?

Решение

$$A_0 = \lambda N_0, \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

$$N_0 = \frac{mN_A}{M}, \qquad A_0 = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{mN_A}{M},$$

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad A = \frac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \frac{mN_A}{M}\,\mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Ответ 1) $A_0 = 4{,}61 \cdot 10^{15}$ Бк; 2) $A = 3{,}55 \cdot 10^{15}$ Бк.

7.35 Активность некоторого радиоактивного изотопа в начальный момент времени составляла 100 Бк. Определите активность этого изотопа по истечении промежутка времени, равного половине периода полураспада.

Дано

$A_0 = 100$ Бк

$t = \frac{1}{2} T_{1/2}$

A — ?

Решение

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \qquad \lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}},$$

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2 \cdot t}{T_{1/2}}}, \qquad \frac{t}{T_{1/2}} = \frac{1}{2},$$

$$A = A_0\,\mathrm{e}^{-\frac{\ln 2}{2}}.$$

Ответ $A = 70{,}7$ Бк.

7.36 Начальная активность 1 г изотопа радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$ равна 1 Ки. Определите период полураспада $T_{1/2}$ этого изотопа.

Дано	*Решение*
$M = 226 \cdot 10^{-3}$ кг/моль $m = 1$ г $= 10^{-3}$ кг $A_0 = 1$ Ки $= 3{,}7 \cdot 10^{10}$ Бк $T_{1/2}$ — ?	$A_0 = \lambda N_0$, $\quad N_0 = \dfrac{mN_A}{M}$, $\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $\quad A_0 = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}} \cdot \dfrac{mN_A}{M}$, $T_{1/2} = \dfrac{mN_A \ln 2}{MA_0}$.

Ответ $T_{1/2} = 1582$ год.

7.37 Принимая, что все атомы изотопа иода $^{131}_{53}\mathrm{I}$ ($T_{1/2} = 8$ сут) массой $m = 1$ мкг радиоактивны, определите: 1) начальную активность A_0 этого изотопа; 2) его активность A через 3 сут.

Ответ 1) $A_0 = 4{,}61$ ТБк; 2) $A = 3{,}55$ ТБк.

7.38 Определите период полураспада $T_{1/2}$ некоторого радиоактивного изотопа, если его активность за 5 суток уменьшилась в 2,2 раза.

Дано	*Решение*
$\dfrac{A_0}{A} = 2{,}2$ $t = 5$ сут $T_{1/2}$ — ?	$\lambda = \dfrac{\ln 2}{T_{1/2}}$, $\quad T_{1/2} = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, $\quad A = A_0\, e^{-\lambda t}$, $\lambda = \dfrac{1}{t} \ln \dfrac{A_0}{A}$, $\quad T_{1/2} = t\dfrac{\ln 2}{\ln 2{,}2}$.

Ответ $T_{1/2} = 4{,}4$ сут.

7.39 Определите удельную активность a (число распадов в 1 с на 1 кг вещества) изотопа ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$, если период его полураспада $T_{1/2} = 4{,}5 \cdot 10^9$ лет.

Ответ $a = \dfrac{N_\mathrm{A} \ln 2}{MT_{1/2}} = 12{,}3$ МБк/кг.

7.40 Объясните, как изменится положение химического элемента в таблице Менделеева после α- и β-распадов ядер его атомов.

7.41 Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определите, в какой элемент превращается ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ после трех α- и двух β^--распадов.

Дано	***Решение***
${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ 3α $2\beta^-$ X — ?	${}^{238}_{92}\mathrm{U} \xrightarrow{\alpha} {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \xrightarrow{\alpha} {}^{230}_{88}\mathrm{Ra} \xrightarrow{\alpha} {}^{226}_{86}\mathrm{Rn} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{87}\mathrm{Fr} \xrightarrow{\beta^-} {}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$. торий радий радон франций радий

Ответ X = ${}^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

7.42 Пользуясь таблицей Менделеева и правилами смещения, определите, в какой элемент превращается ${}^{238}_{92}\mathrm{U}$ после шести α- и трех β^--распадов.

Ответ ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$.

7.43 Ядра радиоактивного изотопа тория $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ претерпевают последовательно α-распад, два β^--распада и α-распад. Определите конечный продукт деления.

Ответ $^{224}_{88}\mathrm{Ra}$.

7.44 Определите, сколько β^-- и α-частиц выбрасывается при превращении ядра таллия $^{210}_{81}\mathrm{Tl}$ в ядро свинца $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$.

Ответ $N_\alpha = 1$, $N_{\beta^-} = 3$.

7.45 Радиоактивный изотоп радия $^{225}_{88}\mathrm{Ra}$ претерпевает четыре α-распада и два β^-- распада. Определите для конечного ядра: 1) зарядовое число Z; 2) массовое число A.

Ответ 1) $Z = 82$; 2) $A = 209$.

7.46 Запишите α - распад радия $^{226}_{88}\mathrm{Ra}$.

7.47 Определите высоту кулоновского потенциального барьера для α - частицы в ядре свинца $^{206}_{82}\mathrm{Pb}$.

Дано

$^{206}_{82}\mathrm{Pb}$

$^{4}_{2}\mathrm{He}$

$R_0 = 1{,}4 \cdot 10^{-15}$ м

$U_{\text{кул}}$ — ?

Решение

$$U_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{\text{Pb}}Q_\alpha}{R}, \qquad Q_{\text{Pb}} = Z_{\text{Pb}}|e|, \qquad Q_\alpha = Z_\alpha|e|,$$

$$R = R_{\text{Pb}} + R_\alpha, \qquad R_{\text{Pb}} = R_0 A_{\text{Pb}}^{1/3}, \qquad R_\alpha = R_0 A_\alpha^{1/3},$$

$$U_{\text{кул}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z_{\text{Pb}}Z_\alpha \cdot |e|^2}{R_0(A_{\text{Pb}}^{1/3} + A_\alpha^{1/3})}.$$

Ответ $U_{\text{кул}} = 22{,}5$ МэВ.

7.48 Покоившееся ядро радона $^{222}_{86}\mathrm{Rn}$ испускает α-частицу, имеющую скорость 16 Мм/с. Зная, что масса дочернего ядра составляет $3{,}62 \cdot 10^{-25}$ кг, определите: 1) импульс α-частицы; 2) кинетическую энергию α-частицы; 3) импульс отдачи дочернего ядра; 4) кинетическую энергию отдачи дочернего ядра.

Ответ 1) $1{,}07 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с; 2) 5,35 МэВ;
3) $1{,}07 \cdot 10^{-19}$ кг · м/с; 4) 9,89 кэВ.

7.49 Покоившееся ядро полония $^{200}_{84}\mathrm{Po}$ испускает α- частицу с кинетической энергией $T_\alpha = 5{,}77$ МэВ. Определите. 1) скорость отдачи дочернего ядра; 2) какую долю кинетической энергии α-частицы составляет энергия отдачи дочернего ядра.

Дано

$^{200}_{84}\mathrm{Po} \to {}^{196}_{82}\mathrm{Pb} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$

$T_\alpha = 5{,}77$ МэВ $=$
$= 9{,}23 \cdot 10^{-15}$ Дж

1) $v_д$ — ?

2) $\dfrac{T_д}{T_\alpha}$ — ?

Решение

$$m_\alpha v_\alpha = m_д v_д, \qquad T_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2},$$

$$v_д = \frac{m_\alpha v_\alpha}{m_п} = \frac{\sqrt{2 m_\alpha T_\alpha}}{m_д}, \qquad T_п = \frac{m_д v_д^2}{2} = \frac{m_\alpha T_\alpha}{m_д},$$

$$\frac{T_д}{T_\alpha} = \frac{m_\alpha}{m_д}.$$

Ответ 1) $v_д = 339$ км/с; 2) $\dfrac{T_д}{T_\alpha} = 0{,}02$.

• •

Правила смещения

для α - распада $\quad {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A-4}_{Z-2}\mathrm{Y} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$;

для β^- - распада $\quad {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z+1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{-1}e$;

для β^+ - распада $\quad {}^{A}_{Z}\mathrm{X} \to {}^{A}_{Z-1}\mathrm{Y} + {}^{0}_{+1}e$.

7.50 Определите энергию, выделяющуюся в результате реакции ${}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu$. Массы нейтральных атомов магния и натрия соответственно равны $3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг и $3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг.

Дано

${}^{23}_{12}\mathrm{Mg} \rightarrow {}^{23}_{11}\mathrm{Na} + {}^{0}_{1}e + {}^{0}_{0}\nu$

$m_{\mathrm{Mg}} = 3{,}8184 \cdot 10^{-26}$ кг

$m_{\mathrm{Na}} = 3{,}8177 \cdot 10^{-26}$ кг

$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг

Q — ?

Решение

$$m^{\text{я}}_{\mathrm{Mg}} = m_{\mathrm{Mg}} - 12 m_{e^-}, \qquad m^{\text{я}}_{\mathrm{Na}} = m_{\mathrm{Na}} - 11 m_{e^-},$$

$$m^{\text{я}}_{\mathrm{Mg}} c^2 = m^{\text{я}}_{\mathrm{Na}} c^2 + T_{\mathrm{Na}} + m_{e^+} c^2 + T_{e^+} + T_{\nu},$$

$$m_{e^+} = m_{e^-} = m_e,$$

$$Q = T_{\mathrm{Na}} + T_{e^+} + T_{\nu} = (m^{\text{я}}_{\mathrm{Mg}} - m^{\text{я}}_{\mathrm{Na}} - m_{e^+})c^2,$$

$$Q = (m_{\mathrm{Mg}} - 12 m_e - m_{\mathrm{Na}} + 11 m_e - m_e)c^2,$$

$$Q = (m_{\mathrm{Mg}} - m_{\mathrm{Na}} - 2 m_e)c^2.$$

Ответ $Q = 2{,}91$ МэВ.

7.51 Запишите β^- - распад магния ${}^{27}_{12}\mathrm{Mg}$.

Ответ ${}^{27}_{12}\mathrm{Mg} \xrightarrow{\beta^-} {}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e$.

7.52 Известно, что β^- - активные ядра обладают до распада и после него вполне определенными энергиями, в то же время энергетический спектр β^- - частиц является непрерывным. Объясните непрерывность энергетического спектра испускаемых электронов.

7.53 Объясните, почему существование антинейтрино полностью позволяет объяснить все особенности β^- - распада.

7.54 Запишите превращение нейтрона в протон с указанием частиц, которые при этом испускаются. Объясните, почему этот процесс является энергетически возможным.

7.55 Объясните, почему при α - распаде одинаковых ядер энергии α - частиц одинаковы, а при β^- - распаде одинаковых ядер энергии электронов различны.

7.56 Применяя понятия квантовой статистики, объясните, почему невозможно принципиально создать “нейтринный лазер”.

7.57 Опишите основные процессы, происходящие при взаимодействии γ - излучения с веществом.

7.58 Свободное покоившееся ядро $^{191}_{77}\mathrm{Ir}$ ($m = 317{,}10953 \cdot 10^{-27}$ кг) с энергией возбуждения $E = 129$ кэВ перешло в основное состояние, испустив γ - квант. Определите изменение энергии γ - кванта, возникающее в результате отдачи ядра.

Дано	*Решение*
$^{191}_{77}\mathrm{Ir}$ $m = 317{,}10953 \cdot 10^{-27}$ кг $E = 129$ кэВ $= 2{,}06 \cdot 10^{-14}$ Дж $\Delta\varepsilon$ — ?	$mv = m_\gamma c$, $\quad p = mv = \dfrac{Ec}{c^2} = \dfrac{E}{c}$, $\Delta\varepsilon = \dfrac{mv^2}{2} = \dfrac{p^2}{2m} = \dfrac{E^2}{2mc^2}$.

Ответ $\Delta\varepsilon = 0{,}047$ эВ.

7.59 Назовите два важных механизма, которыми можно объяснить ослабление потока фотонов с энергией $E = 500$ кэВ при его прохождении через вещество.

7.60 Объясните, почему треки α - частиц представляют сплошную толстую линию, а треки β^- - частиц — тонкую пунктирную линию.

7.61 Объясните, где и почему лучше использовать длинные цепи рождений и распадов частиц высоких энергий — в камере Вильсона или в пузырьковой камере.

7.62 Определите, является ли реакция ${}^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^7_4\mathrm{Be} + {}^1_0n$ экзотермической или эндотермической. Определите энергию ядерной реакции.

Дано

$m_{\mathrm{Li}} = 11{,}65079 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_{\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_{\mathrm{Be}} = 11{,}65231 \cdot 10^{-27}$ кг

$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг

ΔE — ?

Решение

$${}^7_3\mathrm{Li} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^7_4\mathrm{Be} + {}^1_0n,$$

$$\Delta E = (m_{\mathrm{Li}} + m_{\mathrm{H}} - m_{\mathrm{Be}} - m_n)c^2.$$

Ответ $\Delta E = -1{,}64$ МэВ, реакция эндотермическая.

7.63 Определите, поглощается или выделяется энергия при ядерной реакции ${}^2_1\mathrm{H} + {}^3_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + {}^1_0n$. Определите эту энергию.

Ответ $\Delta E = 17{,}6$ МэВ.

7.64 Определите, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции ${}^{44}_{20}\mathrm{Ca} + {}^1_1\mathrm{H} \to {}^{41}_{19}\mathrm{K} + {}^4_2\mathrm{He}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{{}^{44}_{20}\mathrm{Ca}} = 7{,}2992 \cdot 10^{-26}$ кг, $m_{{}^1_1\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{{}^{41}_{19}\mathrm{K}} = 6{,}8021 \cdot 10^{-27}$ кг, $m_{{}^4_2\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг.

7.65 Определите, выделяется или поглощается энергия при ядерной реакции $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{1}_{1}\mathrm{H} + {}^{17}_{8}\mathrm{O}$. Массы ядер, участвующих в реакции: $m_{^{14}_{7}\mathrm{N}} = 2{,}3253\cdot10^{-26}$ кг, $m_{^{4}_{2}\mathrm{He}} = 6{,}6467\cdot10^{-27}$ кг, $m_{^{1}_{1}\mathrm{H}} = 1{,}6736\cdot10^{-27}$ кг, $m_{^{17}_{8}\mathrm{O}} = 2{,}8229\cdot10^{-27}$ кг.

7.66 Определите зарядовое число Z и массовое число A частицы, обозначенной буквой x, в символической записи реакции: 1) $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + x$; 2) $^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + x$; 3) $^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$.

Ответ

1) $^{14}_{7}\mathrm{N} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{17}_{8}\mathrm{O} + x$; $Z = 1$, $A = 1$, $^{1}_{1}p$;

2) $^{9}_{4}\mathrm{Be} + {}^{4}_{2}\mathrm{He} \to {}^{12}_{6}\mathrm{C} + x$; $Z = 0$, $A = 1$, $^{1}_{0}n$;

3) $^{6}_{3}\mathrm{Li} + x \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}$; $Z = 0$, $A = 1$, $^{1}_{0}n$.

7.67 Запишите недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях: 1) $^{10}_{5}\mathrm{B}(n, \alpha)x$; 2) $^{40}_{18}\mathrm{Ar}(\alpha, n)x$; 3) $x(p, n)^{37}_{18}\mathrm{Ar}$; 4) $^{3}_{2}\mathrm{He}(x, p)^{3}_{1}\mathrm{H}$; 5) $x(n, \alpha)^{3}_{1}\mathrm{H}$.

● ●

Символическая запись ядерной реакции

$$^{A}_{Z}\mathrm{X} + a \to {}^{A'}_{Z'}\mathrm{Y} + b,$$

или

$$^{A}_{Z}\mathrm{X}(a, b)^{A'}_{Z'}\mathrm{Y},$$

где $^{A}_{Z}\mathrm{X}$ и $^{A'}_{Z'}\mathrm{Y}$ – исходное и конечное ядра с зарядовыми числами Z и Z' и массовыми числами A и A'; a и b — соответственно бомбардирующая и испускаемая (или испускаемые) в ядерной реакции частицы.

7.68 В ядерной реакции ${}_1^2\mathrm{H}+{}_1^2\mathrm{H}\rightarrow{}_2^3\mathrm{He}+{}_0^1n$ выделяется энергия $\Delta E=3{,}27$ МэВ. Определите массу атома ${}_2^3\mathrm{He}$, если масса атома ${}_1^2\mathrm{H}$ равна $3{,}34461\cdot10^{-27}$ кг.

Дано	Решение
${}_1^2\mathrm{H}+{}_1^2\mathrm{H}\rightarrow{}_2^3\mathrm{He}+{}_0^1n$ $\Delta E=3{,}27$ МэВ $=$ $=1{,}0032\cdot10^{-18}$ Дж $m_{{}_1^2\mathrm{H}}=3{,}34461\cdot10^{-27}$ кг $m_{{}_2^3\mathrm{He}}$ — ?	${}_1^2\mathrm{H}+{}_1^2\mathrm{H}\rightarrow{}_2^3\mathrm{He}+{}_0^1n+\Delta E$, $m_{{}_2^3\mathrm{He}}=2m_{{}_1^2\mathrm{H}}-m_n-\dfrac{\Delta E}{c^2}$. **Ответ** $m_{{}_2^3\mathrm{He}}=5{,}00841\cdot10^{-27}$ кг.

7.69 Первая в истории искусственная ядерная реакция осуществлена Резерфордом. Запишите эту реакцию и объясните ее огромное значение для развития ядерной физики.

Ответ ${}_7^{14}\mathrm{N}+{}_2^4\mathrm{He}\rightarrow{}_8^{17}\mathrm{O}+{}_1^1p$.

7.70 Жолио-Кюри облучали алюминий ${}_{13}^{27}\mathrm{Al}$ α - частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+ - распад. Запишите эту реакцию.

Ответ ${}_{13}^{27}\mathrm{Al}+{}_2^4\mathrm{He}\rightarrow{}_{15}^{30}\mathrm{P}+{}_0^1n$,

$${}_{15}^{30}\mathrm{P}\xrightarrow{\beta^+}{}_{14}^{30}\mathrm{Si}+{}_{+1}^{0}e+{}_0^0\nu_e.$$

7.71 Жолио-Кюри облучали магний ${}_{12}^{24}\mathrm{Mg}$ α - частицами, в результате чего испускался нейтрон и образовывалось искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^+ - распад. Запишите эту реакцию.

7.72 Запишите превращение протона в нейтрон с указанием частиц, которые при этом испускаются. Объясните, почему это превращение энергетически возможно только для протона, связанного в ядре.

7.73 В процессе осуществления реакции $\gamma \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$ энергия E_0 фотона составляла 2,02 МэВ. Определите полную кинетическую энергию позитрона и электрона в момент их возникновения.

Дано	*Решение*
$\gamma \to {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e$	$E_0 = 2mc^2 + T$,
$E_0 = 2{,}02$ МэВ = $= 3{,}23 \cdot 10^{-19}$ эВ	$T = E_0 - 2mc^2$.
T — ?	

Ответ $T = 1$ МэВ.

7.74 При столкновении позитрона и электрона происходит их аннигиляция, в процессе которой электронно-позитронная пара превращается в два γ - кванта, а энергия пары переходит в энергию фотонов. Определите энергию каждого из возникших фотонов, принимая, что кинетическая энергия электрона и позитрона до их столкновения пренебрежимо мала.

Дано	*Решение*	
$T = 0$	${}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{+1}e = 2\gamma$,	$2mc^2 + T = 2E_0$,
$m = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	$T = 0$,	$E_0 = mc^2$.
E_0 — ?		

Ответ $E_0 = 0{,}51$ МэВ.

7.75 Запишите схему электронного захвата (e-захвата) и объясните его отличия от $\beta^{\pm}$ - распадов. Приведите пример электронного захвата.

Ответ e-захват: ${}^{A}_{Z}X + {}^{0}_{-1}e \to {}_{Z-1}^{A}Y + {}^{0}_{0}\nu_e$, вылетает ${}^{0}_{0}\nu_e$.

При $\beta^{\pm}$ - распаде вылетают две частицы: $({}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\nu)$ или $({}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu)$.

7.76 Дополните недостающие обозначения x в следующих ядерных реакциях:

1) ${}^{235}_{x}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{145}_{57}\mathrm{La} + x + 4{}^{1}_{0}n$;

2) ${}^{235}_{x}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{99}_{x}\mathrm{Zr} + {}^{135}_{x}\mathrm{Te} + x{}^{1}_{0}n$;

3) ${}^{232}_{x}\mathrm{Th} + {}^{1}_{0}n \to x + {}^{140}_{x}\mathrm{Xe} + 3{}^{1}_{0}n$;

4) ${}^{x}_{x}\mathrm{Pu} + {}^{1}_{0}n \to {}^{80}_{x}\mathrm{Se} + {}^{157}_{x}\mathrm{Nd} + 3{}^{1}_{0}n$.

7.77 Под действием каких частиц — нейтронов или α - частиц — ядерные реакции осуществляются более эффективно? Объясните ответ.

7.78 Объясните, почему на медленных нейтронах в основном идут реакции типа (n, n) и (n, γ), а на быстрых нейтронах — реакции типа (n, p) и (n, α).

7.79 Для обнаружения нейтрона используются реакции захвата тепловых нейтронов легкими ядрами (${}^{3}_{2}\mathrm{He}$, ${}^{10}_{5}\mathrm{Be}$), в результате которых испускаются заряженные частицы. Запишите возможные реакции.

Ответ

$${}^{3}_{2}\mathrm{He} + {}^{1}_{0}n \to {}^{3}_{1}\mathrm{H} + {}^{1}_{1}p.$$

$${}^{10}_{5}\mathrm{B} + {}^{1}_{0}n \to {}^{7}_{3}\mathrm{Li} + {}^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

7.80 При энергии нейтронов ≈ 10 МэВ становится возможной на ядре урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$ ядерная реакция типа (n, $2n$), в результате чего образуется искусственно-радиоактивное ядро, испытывающее β^- - распад. Запишите эту реакцию.

Ответ

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{237}_{92}\mathrm{U} + 2{}^{1}_{0}n,$$

$$^{237}_{92}\mathrm{U} \to {}^{237}_{93}\mathrm{Np} + {}^{0}_{-1}e + {}^{0}_{0}\tilde{\nu}_e.$$

7.81 Ядро урана $^{238}_{92}\mathrm{U}$, захватывая быстрый нейтрон, превращается в радиоактивный изотоп урана, который претерпевает β^- -распад, и превращается в трансурановый элемент, который в свою очередь также претерпевает β^- -распад, в результате чего образуется плутоний. Запишите все эти процессы в виде ядерной реакции.

Ответ

$$^{238}_{92}\mathrm{U} + {}^{1}_{0}n \to {}^{239}_{92}\mathrm{U} \to {}^{239}_{93}\mathrm{Np} + {}^{0}_{-1}e,$$

$$^{239}_{93}\mathrm{Np} \to {}^{239}_{94}\mathrm{Pu} + {}^{0}_{-1}e.$$

7.82 Определите кинетическую энергию E и скорость v теплового нейтрона при температуре окружающей среды, равной 17 °C.

Дано	*Решение*
$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг $t = 17$ °C; $T = 290$ K	$E = \frac{3}{2}kT$, $E = \frac{m_n v^2}{2}$,
E — ? v —?	$v = \sqrt{\frac{2E}{m_n}}$.

Ответ $E = 6 \cdot 10^{-21}$ Дж; $v = 2{,}68$ км/с.

7.83 Ядро урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$, захватывая тепловой нейтрон, делится на изотопы стронция и ксенона с массовыми числами 95 и 139, второй из которых, являясь радиоактивным, претерпевает три β^- - распада. Запишите реакцию деления, а также цепочку β^- - распадов.

Ответ

$$^{235}_{92}\mathrm{U} + ^{1}_{0}n \rightarrow ^{139}_{54}\mathrm{Xe} + ^{95}_{38}\mathrm{Sr} + 2^{1}_{0}n,$$

$$^{139}_{54}\mathrm{Xe} \xrightarrow{\beta^-} ^{139}_{55}\mathrm{Cs} \xrightarrow{\beta^-} ^{139}_{56}\mathrm{Ba} \xrightarrow{\beta^-} ^{139}_{57}\mathrm{La}\,.$$

7.84 При захвате теплового нейтрона ядром урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ образуются два осколка деления и два нейтрона. Определите порядковый номер Z и массовое число A одного из осколков, если другим осколком является ядро стронция $^{95}_{38}\mathrm{Sr}$.

7.85 Объясните, почему деление ядер должно сопровождаться выделением большого количества энергии.

7.86 Определите энергию (в электрон-вольтах), которую можно получить при расщеплении 1 г урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$, если при расщеплении каждого ядра урана выделяется энергия 200 МэВ.

Ответ $\Delta E = 5{,}12 \cdot 10^{23}$ МэВ.

Скорость нарастания цепной реакции

$$\frac{dN}{dt} = \frac{N(k-1)}{T}, \text{ откуда } N = N_0\, e^{(k-1)t/T},$$

где N_0 — число нейтронов в начальный момент времени; N — число нейтронов в момент времени t; T — среднее время жизни одного поколения; k — коэффициент размножения нейтронов.

7.87 Определите суточный расход чистого урана $^{235}_{92}\mathrm{U}$ атомной электростанцией тепловой мощностью $P = 300$ МВт, если энергия E, выделяющаяся при одном акте деления, составляет 200 МэВ.

Дано

$^{235}_{92}\mathrm{U}$

$P = 300$ МВт $= 3\cdot10^{8}$ Вт

$E = 200$ МэВ $=$
$= 3{,}2\cdot10^{-11}$ Дж

$t = 24$ ч $= 86400$ с

$M = 235\cdot10^{-3}$ кг/моль

m — ?

Решение

$$N = \frac{Pt}{E},$$

$$m = \frac{NM}{N_{\mathrm{A}}} = \frac{PtM}{EN_{\mathrm{A}}}.$$

Ответ $m = 316$ г.

7.88 Определите, во сколько раз увеличится число нейтронов в цепной ядерной реакции за время $t = 10$ с, если среднее время жизни T одного поколения составляет 80 мс, а коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}002$.

Дано

$t = 10$ с

$T = 80$ мс $= 8\cdot10^{-2}$ с

$k = 1{,}002$

$\dfrac{N}{N_0}$ — ?

Решение

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = \frac{N(k-1)}{T}, \qquad N = N_0\,\mathrm{e}^{\frac{(k-1)t}{T}},$$

$$\frac{N}{N_0} = \mathrm{e}^{\frac{(k-1)t}{T}}$$

Ответ $\dfrac{N}{N_0} = 1{,}284$.

7.89 Объясните, какой характер носит цепная реакция деления, если коэффициент размножения: 1) $k > 1$; 2) $k = 1$; 3) $k < 1$.

7.90 В ядерном реакторе на тепловых нейтронах среднее время жизни T одного поколения нейтронов составляет 90 мс. Принимая коэффициент размножения нейтронов $k = 1{,}002$, определите период τ реактора, т.е. время, в течение которого поток тепловых нейтронов в реакторе возрастает в e раз.

Ответ $\tau = 45$ с.

7.91 Определите число нейтронов, возникающих за 1 с в ядерном реакторе тепловой мощностью $P = 200$ МВт, если известно, что при одном акте деления выделяется энергия $E = 200$ МэВ, а среднее число нейтронов на один акт деления составляет 2,5.

Ответ $n = 1{,}56 \cdot 10^{19}$ с$^{-1}$.

7.92 Объясните особенности реактора-размножителя и запишите ядерные реакции, за счет которых может в них идти процесс воспроизводства ядерного горючего.

7.93 В водородной бомбе вместо реакции ${}^2_1\text{H} + {}^2_1\text{H} \to {}^3_2\text{He} + {}^1_0n$ используется реакция ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \to {}^4_2\text{He} + {}^1_0n$. Объясните почему.

7.94 Объясните, почему реакция синтеза атомных ядер — образование из легких ядер более тяжелых — является колоссальным источником энергии.

7.95 Объясните, почему для протекания термоядерной реакции необходима очень высокая температура.

7.2. Элементы физики элементарных частиц

7.96 Известно, что в углеродно-азотном, или углеродном, цикле число ядер углерода остается неизменным. В результате этого цикла четыре ядра водорода $^1_1\mathrm{H}$ (протона) превращаются в ядро гелия $^4_2\mathrm{He}$, а также образуются три γ -кванта, два позитрона и два нейтрино. Записав эту реакцию, определите выделяющуюся в этом процессе энергию.

Дано	*Решение*
$m_{^1_1\mathrm{H}} = 1{,}6736 \cdot 10^{-27}$ кг	$4^1_1\mathrm{H} \to {}^4_2\mathrm{He} + 2{}^{\;0}_{+1}e + 2{}^0_0\nu_e + 3\gamma + Q$,
$m_{^4_2\mathrm{He}} = 6{,}6467 \cdot 10^{-27}$ кг	$\Delta m = 4m_{^1_1\mathrm{H}} - (m_{^4_2\mathrm{He}} + 2m_{e^+})$,
$m_{e^+} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	$Q = \Delta m c^2$.
Q — ?	**Ответ** $Q = 25{,}8$ МэВ.

7.97 Дайте определение и объясните происхождение первичного и вторичного космического излучения.

7.98 Объясните происхождение мягкого и жесткого компонентов вторичного космического излучения.

7.99 Представьте схематически и объясните происхождение электронно-позитронно-фотонного, или каскадного, ливня.

7.100 Запишите схемы распада положительного и отрицательного мюонов.

Ответ $\mu^+ \to {}^{\;0}_{+1}e + {}^0_0\nu_e + {}^0_0\widetilde{\nu}_\mu$.

$\mu^- \to {}^{\;0}_{-1}e + {}^0_0\widetilde{\nu}_e + {}^0_0\nu_\mu$.

7.101 При соударении высокоэнергетического положительного мюона и электрона образуются два нейтрино. Запишите эту реакцию и объясните, какой тип нейтрино образуется.

Ответ $\mu^{+} + {}_{-1}^{0}e \to {}_{0}^{0}\nu_{e} + {}_{0}^{0}\nu_{\mu}$.

7.102 При захвате протоном отрицательного мюона образуется нейтрон и еще одна частица. Запишите эту реакцию и определите, что это за частица.

Ответ $\mu^{-} + {}_{1}^{1}p \to {}_{0}^{1}n + {}_{0}^{0}\nu_{\mu}$.

7.103 Принимая, что энергия релятивистских мюонов в космическом излучении составляет 3 ГэВ, определите расстояние, проходимое мюонами за время их жизни, если собственное время жизни мюона $t_0 = 2{,}2$ мкс, а энергия покоя $E_0 = 100$ МэВ.

Дано

$E = 3$ ГэВ $= 3 \cdot 10^{9}$ эВ

$t_0 = 2{,}2$ мкс $= 2{,}2 \cdot 10^{-6}$ с

$E_0 = 100$ МэВ $= 10^{8}$ эВ

l — ?

Решение

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \qquad E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}},$$

$$t = t_0 \frac{E}{E_0}, \qquad v = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2},$$

$$l = vt = c\sqrt{1 - \left(\frac{E_0}{E}\right)^2} \cdot t_0 \frac{E}{E_0}.$$

Ответ $l = 19{,}8$ км.

7.104 Известно, что продукты распада заряженных пионов испытывают дальнейший распад. Запишите цепочку реакций для π^{+} - и π^{-} -мезонов.

Ответ $\pi^{+} \to \mu^{+} + {}_{0}^{0}\nu_{\mu}$, $\mu^{+} \to {}_{+1}^{0}e + {}_{0}^{0}\nu_{e} + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{\mu}$.

$\pi^{-} \to \mu^{-} + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{\mu}$, $\mu^{-} \to {}_{-1}^{0}e + {}_{0}^{0}\tilde{\nu}_{e} + {}_{0}^{0}\nu_{\mu}$.

7.105 π^0 - мезон распадается в состоянии покоя на два γ - кванта. Принимая массу покоя пиона равной $264{,}1m_e$, определите энергию каждого из возникших γ -квантов.

Дано	*Решение*
$m_\pi = 264{,}1m_e$	$\pi^0 \to 2\gamma$, $\qquad E_\pi = m_\pi c^2$,
$m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ кг	$E_\gamma = \dfrac{E_\pi}{2} = \dfrac{m_\pi c^2}{2}$.
E_γ — ?	

Ответ $E_\gamma = 67{,}7$ МэВ.

7.106 Известно, что распад нейтрального короткоживущего каона происходит по схеме $K_s^0 \to \pi^+ + \pi^-$. Принимая, что до момента распада каон покоился и его масса покоя составляет $974m_e$, определите массу покоя образовавшихся заряженных π - мезонов, если известно, что масса каждого образовавшегося пиона в 1.783 раза больше его массы покоя.

Ответ $m_\pi = 273{,}1m_e$.

7.107 K^+ - мезон распадается (в состоянии покоя) на два пиона. Принимая массу покоя каона равной $966{,}2m_e$ и пренебрегая разностью масс заряженного и нейтрального пионов, определите энергию каждого из возникших пионов.

Ответ $E = 247{,}5$ МэВ.

7.108 Назовите и охарактеризуйте четыре типа фундаментальных взаимодействий, а также сравните радиусы их действия. Какое из взаимодействий является универсальным.

7.109 Что называется изотопическим мультиплетом и изотопическим спином?

7.110 Возможно ли вынужденное излучение, если фотоны были бы фермионами? Дайте объяснение.

7.111 Объясните, в чем заключается принцип зарядового сопряжения.

7.112 Запишите продукты распада антинейтрона.

Ответ ${}^{1}_{0}\tilde{n} \rightarrow {}^{1}_{-1}\tilde{p} + {}^{0}_{+1}e + {}^{0}_{0}\nu_e$.

7.113 При столкновении нейтрона и антинейтрона происходит их аннигиляция, в результате чего возникают два γ - кванта, а энергия частиц переходит в энергию γ - квантов. Определите энергию каждого из возникших γ-квантов, принимая, что кинетическая энергия нейтрона и антинейтрона до их столкновения пренебрежимо мала.

Дано	*Решение*
$m_n = 1{,}675 \cdot 10^{-27}$ кг	${}^{1}_{0}n + {}^{1}_{0}\tilde{n} \rightarrow 2\gamma$, $\quad E = 2m_n c^2$,
E_γ — ?	$E_\gamma = \dfrac{E}{2}$, $\quad E_\gamma = m_n c^2$.

Ответ $E_\gamma = 942$ МэВ.

7.114 Перечислите основные свойства нейтрино и антинейтрино и объясните, чем они отличаются по современным представлениям друг от друга.

7.115 Выбрав из четырех типов нейтрино (ν_e, $\tilde{\nu}_e$, ν_μ, $\tilde{\nu}_\mu$) правильное, напишите недостающие обозначения (x) в каждой из приведенных реакций:

1) $x + {}_0^1n \to {}_1^1p + {}_{-1}^{0}e$;

2) $x + {}_0^1n \to {}_1^1p + \mu^-$;

3) $x + {}_1^1p \to {}_0^1n + {}_{+1}^{0}e$.

Ответ 1) ${}_0^0\nu_e + {}_0^1n \to {}_1^1p + {}_{-1}^{0}e$;

2) ${}_0^0\nu_\mu + {}_0^1n \to {}_1^1p + \mu^-$;

3) ${}_0^0\tilde{\nu}_e + {}_1^1p \to {}_0^1n + {}_{+1}^{0}e$.

7.116 Назовите элементарную частицу, обладающую наименьшей массой покоя. Чему равен электрический заряд этой частицы?

7.117 Элементарным частицам приписывают квантово-механическую величину — четность. Что она характеризует? В чем заключается закон сохранения четности и при каких взаимодействиях он выполняется?

7.118 Объясните, какая характеристика элементарных частиц положена в основу деления адронов на мезоны и барионы.

Ответ Барионное число B:
мезоны: $B = 0$;
барионы: $B = 1$.

7.119 Объясните, к какой группе элементарных частиц и почему относится: 1) Λ^0 - гиперон; 2) протон; 3) тау-лептон; 4) π^0 - мезон.

7.120 Объясните, к какой группе элементарных частиц и почему относится: 1) мюонное нейтрино; 2) нейтрон; 3) фотон; 4) K^0 -мезон.

7.121 Перечислите, какие величины сохраняются для процессов взаимопревращаемости элементарных частиц, обусловленных слабым и сильным взаимодействиями.

Ответ

1. Энергия.
2. Импульс.
3. Момент импульса.
4. Зарядовое число.
5. Массовое число.
6. Спин.
7. Лептонное число.
8. Барионное число.
9. Изотопический спин (только сильное взаимодействие).
10. Странность (только сильное взаимодействие).
11. Четность (только сильное взаимодействие).
12. Очарование (только сильное взаимодействие).

7.122 Определите, какие из приведенных ниже процессов разрешены законом сохранения лептонного числа: 1) $p \to n + e^+ + \nu_e$; 2) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$; 3) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$; 4) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$.

Ответ

1) $p \to n + e^+ + \nu_e$;

$(0) = (0) + (-1) + (+1)$ разрешен;

2) $K^- \to \mu^- + \tilde{\nu}_\mu$;

$(0) = (+1) + (-1)$ разрешен;

3) $\pi^+ \to \mu^+ + e^- + e^+$;

$(0) \neq (-1) + (+1) + (-1)$ запрещен;

4) $K^+ \to e^+ + \pi^0 + \nu_e$;

$(0) = (-1) + (0) + (+1)$ разрешен.

7.123 Определите, какие из приведенных ниже процессов запрещены законом сохранения странности: 1) $p+\pi^- \to \Lambda^0 + K^0$; 2) $p+\pi^- \to \Sigma^+ + K^-$; 3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$; 4) $p+\pi^- \to K^- + K^+ + n$.

Ответ

1) $p+\pi^- \to \Lambda^0 + K^0$;

$(0)+(0)=(-1)+(+1)$, разрешен;

2) $p+\pi^- \to \Sigma^+ + K^-$;

$(0)+(0)\neq(-1)+(-1)$, запрещен;

3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$;

$(0)+(0)\neq(-1)+(-1)$, запрещен;

4) $p+\pi^- \to K^- + K^+ + n$,

$(0)+(0)=(-1)+(+1)+(0)$, разрешен.

7.124 Ниже приведены запрещенные способы распада. Перечислите для каждого из них законы сохранения, которые он нарушает: 1) $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$; 2) $K^- + n \to \Omega^- + K^+ + K^0$; 3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$.

Ответ

1) $\pi^- \to \mu^- + \nu_\mu$; лептонное число: $(0)\neq(+1)+(+1)$;

2) $K^- + n \to \Omega^- + K^+ + K^0$; зарядовое число: $(-1)+(0)\neq(-1)+(+1)+(0)$;

3) $p+n \to \Lambda^0 + \Sigma^+$; странность: $(0)+(0)\neq(-1)+(-1)$.

7.125 Ниже приведены запрещенные способы распада. Перечислите для каждого из них законы сохранения, которые в нем нарушаются: 1) $p+p \to p+\pi^+$; 2) $\pi^- + p \to K^- + \Sigma^+$; 3) $\pi^- + n \to \Lambda^0 + K^-$; 4) $\pi^- \to \mu^- + e^+ + e^-$.

7.126 Исследование взаимопревращаемости элементарных частиц привело к открытию нового свойства симметрии — операции зарядового сопряжения, заключающееся в том, что при замене частицы на античастицу в уравнении данной реакции получается новая реакция. Примените операцию зарядового сопряжения к следующим процессам: 1) $\Sigma^+ \to p + \pi^0$; 2) $p + \tilde{p} \to \Sigma^- + \tilde{\Lambda}^0 + K^0 + K^-$.

7.127 Примените операцию зарядового сопряжения (см. задачу 7.126) к следующим процессам: 1) $\pi^0 \to 2\gamma$; 2) $p + K^- \to \Sigma^0 + \pi^+ + \pi^-$.

Ответ 1) $\pi^0 \to 2\gamma$;

2) $\tilde{p} + K^+ \to \tilde{\Sigma}^0 + \pi^- + \pi^+$.

7.128 Охарактеризуйте основные свойства кварков (антикварков) — зарядовые числа (электронное и барионное), спин, странность, цвет, очарование, прелесть.

7.129 Объясните, почему понадобилось введение внутренних характеристик кварков — цвета и очарования.

7.130 Запишите, какие комбинации известных в настоящее время кварков воспроизводят свойства: 1) нейтрона; 2) протона; 3) π^+ - мезона; 4) π^- - мезона; 5) Σ^0 - гиперона.

Ответ
1) n - нейтрон (udd);
2) p - протон (uud);
3) π^+ - мезон ($u\tilde{d}$);
4) π^- - мезон ($\tilde{u}d$);
5) Σ^0 - гиперон (uds).

Важнейшие формулы, используемые в задачнике

1. Физические основы механики

Средняя скорость и среднее ускорение

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}; \qquad \langle \mathbf{a} \rangle = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Мгновенная скорость и мгновенное ускорение

$$\mathbf{v} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}; \qquad \mathbf{a} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}.$$

Тангенциальная и нормальная составляющая ускорения

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}; \qquad a_n = \frac{v^2}{r}.$$

Полное ускорение

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_\tau + \mathbf{a}_n; \qquad a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного поступательного движения

$$\begin{cases} v = v_0 \pm at, \\ s = v_0 t \pm \dfrac{at^2}{2}. \end{cases}$$

Угловая скорость и угловое ускорение

$$\vec{\omega} = \frac{\mathrm{d}\vec{\varphi}}{\mathrm{d}t}; \ \vec{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}.$$

Кинематические уравнения равнопеременного вращательного движения

$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \pm \varepsilon t, \\ \varphi = \omega_0 t \pm \dfrac{\varepsilon t^2}{2}. \end{cases}$$

Связь между линейными и угловыми величинами при вращательном движении

$$s = R\varphi; \qquad v = R\omega;$$

$$a_\tau = R\varepsilon; \qquad a_n = \omega^2 R.$$

Импульс (количество движения)

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Второй закон Ньютона

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}.$$

Сила трения скольжения

$$F_{\text{тр}} = fN.$$

Закон сохранения импульса (для замкнутой системы)

$$\mathbf{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i \mathbf{v}_i = \text{const}.$$

Работа переменной силы на участке траектории *1—2*

$$A = \int_1^2 F \cos\alpha \, \mathrm{d}s.$$

Мгновенная мощность

$$N = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F}\mathbf{v}.$$

Кинетическая энергия

$$T = \frac{mv^2}{2}.$$

Потенциальная энергия тела, поднятого над поверхностью Земли

$$\Pi = mgh.$$

Потенциальная энергия упругодеформированного тела

$$\Pi = \frac{kx^2}{2}.$$

Полная механическая энергия системы

$$E = T + \Pi.$$

Закон сохранения механической энергии (для консервативной системы)

$$T + \Pi = E = \text{const}.$$

Скорость шаров массами m_1 и m_2 после абсолютно упругого центрального удара

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2};$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Скорость шаров после абсолютно неупругого удара

$$\mathbf{v} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 m_2}.$$

Момент инерции системы (тела)

$$J = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i^2.$$

Моменты инерции полого и сплошного цилиндров (или диска) относительно оси симметрии

$$J = mR^2; \qquad J = \frac{1}{2}mR^2.$$

Момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр шара

$$J = \frac{2}{5}mR^2.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его середину

$$J = \frac{1}{12}ml^2.$$

Момент инерции тонкого стержня относительно оси, перпендикулярной стержню и проходящей через его конец

$$J = \frac{1}{3}ml^2.$$

Теорема Штейнера

$$J = J_C + ma^2.$$

Кинетическая энергия вращающегося тела относительно неподвижной оси

$$T_{\text{вр}} = \frac{J_Z\omega^2}{2}.$$

Момент силы относительно неподвижной точки

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}].$$

Момент силы относительно неподвижной оси

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]_z.$$

Момент импульса материальной точки относительно неподвижной точки

$$\mathbf{L} = [\mathbf{rp}] = [\mathbf{r}, m\mathbf{v}].$$

Момент импульса твердого тела относительно неподвижной оси

$$L_Z = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i r_i = J_Z\omega.$$

Уравнение динамики вращательного движения твердого тела

$$M_Z = J_Z\varepsilon; \; \mathbf{M} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}.$$

Закон сохранения момента импульса

$$\mathbf{L} = \mathrm{const}.$$

Закон всемирного тяготения

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Сила тяжести

$$\mathbf{P} = m\mathbf{g}.$$

Напряженность поля тяготения

$$\mathbf{g} = \mathbf{F}/m.$$

Потенциал поля тяготения

$$\varphi = \frac{\Pi}{m} = -G\frac{M}{R}.$$

Взаимосвязь между потенциалом поля тяготения и его напряженностью

$$\mathbf{g} = -\mathrm{grad}\,\varphi.$$

Уравнение неразрывности

$$Sv = \mathrm{const}.$$

Уравнение Бернулли

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + p = \mathrm{const}.$$

Релятивистское замедление хода часов

$$\tau' = \frac{\tau}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Релятивистское (лоренцово) сокращение длины стержня

$$l_0' = \frac{l}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Релятивистский закон сложения скоростей

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}; \quad u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}.$$

Релятивистский импульс

$$\mathbf{p} = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}}\mathbf{v}.$$

Закон взаимосвязи массы и энергии

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Связь между полной энергией и импульсом релятивистской частицы

$$E = \sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}.$$

2. Основы молекулярной физики и термодинамики

Закон Бойля—Мариотта

$$pV = \mathrm{const} \quad \text{при } T, m = \mathrm{const}.$$

Законы Гей-Люссака

$$V = V_0(1 + \alpha t) \quad \text{при } p, m = \mathrm{const},$$

$$p = p_0(1 + \alpha t) \quad \text{при } V, m = \mathrm{const}.$$

Закон Дальтона

$$p = p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n.$$

Уравнение Клапейрона — Менделеева для произвольной массы газа

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT.$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории

$$p = \frac{1}{3}nm_0\langle v_{\text{кв}}\rangle^2.$$

Средняя квадратичная скорость молекулы

$$\langle v_{\text{кв}}\rangle = \sqrt{\frac{3kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}.$$

Средняя арифметическая скорость молекулы

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m_0}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Наиболее вероятная скорость молекулы

$$v_{\text{в}} = \sqrt{\frac{2kT}{m_0}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}.$$

Барометрическая формула

$$p = p_0 e^{-Mgh/(RT)}.$$

Средняя длина свободного побега молекул

$$\langle l \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle z \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}.$$

Среднее число столкновений молекулы за 1 с

$$\langle z \rangle = \sqrt{2}\pi d^2 n \langle v \rangle.$$

Закон теплопроводности Фурье

$$j_{(E)} = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}; \qquad \lambda = \frac{1}{3} c_V \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Закон диффузии Фика

$$j_{(m)} = -D \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}x}; \qquad D = \frac{1}{3} \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Закон Ньютона для внутреннего трения (вязкости)

$$j_{(p)} = -\eta \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}; \qquad \eta = \frac{1}{3} \rho \langle v \rangle \langle l \rangle.$$

Средняя энергия молекулы

$$\langle \varepsilon \rangle = \frac{i}{2} kT.$$

Внутренняя энергия произвольной массы газа

$$U = \nu \frac{i}{2} RT = \frac{m}{M} \frac{i}{2} RT.$$

Первое начало термодинамики

$$\delta Q = \mathrm{d}U + \delta A.$$

Молярная теплоемкость газа при постоянном объеме и постоянном давлении

$$C_V = \frac{i}{2} R; \qquad C_p = \frac{i+2}{2} R.$$

Работа газа при изменении его объема

$$\delta A = p\,\mathrm{d}V.$$

Работа газа при изобарном расширении

$$A = p(V_2 - V_1) = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1).$$

Работа газа при изотермическом расширении

$$A = Q = \frac{m}{M} RT \ln \frac{V_2}{V_1} = \frac{m}{M} RT \ln \frac{p_1}{p_2}.$$

Уравнения адиабатного процесса (уравнение Пуассона)

$$pV^{\gamma} = \text{const}; \qquad TV^{\gamma-1} = \text{const};$$

$$T^{\gamma} p^{1-\gamma} = \text{const}.$$

Работа газа при адиабатном расширении

$$A = \frac{m}{M} C_V (T_1 - T_2).$$

Термический КПД для кругового процесса

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}.$$

Термический КПД цикла Карно

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}.$$

Уравнение Ван-дер-Ваальса для моля реального газа

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT.$$

3. Электричество и электромагнетизм

Закон Кулона

$$F=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|Q_1Q_2|}{r^2}.$$

Напряженность электростатического поля

$$\mathbf{E}=\mathbf{F}/Q_0.$$

Поток вектора напряженности электростатического поля сквозь замкнутую поверхность S

$$\Phi_E=\oint\limits_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint\limits_S E_n\,\mathrm{d}S.$$

Принцип суперпозиции

$$\mathbf{E}=\sum_{i=1}^{n}\mathbf{E}_i.$$

Электрический момент диполя

$$\mathbf{p}=|Q|\,\mathbf{l}.$$

Теорема Гаусса для электростатического поля в вакууме

$$\oint\limits_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint\limits_S E_n\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n}Q_i;$$

$$\oint\limits_S \mathbf{E}\,\mathrm{d}\mathbf{S}=\oint\limits_S E_n\,\mathrm{d}S=\frac{1}{\varepsilon_0}\int\limits_V \rho\,\mathrm{d}V.$$

Объемная, поверхностная и линейная плотности заряда

$$\rho=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V};\qquad \sigma=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S};\qquad \tau=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной бесконечной плоскостью,

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого двумя бесконечными параллельными разноименно заряженными плоскостями,

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}.$$

Напряженность поля, создаваемого равномерно заряженной сферической поверхностью,

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\quad (r\geqslant R);$$

$$E=0\qquad (r<R).$$

Потенциал электростатического поля

$$\varphi=\frac{U}{Q_0}=\frac{A_\infty}{Q_0}.$$

Связь между потенциалом электростатического поля и его напряженностью

$$\mathbf{E}=-\operatorname{grad}\varphi.$$

Связь между векторами **P** и **E**

$$\mathbf{P}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}.$$

Связь между ε и $\varkappa$

$$\varepsilon=1+\varkappa.$$

Связь между векторами электрического смещения и напряженностью электростатического поля

$$\mathbf{D}=\varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}.$$

Электрическая емкость уединенного проводника

$$C=\frac{Q}{\varphi}.$$

Электрическая емкость шара

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon R.$$

Электрическая емкость плоского конденсатора

$$C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon S}{d}.$$

Электрическая емкость цилиндрического конденсатора

$$C=\frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln(r_2/r_1)}.$$

Электрическая емкость сферического конденсатора

$$C=4\pi\varepsilon_0\varepsilon\frac{r_2 r_1}{r_2-r_1}.$$

Электрическая емкость параллельно и последовательно соединенных конденсаторов

$$C=\sum_{i=1}^{n}C_i;\qquad \frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}.$$

Энергия заряженного уединенного проводника

$$W=\frac{C\varphi^2}{2}=\frac{Q\varphi}{2}=\frac{Q^2}{2C}.$$

Энергия заряженного конденсатора

$$W=\frac{C(\Delta\varphi)^2}{2}=\frac{Q\Delta\varphi}{2}=\frac{Q^2}{2C}.$$

Объемная плотность энергии электростатического поля

$$\omega=\frac{W}{V}=\frac{\varepsilon_0\varepsilon E^2}{2}=\frac{ED}{2}.$$

Сила тока

$$I=\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}.$$

Плотность тока

$$j=I/S.$$

Электродвижущая сила, действующая в цепи

$$\varepsilon=A/Q_0;\qquad \varepsilon=\oint\mathbf{E}_{\text{ст}}\,\mathrm{d}\mathbf{l}.$$

Закон Ома для однородного участка цепи

$$I=U/R.$$

Закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{j}=\gamma\mathbf{E}.$$

Мощность тока

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=UI=I^2R=U^2/R.$$

Закон Джоуля — Ленца

$$\mathrm{d}Q=IU\,\mathrm{d}t=I^2R\,\mathrm{d}t=\frac{U^2}{R}\mathrm{d}t.$$

Закон Джоуля—Ленца в дифференциальной форме

$$\omega=jE=\gamma E^2.$$

Закон Ома для неоднородного участка цепи (обобщенный закон Ома)

$$I=\frac{\varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E}_{12}}{R}.$$

Магнитный момент рамки с током

$$\mathbf{p}_m=IS\mathbf{n}.$$

Связь между индукцией и напряженностью магнитного поля

$$\mathbf{B}=\mu_0\mu\mathbf{H}.$$

Закон Био — Савара — Лапласа для элемента проводника с током

$$\mathrm{d}\mathbf{B}=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{I[\mathrm{d}\mathbf{l},\mathbf{r}]}{r^3}.$$

Магнитная индукция поля прямого тока

$$B=\frac{\mu_0\mu}{4\pi}\frac{2I}{R}.$$

Магнитная индукция поля в центре круглого проводника с током

$$B = \mu_0 \mu \frac{I}{2R}.$$

Закон Ампера

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = I[\mathrm{d}\mathbf{l}, \mathbf{B}].$$

Магнитное поле свободно движущегося заряда

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \frac{Q[\mathbf{vr}]}{r^3}.$$

Сила Лоренца

$$\mathbf{F} = Q[\mathbf{vB}].$$

Холловская поперечная разность потенциалов

$$\Delta\varphi = \frac{1}{en} \frac{IB}{d} = R \frac{IB}{d}.$$

Закон полного тока для магнитного поля в вакууме (теорема о циркуляции вектора **B**)

$$\oint_L \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_L B_l\, \mathrm{d}l = \mu_0 \sum_{k=1}^{n} I_k.$$

Магнитная индукция поля внутри соленоида (в вакууме), имеющего N витков,

$$B = \mu_0 \frac{NI}{l}.$$

Поток вектора магнитной индукции (магнитный поток) сквозь произвольную поверхность

$$\Phi_B = \oint_S \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{S} = \oint_S B_n\, \mathrm{d}S.$$

Закон Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}.$$

ЭДС самоиндукции

$$\varepsilon_s = -L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}.$$

Индуктивность бесконечно длинного соленоида, имеющего N витков,

$$L = \mu_0 \mu \frac{N^2 S}{l}.$$

Ток при размыкании цепи

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

Ток при замыкании цепи

$$I = I_0 \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right).$$

Энергия магнитного поля, связанного с контуром,

$$W = LI^2/2.$$

Объемная плотность энергии магнитного поля

$$w = \frac{W}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}.$$

Намагниченность

$$\mathbf{J} = \frac{\sum \mathbf{p}_a}{V}.$$

Связь между векторами **J** и **H**

$$\mathbf{J} = \chi \mathbf{H}.$$

Связь между μ и χ

$$\mu = 1 + \chi.$$

Закон полного тока для магнитного поля в веществе (теорема о циркуляции вектора **B**)

$$\oint_L \mathbf{B}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = \oint_L B_l\, \mathrm{d}l = \mu_0 (I + I').$$

Теорема о циркуляции вектора **H**

$$\oint_L \mathbf{H}\, \mathrm{d}\mathbf{l} = I.$$

4. Колебания и волны

Уравнение гармонического колебания

$$s = A\cos(\omega_0 t + \varphi);$$

$$\omega_0 = 2\pi/T = 2\pi\nu .$$

Период колебаний физического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{J/(mgl)} = 2\pi\sqrt{L/g} .$$

Период колебаний математического маятника

$$T = 2\pi\sqrt{l/g} .$$

Формула Томсона

$$T = 2\pi\sqrt{LC} .$$

Логарифмический декремент затухания

$$\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T .$$

Индуктивное сопротивление

$$R_L = \omega L .$$

Емкостное сопротивление

$$R_C = \frac{1}{\omega C} .$$

Полное сопротивление цепи

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L + \frac{1}{\omega C}\right)^2} .$$

Длина волны

$$\lambda = vT .$$

Уравнение плоской волны

$$\xi(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_0) .$$

Уравнение сферической волны

$$\xi(r,t) = \frac{A_0}{r}\cos(\omega t - kx + \varphi_0) .$$

Фазовая и групповая скорости

$$v = \frac{\omega}{k}; \qquad u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} .$$

Уравнение стоячей волны

$$\xi = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t .$$

Эффект Доплера в акустике

$$\nu = \frac{(v \pm v_{\text{пр}})\nu_0}{v \mp v_{\text{ист}}} .$$

Скорость распространения электромагнитных волн в среде

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} .$$

5. Оптика. Квантовая природа излучения

Закон отражения света

$$i_1' = i_1 .$$

Закон преломления света

$$\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = n_{21} .$$

Формула тонкой линзы

$$(N-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} .$$

Показатель преломления света

$$n = \frac{v}{c} .$$

Оптическая длина пути

$$L = ns .$$

Оптическая разность хода

$$\Delta = L_2 - L_1 .$$

Условия интерференционных максимумов и минимумов

$$\Delta = \pm m\lambda_0 \quad (m = 0, 1, 2, \ldots);$$

$$\Delta = \pm(2m+1)\frac{\lambda_0}{2} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Оптическая разность хода в тонких пленках в отраженном свете

$$\Delta = 2d\sqrt{n^2 - \sin^2 i} \pm \frac{\lambda_0}{2}.$$

Условия дифракционных максимумов и минимумов от одной щели

$$a\sin\varphi = \pm(2m+1)\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$a\sin\varphi = \pm 2m\frac{\lambda}{2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Условие главных максимумов дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = \pm m\lambda \quad (m = 0, 1, 2, \ldots).$$

Условие дополнительных минимумов дифракционной решетки

$$d\sin\varphi = \pm\frac{m'\lambda}{N} \quad (m' \neq 0, N, 2N, \ldots).$$

Формула Вульфа — Брэгтов

$$2d\sin\vartheta = m\lambda \quad (m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Разрешающая способность спектрального прибора и дифракционной решетки

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda}; \qquad R = mN.$$

Продольный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0\frac{\sqrt{1 - v/c}}{\sqrt{1 + v/c}}.$$

Поперечный эффект Доплера

$$\nu = \nu_0\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Степень поляризации

$$P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}.$$

Закон Малюса

$$I = I_0\cos^2\alpha.$$

Закон Брюстера

$$\operatorname{tg} i_B = n_{21}.$$

Угол вращения плоскости поляризации в кристаллах и растворах

$$\varphi = \alpha d; \qquad \varphi = [\alpha]Cd.$$

Закон Стефана — Больцмана

$$R_e = \sigma T^4.$$

Закон смещения Вина

$$\lambda_{\max} = b/T.$$

Формула Планка

$$r_{\nu,T} = \frac{2\pi\nu}{c^2}\frac{h\nu}{e^{h\nu/(kT)} - 1}.$$

Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}.$$

Энергия и импульс фотона

$$\varepsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda}; \qquad p_\gamma = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{h\nu}{c}.$$

Давление света при нормальном падении на поверхность

$$p = \frac{E_e}{c}(1 + \rho) = w(1 + \rho).$$

Изменение длины волны при эффекте Комптона

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta) = \frac{2h}{m_0 c}\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

6. Элементы квантовой физики атомов, молекул и твердых тел

Обобщенная формула Бальмера

$$\nu = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

Энергия электрона в водородоподобном атоме

$$E_n = -\frac{1}{n^2}\cdot\frac{Z^2 m_e e^4}{8h^2\varepsilon_0^2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Длина волны де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p}.$$

Соотношение неопределенностей

$$\begin{cases} \Delta x \Delta p_x \geqslant h, \\ \Delta x \Delta p_y \geqslant h, \\ \Delta x \Delta p_z \geqslant h, \end{cases} \quad \Delta E \Delta t \geqslant h.$$

Общее уравнение Шредингера

$$-\frac{\hbar}{2m}\Delta\Psi + U(x, y, z)\Psi = i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}.$$

Уравнение Шредингера для стационарных состояний

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0.$$

Коэффициент прозрачности прямоугольного потенциального барьера

$$D = D_0 \exp\left[-\frac{2}{\hbar}\sqrt{2m(U - E)l}\right].$$

Энергия квантового осциллятора

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_0.$$

Закон Мозли

$$\nu = R(Z - \sigma)^2\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$

7. Элементы физики атомного ядра и элементарных частиц

Энергия связи нуклонов в ядре

$$E_{\text{св}} = \left[Zm_p + (A - Z)m_n - m_{\text{я}}\right]c^2.$$

Дефект массы ядра

$$\Delta m = \left[Zm_p + (A - Z)m_n\right] - m_{\text{я}}.$$

Закон радиоактивного распада

$$N = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda t}.$$

Период полураспада

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

Среднее время жизни радиоактивного ядра

$$\tau = \frac{1}{\lambda}.$$

Правило смещения для α-распада

$${}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-2}^{A-4}\mathrm{Y} + {}_2^4\mathrm{He}.$$

Правило смещения для β^--распада

$${}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z+1}^{A}\mathrm{Y} + {}_{-1}^{0}e.$$

Правило смещения для β^+-распада

$${}_Z^A\mathrm{X} \to {}_{Z-1}^{A}\mathrm{Y} + {}_{+1}^{0}e.$$

ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СИСТЕМА

ПЕРИОДЫ	РЯДЫ	ГРУППЫ				
		I	II	III	IV	V
1	I	**H** 1 1,00794 $1s^1$ ВОДОРОД 1				
2	II	**Li** 3 $6{,}94_1$ $2s^1$ ЛИТИЙ 1 2	**Be** 4 9,01218 $2s^2$ БЕРИЛЛИЙ 2 2	5 **B** 10,81 $2p^1$ БОР 3 2	6 **C** 12,011 $2p^2$ УГЛЕРОД 4 2	7 **N** 14,0067 $2p^3$ АЗОТ 5 2
3	III	**Na** 11 22,98977 $3s^1$ НАТРИЙ 1 8 2	**Mg** 12 24,305 $3s^2$ МАГНИЙ 2 8 2	13 **Al** 26,98154 $3p^1$ АЛЮМИНИЙ 3 8 2	14 **Si** $28{,}085_5$ $3p^2$ КРЕМНИЙ 4 8 2	15 **P** 30,97376 $3p^3$ ФОСФОР 5 8 2
4	IV	**K** 19 $39{,}098_3$ $4s^1$ КАЛИЙ 1 8 8 2	**Ca** 20 40,08 $4s^2$ КАЛЬЦИЙ 2 8 8 2	**Sc** 21 44,9559 $3d^1 4s^2$ СКАНДИЙ 2 9 8 2	**Ti** 22 47,90 $3d^2 4s^2$ ТИТАН 2 10 8 2	**V** 23 50,9415 $3d^3 4s^2$ ВАНАДИЙ 2 11 8 2
	V	29 **Cu** $63{,}54_6$ $3d^{10} 4s^1$ МЕДЬ 1 18 8 2	30 **Zn** 65,38 $4s^2$ ЦИНК 2 18 8 2	31 **Ga** 69,72 $4p^1$ ГАЛЛИЙ 3 18 8 2	32 **Ge** $72{,}5_9$ $4p^2$ ГЕРМАНИЙ 4 18 8 2	33 **As** 74,9216 $4p^3$ МЫШЬЯК 5 18 8 2
5	VI	**Rb** 37 $85{,}467_8$ $5s^1$ РУБИДИЙ 1 8 18 8 2	**Sr** 38 87,62 $5s^2$ СТРОНЦИЙ 2 8 18 8 2	**Y** 39 88,9059 $4d^1 5s^2$ ИТТРИЙ 2 9 18 8 2	**Zr** 40 91,22 $4d^2 5s^2$ ЦИРКОНИЙ 2 10 18 8 2	**Nb** 41 92,9064 $4d^4 5s^1$ НИОБИЙ 1 12 18 8 2
	VII	47 **Ag** 107,8682 $5s^1$ СЕРЕБРО 1 18 18 8 2	48 **Cd** 112,41 $5s^2$ КАДМИЙ 2 18 18 8 2	49 **In** 114,82 $5p^1$ ИНДИЙ 3 18 18 8 2	50 **Sn** $118{,}6_9$ $5p^2$ ОЛОВО 4 18 18 8 2	51 **Sb** $121{,}7_5$ $5p^3$ СУРЬМА 5 18 18 8 2
6	VIII	**Cs** 55 132,9054 $6s^1$ ЦЕЗИЙ 1 8 18 18 8 2	**Ba** 56 137,33 $6s^2$ БАРИЙ 2 8 18 18 8 2	57**La—Lu**71 *	**Hf** 72 $178{,}4_9$ $5d^2 6s^2$ ГАФНИЙ 2 10 32 18 8 2	**Ta** 73 $180{,}947_9$ $5d^3 6s^2$ ТАНТАЛ 2 11 32 18 8 2
	IX	79 **Au** 196,9665 $5d^{10} 6s^1$ ЗОЛОТО 1 18 32 18 8 2	80 **Hg** $200{,}5_9$ $6s^2$ РТУТЬ 2 18 32 18 8 2	81 **Tl** 204,383 $6p^1$ ТАЛЛИЙ 3 18 32 18 8 2	82 **Pb** 207,2 $6p^2$ СВИНЕЦ 4 18 32 18 8 2	83 **Bi** 208,9804 $6p^3$ ВИСМУТ 5 18 32 18 8 2
7	X	**Fr** 87 223,0197 $7s^1$ ФРАНЦИЙ 1 8 18 32 18 8 2	**Ra** 88 226,0254 $7s^2$ РАДИЙ 2 8 18 32 18 8 2	89**Ac—(Lr)**103 **	**Ku** 104 [261] $6d^2 7s^2$ КУРЧАТОВИЙ 2 10 32 32 18 8 2	**Ns** 105 [262] $6d^3 7s^2$ НИЛЬСБОРИЙ 2 11 32 32 18 8 2

*ЛАНТАН

La 57 $138{,}905_5$ $5d^1 6s^2$ ЛАНТАН 2 9 18 18 8 2	**Ce** 58 140,12 $4f^2 6s^2$ ЦЕРИЙ 2 8 20 18 8 2	**Pr** 59 140,9077 $4f^3 6s^2$ ПРАЗЕОДИМ 2 8 21 18 8 2	**Nd** 60 $144{,}2_4$ $4f^4 6s^2$ НЕОДИМ 2 8 22 18 8 2	**Pm** 61 [145] $4f^5 6s^2$ ПРОМЕТИЙ 2 8 23 18 8 2	**Sm** 62 150,4 $4f^6 6s^2$ САМАРИЙ 2 8 24 18 8 2	**Eu** 63 151,96 $4f^7 6s^2$ ЕВРОПИЙ 2 8 25 18 8 2	**Gd** 64 $157{,}2_5$ $4f^7 5d^1 6s^2$ ГАДОЛИНИЙ 2 9 25 18 8 2

**АКТИН

Ac 89 227,0278 $6d^1 7s^2$ АКТИНИЙ 2 9 18 32 18 8 2	**Th** 90 232,0381 $6d^2 7s^2$ ТОРИЙ 2 10 18 32 18 8 2	**Pa** 91 231,0359 $5f^2 6d^1 7s^2$ ПРОТАКТИНИЙ 2 9 20 32 18 8 2	**U** 92 $238{,}02_9$ $5f^3 6d^1 7s^2$ УРАН 2 9 21 32 18 8 2	**Np** 93 237,0482 $5f^4 6d^1 7s^2$ НЕПТУНИЙ 2 9 22 32 18 8 2	**Pu** 94 244,0642 $5f^6 7s^2$ ПЛУТОНИЙ 2 8 24 32 18 8 2	**Am** 95 243,0614 $5f^7 7s^2$ АМЕРИЦИЙ 2 8 25 32 18 8 2	**Cm** 96 247,0703 $5f^7 6d^1 7s^2$ КЮРИЙ 2 9 25 32 18 8 2

ЭЛЕМЕНТОВ Д.И. МЕНДЕЛЕЕВА

ЭЛЕМЕНТОВ

VI	VII	VIII		
	H			2 **He** 4,00260 $1s^2$ 2 ГЕЛИЙ
8 **O** 15,999$_4$ $2p^4$ 6 2 КИСЛОРОД	9 **F** 18,998403 $2p^5$ 7 2 ФТОР			10 **Ne** 20,17$_9$ $2p^6$ 8 2 НЕОН
16 **S** 32.06 $3p^4$ 6 8 2 СЕРА	17 **Cl** 35,453 $3p^5$ 7 8 2 ХЛОР			18 **Ar** 39,94$_8$ $3p^6$ 8 8 2 АРГОН
Cr 24 51,996 $3d^54s^1$ 1 13 8 2 ХРОМ	**Mn** 25 54,9380 $3d^54s^2$ 2 13 8 2 МАРГАНЕЦ	**Fe** 26 55,84$_7$ $3d^64s^2$ 2 14 8 2 ЖЕЛЕЗО	**Co** 27 58,9332 $3d^74s^2$ 2 15 8 2 КОБАЛЬТ	**Ni** 28 58,70 $3d^84s^2$ 2 16 8 2 НИКЕЛЬ
34 **Se** 78.9$_6$ $4p^4$ 6 18 8 2 СЕЛЕН	35 **Br** 79,904 $4p^5$ 7 18 8 2 БРОМ			36 **Kr** 83,80 $4p^6$ 8 18 8 2 КРИПТОН
Mo 42 95.94 $4d^55s^1$ 1 13 18 8 2 МОЛИБДЕН	**Tc** 43 98.9062 $4d^55s^2$ 2 13 18 8 2 ТЕХНЕЦИЙ	**Ru** 44 101,0$_7$ $4d^75s^1$ 1 15 18 8 2 РУТЕНИЙ	**Rh** 45 102.9055 $4d^85s^1$ 1 16 18 8 2 РОДИЙ	**Pd** 46 106,4 $4d^{10}5s^0$ 0 18 18 8 2 ПАЛЛАДИЙ
52 **Te** 127,6$_0$ $5p^4$ 6 18 18 8 2 ТЕЛЛУР	53 **I** 126,9045 $5p^5$ 7 18 18 8 2 ИОД			54 **Xe** 131,29 $5p^6$ 8 18 18 8 2 КСЕНОН
W 74 183.8$_5$ $5d^46s^2$ 2 12 32 18 8 2 ВОЛЬФРАМ	**Re** 75 186.207 $5d^56s^2$ 2 13 32 18 8 2 РЕНИЙ	**Os** 76 190,2 $5d^66s^2$ 2 14 32 18 8 2 ОСМИЙ	**Ir** 77 192,2$_2$ $5d^76s^2$ 2 15 32 18 8 2 ИРИДИЙ	**Pt** 78 195,08 $5d^96s^1$ 1 17 32 18 8 2 ПЛАТИНА
84 **Po** 208,9824 $6p^4$ 6 18 32 18 8 2 ПОЛОНИЙ	85 **At** 209,9871 $6p^5$ 7 18 32 18 8 2 АСТАТ			86 **Rn** 222,0176 $6p^6$ 8 18 32 18 8 2 РАДОН

U 92 — Атомный номер
Атомная масса — 238,0289
Распределение электронов по застраивающимся и последующим застроенным подуровням — $5f^36d^17s^2$
2 9 21 32 18 8 2 — Распределение электронов по уровням
УРАН

Атомные массы приведены по Международной таблице 1983 г

Точность последней значащей цифры ±1 или ±3, если она выделена мелким шрифтом.

В квадратных скобках приведены массовые числа наиболее устойчивых изотопов.

Названия и символы элементов, приведенные в круглых скобках, не являются общепринятыми.

ОИДЫ

Tb 65 158.9254 $4f^96s^2$ 2 8 27 18 8 2 ТЕРБИЙ	**Dy** 66 162,5$_0$ $4f^{10}6s^2$ 2 8 28 18 8 2 ДИСПРОЗИЙ	**Ho** 67 164.9304 $4f^{11}6s^2$ 2 8 29 18 8 2 ГОЛЬМИЙ	**Er** 68 167,2$_6$ $4f^{12}6s^2$ 2 8 30 18 8 2 ЭРБИЙ	**Tm** 69 168,9342 $4f^{13}6s^2$ 2 8 31 18 8 2 ТУЛИЙ	**Yb** 70 173,0$_4$ $4f^{14}6s^2$ 2 8 32 18 8 2 ИТТЕРБИЙ	**Lu** 71 174,967 $5d^16s^2$ 2 9 32 18 8 2 ЛЮТЕЦИЙ

ОИДЫ

Bk 97 247,0703 $5f^86d^17s^2$ 2 9 26 32 18 8 2 БЕРКЛИЙ	**Cf** 98 251,0796 $5f^{10}7s^2$ 2 8 28 32 18 8 2 КАЛИФОРНИЙ	**Es** 99 252,0828 $5f^{11}7s^2$ 2 8 29 32 18 8 2 ЭЙНШТЕЙНИЙ	**Fm** 100 257,0951 $5f^{12}7s^2$ 2 8 30 32 18 8 2 ФЕРМИЙ	**Md** 101 258,097 $5f^{13}7s^2$ 2 8 31 32 18 8 2 МЕНДЕЛЕВИЙ	**(No)** 102 259,1009 $5f^{14}7s^2$ 2 8 32 32 18 8 2 (НОБЕЛИЙ)	**(Lr)** 103 260,1054 $5f^{14}6d^17s^2$ 2 9 32 32 18 8 2 (ЛОУРЕНСИЙ)

Учебное издание

Трофимова Таисия Ивановна
Павлова Зоя Григорьевна

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ ФИЗИКИ С РЕШЕНИЯМИ

Редактор *Г.Н. Чернышова*
Художественный редактор *Ю.Э. Иванова*
Корректор *Г.Н. Петрова*
Компьютерная верстка *С.Ч. Соколовский*

Лицензия ИД № 06236 от 09.11.01.

Изд. № ФМ-238. Подп. в печать 05.03.03. Формат $60\times88^1/_{16}$.
Бум. газетная. Гарнитура «Таймс». Печать офсетная.
Объем: 36,26 усл. печ. л., 36,51 усл. кр.-отт., 23,49 уч.-изд. л.
Тираж 12000 экз. Заказ № 2741.

ФГУП «Издательство «Высшая школа», 127994, Москва, ГСП-4,
Неглинная ул., 29/14.

Тел.: (095) 200-04-56
E-mail: info@v-shkola.ru http://www.v-shkola.ru

Отдел реализации: (095) 200-07-69, 200-59-39, факс: (095) 200-03-01.
E-mail: sales@v-shkola.ru

Отдел «книга-почтой»: (095) 200-33-36. E-mail: bookpost@v-shkola.ru

Набрано на персональных компьютерах издательства

Отпечатано с готовых диапозитивов в ФГУП ордена «Знак Почета»
Смоленской областной типографии им. В. И. Смирнова.
214000, г. Смоленск, пр-т им. Ю. Гагарина, 2.